

VIBRACIONES TRANSVERSALES Y PANDEO DE VIGAS AFG TIMOSHENKO CON CARGAS AXILES

TRANSVERSE VIBRATIONS AND BUCKLING OF AFG TIMOSHENKO BEAMS WITH AXIAL LOADS

Gonzalo J. Gilardi ^{a,b}, Carlos A. Rossit ^{a,b} y Diana V. Bambill ^{a,b}

^a *Departamento de Ingeniería (UNS), Instituto de Ingeniería-II-UNS (UNS-CIC), Universidad Nacional del Sur (UNS), Avenida Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, <http://www.uns.edu.ar>*

^b *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina. gonzalo.gilardi@uns.edu.ar, carossit@criba.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar*

Palabras clave: Viga Timoshenko, Vigas AFG, Vibración de vigas, Pandeo, Rayleigh-Ritz.

Resumen Como es sabido, los problemas de vibraciones transversales libres y la inestabilidad bajo una carga axial de una viga son dos situaciones tecnológicas distintas, que tienen semejanzas en su enfoque cuando se pretende obtener su solución elástica. De hecho, son dos problemas de valores propios en los que se analiza la situación de equilibrio de la viga en configuraciones que difieren muy ligeramente de la configuración original no deformada. Se acoplan en el caso de que la viga vibrando transversalmente tenga aplicadas fuerzas en su eje. Para el caso particular de frecuencia nula, los valores de la carga axial se corresponden con los valores críticos de pandeo. En el presente estudio se determinan las cargas críticas para vigas constituidas por material funcionalmente graduado, cuyas propiedades varían en la dirección axial (AFG, por sus siglas en inglés). El comportamiento flexional de la viga se describe mediante la teoría de Timoshenko. El problema se resuelve aplicando el método de Ritz. Se analizan diferentes casos numéricos, variando los parámetros geométricos y del material en la viga, para distintas condiciones de borde. Los resultados numéricos del modelo propuesto se contrastan satisfactoriamente con casos disponibles en la literatura técnica.

Keywords: Timoshenko beam, AFG beams, Vibration of beams, Rayleigh-Ritz, Winkler-Pasternak.

Abstract. As it is known, the problems of free transverse vibrations and instability under axial load of a beam are two different technological situations that have similarities in their approach to elastic solution. In fact, they are two eigenvalue problems in which we analyze the equilibrium situation of the beam in configurations which differ very slightly from the original, straight configuration. They are coupled when axial forces are applied to the ends of the vibrating beam. The presence of forces can have a significant effect on structural performance and should be taken into account in the formulation of the dynamic problem. The forces' magnitude is varied and the first natural frequencies of transverse vibration of AFG beams are obtained. The critical values of the forces which cause instability are also obtained. Different numerical cases are analyzed, varying the geometric and material parameters in the AFG beam, for different edge conditions. The behavior of the beam is described by Timoshenko's theory. Due to the analytical complexity the Ritz method is employed. The results agree with particular situations of the model, available in the scientific literature.

1 INTRODUCCIÓN

Las vibraciones transversales libres y el fenómeno de inestabilidad elástica (pandeo), son dos áreas de investigación que adquirieron gran protagonismo en la última centuria. [Hearmon \(1956\)](#) demostró experimentalmente que el pandeo puede considerarse como un caso especial del problema de vibración. Es decir, es posible determinar las tensiones en el plano que hacen que la frecuencia de vibración se haga cero.

En la ingeniería, estas dos situaciones tecnológicas diferentes cumplen un rol clave en el diseño de las estructuras. Para minimizar el peso de un elemento estructural o maximizar la carga de compresión axial aplicada, es viable elegir una sección transversal variable adecuada y/o usar materiales con propiedades funcionalmente graduados (FGM, según siglas en inglés).

Los primeros estudios de vigas con propiedades graduadas en la dirección axial (AFG, por sus siglas en inglés) se realizaron por medio del método semi-inverso ([Elishakoff, 2000](#)). Sin embargo, este método posee dificultades en el cálculo del campo de desplazamiento para vigas AFG cuyas distribuciones de densidad de masa y módulo de elasticidad son conocidas. Es por eso que los métodos aproximados comenzaron a tener mayor auge de implementación.

En lo que respecta a las vibraciones transversales libres en vigas AFG Timoshenko, [Gilardi \(2019\)](#) presenta variados estudios, así como una amplia bibliografía de trabajos relacionados.

