

ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS ALGORITMOS HLRF E iHLRF NO CÁLCULO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

PERFORMANCE ANALYSIS OF THE HLRF AND iHLRF ALGORITHMS IN THE CALCULATION OF THE RELIABILITY INDEX OF REINFORCED CONCRETE BEAMS

Rubens S. Correia^a, Giuliana F. F. Bono^a, Charlei M. Paliga^b e Gustavo Bono^a

^aLaboratório de Engenharia Computacional (LECOM), Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Rodovia BR 104, KM 59, s/n, Nova Caruaru, Caruaru-PE, Brasil, rubens.correia@ufpe.br, giuliana.franca@ufpe.br, gustavo.bono@ufpe.br, <https://www.ufpe.br/ppgecam>

^bDepartamento de Tecnologia da Construção, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade Federal de Pelotas (UFPel), Rua Benjamin Constant, 1359, Pelotas-RS, Brasil, charlei.paliga@ufpel.edu.br

Palavras-chave: algoritmo HLRF, algoritmo iHLRF, vigas, concreto armado, confiabilidade estrutural.

Resumo. Na avaliação da confiabilidade estrutural de vigas de concreto armado, a confiabilidade é quantificada através do índice de confiabilidade, que pode ser determinado através de métodos probabilísticos. Dentre os métodos mais usuais está o de primeira ordem (FORM). Nesse método, é comum utilizar o algoritmo de Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiessler (HLRF). Existe também o algoritmo iHLRF, que apresenta melhorias em relação ao HLRF original. Nesta pesquisa foi analisado o desempenho dos algoritmos HLRF e iHLRF no cálculo do índice de confiabilidade de vigas de concreto armado, dimensionadas conforme a NBR 6118. Foi verificado que ambos os algoritmos conseguem encontrar o índice de confiabilidade da viga e não apresentam problemas de convergência. Porém, o tempo de execução do iHLRF é maior, já que o número de avaliações da equação de estado-limite é maior que o do HLRF.

Keywords: HLRF algorithm, iHLRF algorithm, beams, reinforced concrete, structural reliability.

Abstract. In the evaluation of the structural reliability of reinforced concrete beams, the reliability is quantified through the reliability index, which can be determined through probabilistic methods. Among the most common methods is the first order (FORM). In this method, it is common to use the Hasofer, Lind, Rackwitz and Fiessler (HLRF) algorithm. There is also the iHLRF algorithm, which has improvements over the original HLRF. This research analyzed the performance of the HLRF and iHLRF algorithms in calculating the reliability index of reinforced concrete beams, dimensioned according to NBR 6118. It was found that both algorithms are able to find the beam reliability index and not present convergence problems. However, the execution time of the iHLRF is longer, since the number of evaluations of the limit state equation is greater than that of the HLRF.

1 INTRODUÇÃO

Na abordagem estocástica, a confiabilidade estrutural é quantificada através do índice de confiabilidade. Nessa avaliação são utilizadas as equações de estado-limite que indicam a margem de segurança entre a resistência e a solicitação. Como existem incertezas associadas aos modelos de análise, solicitações e propriedades dos materiais (Melchers e Beck, 2018), existe uma probabilidade de falha em relação aos estados-limites quando a solicitação é maior que a resistência, que pode ser relacionada ao índice de confiabilidade.

O índice de confiabilidade pode ser determinado através de métodos probabilísticos. Dentre os métodos usuais estão os de primeira ordem (FORM), segunda ordem (SORM) e de amostragem (Monte Carlo, amostragem por importância, entre outros). Cada método exige um esforço computacional diferente (Choi, Grandhi e Canfield, 2007).

Os métodos de primeira e segunda ordem utilizam diferentes abordagens para aproximar a equação de estado-limite. No FORM, a equação de estado-limite é aproximada por uma função linear e toda a informação estatística das variáveis aleatórias é utilizada. Já no SORM, a equação de estado-limite é aproximada por uma função quadrática.

Um dos algoritmos mais utilizados no FORM é o de Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiessler, conhecido como algoritmo HLRF (Hasofer e Lind, 1974; Rackwitz e Fiessler, 1978). É um algoritmo muito popular devido a sua simplicidade, porém, uma desvantagem é não ter a garantia de convergência (Beck, 2019). Zhang e Der Kiureghian (1995) propuseram uma melhoria no HLRF, sendo o algoritmo melhorado chamado de iHLRF (*improved HLRF*), onde o passo do algoritmo é ajustado de modo que a convergência é assegurada.

Frequentemente, o FORM é utilizado na avaliação da confiabilidade de vigas de concreto armado projetadas conforme a NBR 6118 (ABNT, 2014), como verificado em Santos, Stucchi e Beck (2014), Nogueira e Pinto (2016), Scherer (2018) e Correia (2020).