En cuanto a la determinación de cargas críticas en vigas ahusadas AFG Timoshenko, aparecen los casos propuestos por [Shahba et al. \(2011\)](#). Estos autores obtuvieron, mediante el método de elementos finitos, los coeficientes de frecuencia y el primer coeficiente de carga crítica para distintas condiciones de borde clásicas. Luego, [Rajasekaran \(2012\)](#) utilizando el método de transformación diferencial; [Lepik y Hein \(2014\)](#) utilizando las transformadas Haar Wavelets, [Huang et al. \(2016\)](#) empleando una función auxiliar y series de potencias, [Soltani y Asgarian \(2018\)](#) empleando el método de elementos finitos y [Soltani et al. \(2019\)](#) con el método de diferencias finitas, entre otros, se valieron de estos casos para validar sus modelos. Todos estos autores implementaron leyes de distribuciones axiales asimétricas, del tipo de serie de potencias, exponenciales, etc. [Soltani \(2017\)](#) con el método de serie de potencias obtuvo, además, el primer coeficiente de frecuencia para vigas ahusadas AFG con carga axial de compresión y de tracción, para vigas cantiléver y simplemente apoyada.

En el presente trabajo se emplean distribuciones simétricas para mejorar la rigidez de vigas homogéneas, tanto al esfuerzo axial como al movimiento vibratorio transversal, que presentan restringido el desplazamiento transversal en sus extremos. Primero se obtienen los coeficientes de cargas críticas para distintas vinculaciones y esbelteces, para luego obtener los coeficientes de frecuencias bajo carga axial de compresión y tracción, las cuales se expresarán como proporción de las cargas críticas de pandeo obtenidas. Se emplea el método energético de Rayleigh-Ritz para llevar a cabo el análisis ([Ilanko et al., 2014](#)).

2 MODELO DE ANÁLISIS

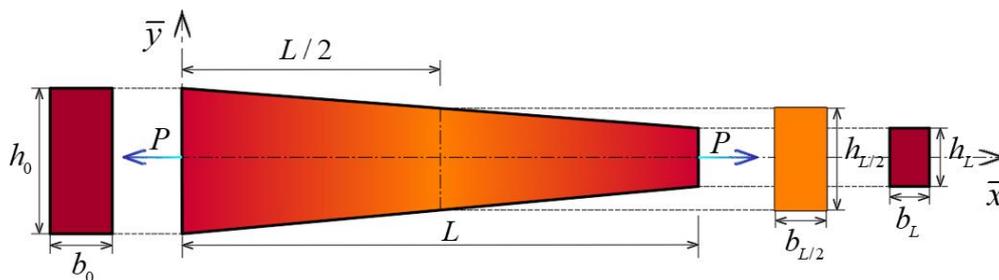


Figura 1: Viga Timoshenko AFG con carga axial.

La **Figura 1** muestra el modelo de viga Timoshenko AFG con carga axial P (de tracción), que se implementa para el presente estudio. Se aprecia que los parámetros geométricos de la sección transversal rectangular, ancho b y altura h , varían de forma abusada en la dirección de la directriz de la viga; y que las propiedades del material lo hacen de forma funcionalmente graduada y simétrica a lo largo de la longitud L .

El movimiento vibratorio de la viga se referencia mediante un sistema de ejes coordenados, con origen en la sección transversal inicial de la viga. El eje \bar{x} coincide con el eje de flexión (en la posición sin deformar), y es perpendicular al eje \bar{y} en el baricentro de dicha sección. A cada parámetro geométrico y del material se le asocia un subíndice, de manera de identificar la sección transversal a la que se hace referencia. Para el extremo izquierdo se implementa el subíndice "0" y para el derecho se utiliza el subíndice "L".

El modelo considera que las fuerzas P son colineales con el eje de flexión.

3 DISTRIBUCIÓN DE LAS PROPIEDADES Y VARIACIÓN DE LA GEOMETRÍA

Dado que la sección transversal de la viga se considera variable y está constituida por material AFG, resulta adecuado definir la siguiente expresión genérica:

$$R(\bar{x}) = R_0 f_R(\bar{x}) \quad (1)$$

$R(\bar{x})$ es una característica geométrica o del material, cuya variación axial tiene un valor referenciado a la sección inicial R_0 y sigue una ley de distribución $f_R(\bar{x})$. En particular:

$A(\bar{x}) = A_0 f_A(\bar{x}), I(\bar{x}) = I_0 f_I(\bar{x}), \rho(\bar{x}) = \rho_0 f_\rho(\bar{x}), E(\bar{x}) = E_0 f_E(\bar{x}), G(\bar{x}) = G_0 f_G(\bar{x});$ (2) donde A es el área de la sección transversal e I es el momento de inercia respecto al eje de flexión, y para las secciones rectangulares se tiene $A_0 = b_0 \times h_0$ y $I_0 = (b_0 \times h_0^3) / 12$. En cuanto al material, ρ es la densidad de masa, E es el módulo de Young y G es el módulo de corte. Al considerar propiedades de material isótropo, G puede obtenerse mediante la siguiente expresión (Kang y Zhong-Ci, 1996), extendida a materiales funcionalmente graduados:

$$G(\bar{x}) = E(\bar{x}) / 2(1 + \mu) \quad (3)$$

donde μ es el coeficiente de Poisson, y por ende se cumple que $f_G(\bar{x}) = f_E(\bar{x})$.

4 MÉTODO ENERGÉTICO DE RAYLEIGH RITZ

Asumiendo que la viga vibra según uno de sus modos normales, el desplazamiento vertical $v(\bar{x}, t)$ de los puntos de la superficie media en la dirección del eje \bar{y} y el giro normal $\psi(\bar{x}, t)$ de la sección transversal durante la deformación, pueden escribirse como:

$$v(\bar{x}, t) = \bar{V}(\bar{x}) \cos(\omega t) \quad ; \quad \psi(\bar{x}, t) = \bar{\Psi}(\bar{x}) \cos(\omega t) \quad (4)$$

donde $\bar{V}(\bar{x})$ y $\bar{\Psi}(\bar{x})$ son las amplitudes del desplazamiento y del giro, ω es la frecuencia natural circular de vibración transversal de la viga, y t es la variable temporal.

Para el desarrollo analítico, se implementa la adimensionalización global de la coordenada espacial \bar{x} y de las amplitudes $\bar{V}(\bar{x})$ y $\bar{\Psi}(\bar{x})$, respecto de la longitud L de la viga.

$$x = \bar{x} / L \quad ; \quad V(x) = \bar{V}(\bar{x}) / L \quad ; \quad \Psi(x) = \bar{\Psi}(\bar{x}) \quad (5)$$

A continuación, se presenta al funcional de energía J del problema de vibraciones en vigas, en términos de las energías máximas de deformación $U_{máx}$ y cinética $T_{máx}$ (Laura, 1995):

$$J[V(x), \Psi(x)] = U_{máx} - T_{máx} \quad (6)$$

$U_{m\acute{a}x}$ para una viga AFG Timoshenko con una carga axial aplicada, puede escribirse como:

$$\begin{aligned} U_{m\acute{a}x} &= U_{m\acute{a}x(1)} + U_{m\acute{a}x(2)} \\ U_{m\acute{a}x(1)} &= \frac{1}{2L} \int_0^1 \left[E(x)I(x)(\Psi'(x))^2 + \kappa G(x)A(x)(V'(x) - \Psi(x))^2 \right] dx, \\ U_{m\acute{a}x(2)} &= \frac{PL}{2} \int_0^1 (V'(x))^2 dx. \end{aligned} \quad (7)$$

$U_{m\acute{a}x(1)}$ corresponde a la energí a propia de la viga y $U_{m\acute{a}x(2)}$ a la que introduce la carga axial aplicada, ambos t érminos escritos en su forma adimensionalizada. κ es el factor de correcci ón de corte y el cual se adopta $\kappa = 5/6$ para la viga de secci ón transversal rectangular y maciza. (') representa a la derivada respecto a variable espacial x . P es la magnitud de la carga axial aplicada, positiva cuando es de tracci ón.

Por su parte, $T_{m\acute{a}x}$ en su forma adimensionalizada e independizada del tiempo es:

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{\omega^2 L}{2} \int_0^1 \rho(x) \left[A(x)(V(x))^2 L^2 + I(x)(\Psi(x))^2 \right] dx. \quad (8)$$

Posteriormente, para aplicar el m étodo de Rayleigh-Ritz, es necesario aproximar a las componentes espaciales de la soluci ón de la siguiente forma:

$$V(x) \cong V_a(x) = \sum_{i=1}^N C_i p_i(x); \quad \Psi(x) \cong \Psi_a(x) = \sum_{j=1}^N D_j q_j(x) \quad (9)$$

siendo N el n úmero de t érminos a sumar; C_i y D_j las constantes arbitrarias que multiplican a las $p_i(x)$ y $q_j(x)$ funciones aproximantes, respectivamente. Para las vigas simplemente apoyada (A-A), empotrada-apoyada (E-A) y biempotrada (E-E), se adoptan los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} \text{A-A: } & p_i(x) = (x-1)x^i; \quad q_j(x) = x^{j-1}, \\ \text{E-A: } & p_i(x) = (x-1)x^i; \quad q_j(x) = x^j, \\ \text{E-E: } & p_i(x) = (x-1)x^i; \quad q_j(x) = (x-1)x^i. \end{aligned} \quad (10)$$

Seguidamente, asumiendo en la Ec. (7) una carga axial de compresi ón, y considerando las Ecs. (2-8), puede reescribirse al funcional de energí a J (Ec. (6)) como:

$$\begin{aligned} (2L/E_0I_0)J[V_a, \Psi_a] &= \int_0^1 f_E f_I (\Psi_a')^2 dx + S^2 \xi^{-1} \int_0^1 f_E f_A (V_a' - \Psi_a)^2 dx - \\ & - \bar{P} \int_0^1 (V_a')^2 dx - \Omega^2 \int_0^1 [f_\rho f_A V_a^2 + f_\rho f_I S^{-2} \Psi_a^2] dx \end{aligned} \quad (11)$$

donde $\xi = 2(1 + \mu) / \kappa$, $\Omega = \omega L^2 \sqrt{(\rho_0 A_0) / (E_0 I_0)}$ los coeficientes de frecuencia naturales, $S = L \sqrt{A_0 / I_0}$ el coeficiente de esbeltez, y $\bar{P} = (PL^2) / (E_0 I_0)$ el coeficiente de carga axial.

Posteriormente, el funcional J es minimizado respecto de cada constante arbitraria:

$$\partial J[V_a, \Psi_a] / \partial C_j = 0, \quad \partial J[V_a, \Psi_a] / \partial D_j = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

generando el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que en su forma matricial simb ólica es:

$$\mathbf{R} \{C_i, D_j\}^T = \{0\} \quad \text{con } \mathbf{R} = \mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}. \quad (13)$$

\mathbf{K} es la matriz de rigidez, y la cual est á compuesta por los elementos k_{ij} :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} S^2 \xi^{-1} \int_0^1 f_E f_A p_i' p_i' dx - \bar{P} \int_0^1 p_i' p_i' dx & -S^2 \xi^{-1} \int_0^1 f_E f_A p_i' q_j dx \\ -S^2 \xi^{-1} \int_0^1 f_E f_A q_j p_i' dx & \int_0^1 f_E f_I q_j' q_j' dx + S^2 \xi^{-1} \int_0^1 f_E f_A q_j q_j dx \end{bmatrix} \quad (14)$$

y \mathbf{M} es la matriz de masa, constituida por los correspondientes elementos m_{ij} :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \int_0^1 (f_\rho f_A p_i p_i) dx & 0 \\ 0 & S^{-2} \int_0^1 (f_\rho f_I q_j q_j) dx \end{bmatrix} \quad (15)$$

Para resolver el problema de autovalores basta cumplir con la condición de no-trivialidad, es decir, igualar el determinante de \mathbf{R} (Ec. (13)) a cero. Por lo tanto, se puede escribir:

$$|\mathbf{KM}^{-1} - \Omega^2 \mathbf{I}| = |\mathbf{B} - \beta \mathbf{I}| = 0 \quad (16)$$

con $\beta = \Omega^2$ como los autovalores de la matriz \mathbf{B} e \mathbf{I} la matriz identidad. De esta manera se determinan los coeficientes de frecuencia de la viga en presencia de una carga axial.

Según una conocida expresión (Ec. (17)), se puede relacionar el efecto de una carga P de compresión con las vibraciones transversales de una viga (Hearmon, 1956):

$$(\omega / \omega_0)^2 = 1 - (P / P_{cr}) \quad (17)$$

donde ω es la frecuencia natural bajo una carga de compresión P , ω_0 es la frecuencia natural cuando $P=0$ y P_{cr} es la carga crítica de pandeo. De la Ec. (17) se deduce que $(\omega / \omega_0)^2 = 0$ cuando $P = P_{cr}$. Por lo tanto, si se quieren obtener los coeficientes de carga crítica de pandeo, el problema se reduce a resolver el determinante de la Ec. (14) igualado a cero. Los autovalores obtenidos son:

$$\bar{P}_{cr} = (P_{cr} L^2) / (E_0 J_0) \quad (18)$$

Si bien la solución al problema brinda más de un coeficiente de carga de pandeo, se informa el primero, es decir el más bajo, ya que es el único que tiene significado práctico.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1 Casos de comparación

Se considera el caso de la viga AFG simplemente apoyada de sección transversal ahusada, propuesto por Shahba et al. (2011). Además, se consideran las soluciones obtenidas por Rajasekaran (2012), Huang et al. (2016), Soltani (2017) y Soltani et al. (2019). El material que constituye a la viga se compone de zirconia (ZrO_2) y aluminio (Al), cuyas propiedades son:

$$E_{\text{ZrO}_2} = 200\text{GPa}, \rho_{\text{ZrO}_2} = 5700\text{kg/m}^3; E_{\text{Al}} = 70\text{GPa}, \rho_{\text{Al}} = 2702\text{kg/m}^3; \mu_{\text{ZrO}_2} = \mu_{\text{Al}} = 0,3 \quad (19)$$

y las cuales varían de acuerdo con la siguiente ley axial asimétrica:

$$R(x) = R_{\text{ZrO}_2} + (R_{\text{Al}} - R_{\text{ZrO}_2}) x^n \quad \text{con } n = 2 \text{ y } x \in [0,1]. \quad (20)$$

El exponente n es el parámetro de heterogeneidad del material. Respecto a la geometría, consideraron un coeficiente de esbeltez $S = 10$ y dos variaciones para la sección transversal:

Caso A: ancho b constante y altura h variando linealmente. La ley de variación adoptada es:

$$A(x) = A_0 (1 - \alpha x); I(x) = I_0 (1 - \alpha x)^3 \quad \text{con } 0 \leq \alpha < 1 \text{ y } x \in [0,1]; \quad (21)$$

donde α es el coeficiente que indica la relación de estrechamiento.

Caso B: ancho b y altura h variando linealmente. La ley de variación adoptada es:

$$A(x) = A_0 (1 - \alpha x)^2; I(x) = I_0 (1 - \alpha x)^4 \quad \text{con } 0 \leq \alpha < 1 \text{ y } x \in [0,1]; \quad (22)$$

En la [Tabla 1](#) se contrastan los primeros tres coeficientes de frecuencia, y el primer coeficiente adimensional de carga crítica. Se emplean en el cálculo $N=13$ términos de

polinomios, en ambos casos. Se aprecia una buena correlación con los resultados comparados.

α	CASO A				CASO B				Solución
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	\bar{P}_{cr}	Ω_1	Ω_2	Ω_3	\bar{P}_{cr}	
0,2	7,2921	23,135	41,120	4,0176	7,2245	23,140	41,124	3,4735	Shahba et al. (2011)
	~	~	~	~	7,2225	23,126	41,067	3,4698	Rajasekaran (2012)
	~	~	~	4,0137	~	~	~	3,4691	Huang et al. (2016)
	7,2923	23,115	41,009	~	7,2246	23,119	41,012	~	Soltani (2017)
	~	~	~	4,0310	~	~	~	3,4868	Soltani et al. (2019)
	7,2901	23,111	41,008	4,0137	7,2222	23,116	41,011	3,4691	M.R-Ritz
0,8	4,1244	17,236	32,975	0,5502	3,4452	17,720	33,532	0,1697	Shahba et al. (2011)
	~	~	~	~	3,4305	17,669	33,425	0,1670	Rajasekaran (2012)
	~	~	~	0,5460	~	~	~	0,1674	Huang et al. (2016)
	4,1974	17,374	33,054	~	4,1244	17,236	32,975	~	Soltani (2017)
	~	~	~	0,5629	~	~	~	0,1759	Soltani et al. (2019)
	4,1152	17,202	32,876	0,5459	3,4309	17,670	33,404	0,1670	M.R-Ritz

Tabla 1: Coeficientes Ω_i y \bar{P}_{cr} para vigas AFG ahusadas SA-SA.

5.2 Casos propuestos

Se emplea el material propuesto por Su et al. (2013), el cual está constituido por acero (Ac) y alúmina (Al₂O₃), y cuyas propiedades son:

$$E_{Ac}=210\text{GPa}, \rho_{Ac}=7800\text{kg/m}^3; E_{Alum}=390\text{GPa}, \rho_{Alum}=3960\text{kg/m}^3, \mu_{Ac}=\mu_{Alum}=0,3. \quad (23)$$

Para el estudio se considera la composición Ac-Alum-Ac por ser más eficiente frente a la composición Alum-Ac-Alum, desde el punto de vista de la rigidización dinámica (Gilardi, 2019), en vigas que poseen restringido el desplazamiento transversal en sus extremos.

Las propiedades del material varían según las siguientes leyes de variación axial simétricas de la Ec. (24). En $x=0$ y $x=1$ la sección transversal es constituida por el acero, mientras que en $x=0.5$ lo es por la alúmina, en todos los casos, tal como se aprecia en la Figura 2.

$$\begin{aligned} \text{AFG1} : R(x) &= R_{Alum} + 2(R_{Ac} - R_{Alum})|(1/2) - x| \quad \text{con } 0 \leq x \leq 1 \\ \text{AFG2} : \begin{cases} R(x) = R_{Ac} + 4(R_{Alum} - R_{Ac})x^2 & \text{con } 0 \leq x \leq 1/2 \\ R(x) = R_{Ac} + 4(R_{Alum} - R_{Ac})(1-x)^2 & \text{con } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \text{AFG3} : R(x) &= R_{Ac} + 4(R_{Alum} - R_{Ac})(x - x^2) \quad \text{con } 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (24)$$

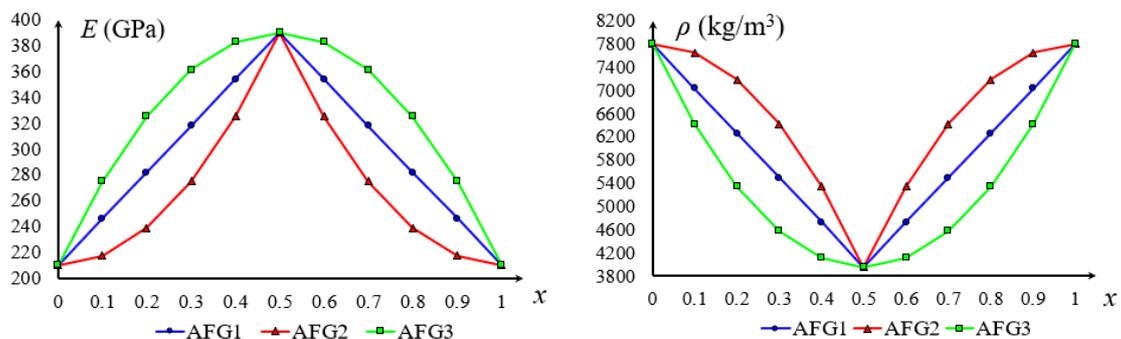


Figura 2: Distribución de las propiedades de los diferentes materiales FG.

En cuanto a la geometría se analizan los casos A y B, (Ecs. (21) y (22)), respectivamente.

En todos los casos se emplean en el cálculo $N=13$ términos, para la determinación de los coeficientes de carga crítica y $N=20$ términos, para los coeficientes de frecuencia. Los resultados están dados con referencia a una viga homogénea de acero.

C.B.	Material	$L/h = S/\sqrt{12}$							Wang et al. (2005)
		5	10	25	50	100	250	500	
A-A	Acero	8,9509	9,6227	9,8292	9,8595	9,8671	9,8692	9,8696	9,8696
	AFG 1	13,744	15,075	15,495	15,557	15,572	15,576	15,577	~
	AFG 2	10,737	11,669	11,960	12,003	12,014	12,017	12,017	~
	AFG 3	15,090	16,544	17,001	17,069	17,086	17,090	17,091	~
E-A	Acero	16,406	19,089	20,006	20,144	20,179	20,189	20,191	20,190
	AFG 1	23,255	27,303	28,691	28,901	28,954	28,969	28,971	~
	AFG 2	18,791	21,955	23,038	23,201	23,242	23,254	23,256	~
	AFG 3	25,516	29,935	31,447	31,675	31,733	31,749	31,752	~
E-E	Acero	27,987	35,803	38,841	39,317	39,438	39,477	39,477	39,478
	AFG 1	38,809	49,811	54,073	54,742	54,911	54,959	54,966	~
	AFG 2	31,873	41,134	44,768	45,340	45,485	45,526	45,532	~
	AFG 3	42,193	53,549	57,881	58,556	58,727	58,775	58,782	~

Tabla 2: Coeficientes de carga crítica \bar{P}_{cr} para vigas de sección constante y esbeltez variable.

En la [Tabla 2](#) se presenta el coeficiente de carga crítica para las vigas de sección constante y para distintas condiciones de borde (C.B.). Los valores de [Wang et al. \(2005\)](#), corresponden a la solución exacta de vigas homogéneas modeladas con la teoría de Euler-Bernoulli.

Determinado el coeficiente de carga crítica, para diferentes esbelteces, en las [Tablas 3 y 4](#) se presentan los primeros tres coeficientes de frecuencias, con cargas de tracción y compresión proporcionales a esta, para la viga homogénea y con material AFG3, y para $L/h=5$. Queda claro que cuando $\bar{P} = \bar{P}_{cr}$ la relación es 1 y no -1. Es por eso que se utiliza $|\bar{P}_{cr}|$ para indicar que las relaciones negativas son para las cargas de compresión y las positivas para las cargas de tracción.

CB	A-A			E-A			E-E		
	$\bar{P}/ \bar{P}_{cr} $	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_1	Ω_2
-1	0	26,5357	55,2108	0	27,1612	53,8898	0	24,2247	48,9371
-0,75	4,63714	28,0502	56,8384	6,83193	29,8901	56,9295	9,31362	29,4798	54,5334
-0,50	6,55785	29,4866	58,4198	9,59867	32,3894	59,8138	12,9844	33,8741	59,6127
-0,25	8,03163	30,8558	59,9586	11,6914	34,7072	62,5636	15,7253	37,6678	64,2908
0	9,27404	32,1665	61,4581	13,4367	36,8774	65,1955	17,9947	41,1899	68,6465
0,25	10,3686	33,4255	62,9209	14,9617	38,9243	67,7231	19,9695	44,3679	72,7361
0,50	11,3581	34,6384	64,3497	16,3314	40,8665	70,1575	21,7394	47,3192	76,6013
0,75	12,2681	35,8100	65,7466	17,5845	42,7182	72,5079	23,3568	50,0862	80,2739
1	13,1150	36,9441	67,1136	18,7460	44,4908	74,7821	24,8554	52,6948	83,7786

Tabla 3: Coeficientes de frecuencia para la viga homogénea (acero) y de sección constante, $L/h=5$.

Cabe aclarar que las cargas de tracción no tienen por qué limitarse a la relación 1. Se indica hasta ese valor para darle simetría a las [Tablas 3, 4, 7 y 8](#).

CB	A-A			E-A			E-E		
	$\bar{P}/ \bar{P}_{cr} $	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_1	Ω_2
-1	0	39,8131	82,4478	0	40,5945	79,1174	0	35,6912	69,9522
-0,75	7,92213	42,4211	85,2632	11,0421	44,8746	83,9982	14,5743	43,5921	78,7470
-0,50	11,2033	44,8763	87,9854	15,5211	48,7862	88,6115	20,3528	50,2385	86,6972
-0,25	13,7209	47,2028	90,6229	18,9139	52,4093	92,9956	24,6932	56,0863	93,9965
0	15,8432	49,4188	93,1830	21,7474	55,7984	97,1807	28,3059	61,3684	100,776
0,25	17,7128	51,5384	95,6720	24,2264	58,9932	101,191	31,4634	66,2229	107,129
0,50	19,4030	53,5733	98,0954	26,4558	62,0232	105,045	34,3033	70,7393	113,124
0,75	20,9571	55,5327	100,458	28,4976	64,9111	108,760	36,9061	74,9797	118,813
1	22,4036	57,4244	102,764	30,3920	67,6750	112,349	39,3232	78,9891	124,236

Tabla 4: Coeficientes de frecuencia para la viga AFG3 de sección constante, $L/h=5$.

Caso	C.B.	A-A			E-A			E-E			
		L/h	5	10	50	5	10	50	5	10	50
A	α	0,3	5,4368	5,7340	5,8361	10,200	11,440	11,903	18,009	21,702	23,223
		0,5	3,4293	3,5761	3,6257	6,5098	7,1289	7,3526	11,750	13,599	14,317
		0,7	1,7449	1,8012	1,8200	3,5504	3,5504	3,6310	6,1100	6,7868	7,0342
B	α	0,3	4,4884	4,7444	4,8324	8,4192	9,4789	9,8762	14,864	17,996	19,287
		0,5	2,3129	2,4271	2,4658	4,4023	4,8702	5,0404	7,9408	9,3124	9,8461
		0,7	0,8373	0,8750	0,8877	1,6160	1,7630	1,8149	2,9742	3,3924	3,5464

Tabla 5: Coeficientes de carga crítica para las vigas homogéneas (acero) y de sección ahusada.

Caso	C.B.	A-A			E-A			E-E			
		L/h	5	10	50	5	10	50	5	10	50
A	α	0,3	9,1605	9,8100	10,037	15,596	17,624	18,382	26,920	32,287	34,463
		0,5	5,6912	6,0134	6,1236	9,7265	10,735	11,099	17,292	20,006	21,045
		0,7	2,7728	2,8945	2,9354	4,7586	5,1304	5,2602	8,7168	9,7283	10,094
B	α	0,3	7,5093	8,0738	8,2709	12,723	14,483	15,143	22,062	26,680	28,547
		0,5	3,7534	4,0079	4,0953	6,4165	7,2021	7,4875	11,460	13,548	14,345
		0,7	1,2651	1,3456	1,3729	2,2282	2,4729	2,5597	4,0885	4,7466	4,9861

Tabla 6: Coeficientes de carga crítica para las vigas AFG3 y de sección ahusada.

En la **Tablas 5 y 6** se presenta el coeficiente \bar{P}_{cr} para vigas de sección ahusada (caso A y B), con $\alpha=0,3; 0,5; 0,8$; para distintas C.B. y relaciones de esbeltez de $L/h=5, 10, 50$. Nótese que los coeficientes \bar{P}_{cr} incrementan su valor con el aumento de la esbeltez. Esto es debido a la forma de adimensionalización adoptada para la carga axial. Obteniendo las cargas P_{cr} a partir de esos coeficientes, se observará cómo éstas descienden conforme aumenta la esbeltez.

Seguidamente, se exponen en las **Tablas 7 y 8** los primeros tres coeficientes de frecuencias, considerando la presencia de cargas de tracción y compresión proporcionales a la carga crítica de una viga ahusada con $\alpha = 0,5$ (Caso A) y con relación de esbeltez $L/h=5$.

6 CONCLUSIONES

Para las condiciones de borde expuestas, el material AFG3 es el que maximiza la carga

axial de compresión. El mayor contenido porcentual de alúmina a lo largo de la viga, hace que la viga sea más rígida y más liviana frente a las demás. Es por eso que en los cálculos posteriores a la [Tabla 2](#) se emplea el material AFG3 para la composición de la viga.

Para $L/h \geq 500$, los \bar{P}_{cr} coincidan con los que predice la teoría de Euler-Bernoulli.

Respecto a los coeficientes de frecuencia bajo carga axial, se aprecia que disminuyen en presencia de una carga de compresión, ya que disminuye la energía de deformación, y que $\Omega_1 = 0$ cuando $\bar{P} = \bar{P}_{cr}$. Contrariamente, bajo una carga de tracción todos aumentan, ya que se incrementa la energía de deformación.

El incremento de los coeficientes de frecuencia y de carga crítica, debido a la introducción del material AFG3, es mayor en las vigas ahusadas que en las vigas de sección constante.

C.B.	A-A			E-A			E-E		
	$\bar{P}/ \bar{P}_{cr} $	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_1	Ω_2
-1	0	21,5557	47,0432	0	23,3253	47,9191	0	22,5223	46,5120
-0,75	3,45948	22,6395	48,1397	5,90424	25,3943	50,0153	7,49111	26,2298	50,2891
-0,50	4,87891	23,6685	49,2086	8,20170	27,2923	52,0157	10,4125	29,3942	53,0284
-0,25	5,96100	24,6498	50,2516	9,89455	29,0500	53,9311	12,5749	32,2116	57,0045
0	6,86853	25,5891	51,2578	11,2786	30,6910	55,7706	14,3514	34,7539	60,0430
0,25	7,66476	26,4912	52,2668	12,4694	32,2335	57,5420	15,8868	37,0912	62,9143
0,50	8,38216	27,3599	53,2419	13,5259	33,6919	59,2518	17,2547	39,2651	65,6428
0,75	9,04003	28,1986	54,1969	14,4829	35,0776	60,9057	18,4982	41,3051	68,2476
1	9,65093	29,0101	55,1330	15,3628	36,3999	62,5086	19,6452	43,2330	70,7438

Tabla 7: Coeficientes de frecuencia para la viga homogénea (acero) y de sección constante, $L/h=5$ y $\alpha=0,5$.

C.B.	A-A			E-A			E-E		
	$\bar{P}/ \bar{P}_{cr} $	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_1	Ω_2
-1	0	32,6850	70,8246	0	35,6925	71,4381	0	34,3280	68,4495
-0,75	5,93721	34,5277	72,6958	9,42660	38,7877	74,6206	11,8044	39,7649	74,1577
-0,50	8,36447	36,2660	74,5118	13,1011	41,6229	77,6521	16,4109	44,4266	79,3989
-0,25	10,2105	37,9149	76,2770	15,8104	44,2465	80,5506	19,8223	48,5621	84,2684
0	11,7560	39,4859	77,9952	18,0259	46,6953	83,3311	22,6268	52,3130	87,0556
0,25	13,1101	40,9887	79,6697	19,9320	48,9971	86,0063	25,0522	55,7684	93,1465
0,50	14,3289	42,4310	81,3038	21,6229	51,1740	88,5869	27,2147	58,9883	97,2430
0,75	15,4456	43,8193	82,8999	23,1544	53,2430	91,0819	29,1823	62,0150	101,153
1	16,4818	45,1591	84,4606	24,5621	55,2183	93,4990	30,9985	64,8799	104,901

Tabla 8: Coeficientes de frecuencia para la viga AFG y de sección ahusada, $L/h=5$ y $\alpha = 0,5$.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el patrocinio del presente trabajo a la Universidad Nacional del Sur (UNS), al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y a la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC). El mismo se llevó a cabo en el Departamento de Ingeniería y en el Instituto de Ingeniería de la UNS.

REFERENCIAS

- Elishakoff, I., A selective review of direct, semi-inverse and inverse eigenvalue problems for structures described by differential equations with variable coefficients. *Arch. Comput. Methods Eng.*, 7(4), 387–461, 2000.
- Gilardi, G.J., Vibraciones de vigas constituidas por materiales funcionalmente graduados. Tesis Doctoral, 2019. <http://repositoriodigital.uns.edu.ar/handle/123456789/4496>.
- Hearmon, R.F.S., The frequency of vibration and the elastic stability of a fixed-free strip. *Br. J. Appl. Phys.*, 7(11): 405–407, 1956.
- Huang, Y., Zhang, M. y Rong, H., Buckling Analysis of AFG and Non-Uniform Beams Based on Timoshenko Theory. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 29(2):201–207, 2016.
- Ilanko, S., Monterrubio, L.E. y Mochida, Y., *The Rayleigh-Ritz Method for Structural Analysis*. Wiley & Sons, 2014.
- Kang, F. y Zhong-Ci, S., *Mathematical Theory of Elastic Structures*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.
- Lepik, Ü. y Hein, H., *Haar Wavelets with Applications*. Springer, 2014.
- Laura, P.A.A., Optimization of Variational Methods. *Ocean Eng.*, 22(3):235–250, 1995.
- Rajasekaran, S., Buckling and vibration of axially functionally graded non-uniform beams using differential transformation based dynamic stiffness approach. *Meccanica*, 48:1053–1070, 2013.
- Shahba, A., Attarnejad, R., Marvi, M.T. y Hajilar, S., Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Composites: Part B*, 42:801–808, 2011.
- Soltani, M., Vibration characteristics of axially loaded tapered Timoshenko beams made of functionally graded materials by the power series method. *Numerical Methods in Civil Engineering*, 2(1):1–14, 2017.
- Soltani, M. y Asgarian, B., Finite Element Formulation for Linear Stability Analysis of Axially Functionally Graded Non-prismatic Timoshenko Beam. *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, 19(2):1–33, 2018.
- Soltani, M., Asgarian, B. y Jafarzadeh F., Finite difference method for buckling analysis of tapered Timoshenko beam made of functionally graded material. *J. Civ. Eng.*, 1–22, 2019.
- Su, H., Banerjee, J.R. y Cheung, C.W., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*, 106:854–862, 2013.
- Wang, C.M., Wang, C. Y. y Reddy, J. N., *Exact Solutions for Buckling of Structural Member*. CRC Press, 2005.