Assim, nesse contexto, nesta pesquisa foi analisado o desempenho dos algoritmos HLRF e iHLRF no cálculo do índice de confiabilidade de vigas de concreto armado, dimensionadas conforme a NBR 6118 (ABNT, 2014).

2 ALGORITMOS HLRF E iHLRF

Na abordagem dos algoritmos HLRF e iHLRF, bem como de outros métodos, o cálculo do índice de confiabilidade é na verdade a resolução de um problema de otimização.

Na Figura 1 é apresentada uma visualização do problema de otimização para encontrar o índice de confiabilidade. É considerado um estado-limite $g(X)$, em função das variáveis aleatórias normalmente distribuídas X , onde $g(X) < 0$ indica o domínio de falha. As variáveis aleatórias X podem ser transformadas em variáveis gaussianas padronizadas U , resultando no espaço normal padrão mostrado na figura, onde o centro da função de distribuição de probabilidade $f_U(\mathbf{u})$ coincide com a origem. Devido à simetria rotacional de $f_U(\mathbf{u})$ no espaço U , o ponto da superfície do estado-limite $g(U) = 0$ que possui o maior valor de densidade de probabilidade (máxima *Probability Density Function* - PDF) é o ponto de menor distância entre a origem e a superfície de falha. Esse é o ponto de falha mais provável (*Most Probable Point* - MPP), já que é o ponto da superfície de falha com maior probabilidade de ocorrência. Dessa forma, o índice de confiabilidade é a distância da origem até o MPP na superfície de falha. Essa é a menor distância entre a origem e $g(U) = 0$.

Assim, o cálculo do índice de confiabilidade pode ser colocado como o seguinte problema de otimização restrita no espaço normal padrão:

$$\begin{aligned} \text{determine: } & U \text{ que minimiza } \beta(U) = \|U\| \\ \text{sujeito a: } & g(U) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

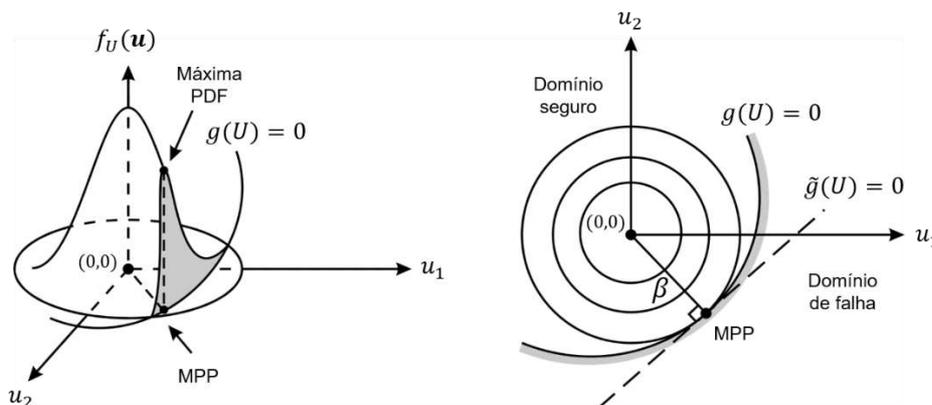


Figura 1: Problema de otimização do índice de confiabilidade. Fonte: adaptado de [Choi, Grandhi e Canfield \(2007\)](#).

A abordagem anterior considera que as variáveis aleatórias são normalmente distribuídas, o que possibilita a transformação para o espaço normal padrão. Nas situações onde existem variáveis aleatórias com distribuição não-normal, é necessário determinar uma distribuição normal equivalente para essas variáveis. Isso pode ser feito de maneira simples através da aproximação de “cauda normal” (*normal tail approximation*) ([Choi, Grandhi e Canfield, 2007](#)).

2.1 Algoritmo HLRF

Para encontrar o índice de confiabilidade através da resolução do problema de otimização da Eq. (1), o algoritmo HLRF pode ser dado pelos seguintes passos:

1. Escolha um ponto inicial U_0 para $k = 0$.
2. Calcule $g(U_k)$ e $\nabla g(U_k)$.
3. Calcule a direção de busca \mathbf{d}_k :

$$\mathbf{d}_k = \frac{\nabla g(U_k)^t U_k - g(U_k)}{\|\nabla g(U_k)\|^2} \nabla g(U_k) - U_k \quad (2)$$

4. Atualize o ponto U , sendo o passo $\lambda_k = 1$:

$$U_{k+1} = U_k + \lambda_k \mathbf{d}_k \quad (3)$$

5. Verifique os critérios de parada. Se os critérios forem satisfeitos, pare. Caso contrário, incremente $k = k + 1$ e retorne para o passo 2.

O índice de confiabilidade será igual a $\beta = \|U^*\|$, sendo U^* o MPP obtido pelo HLRF. Ressalta-se que, geralmente, a formulação do HLRF é dada em termos do índice de confiabilidade e dos cossenos diretores, como observado em [Choi, Grandhi e Canfield \(2007\)](#), [Melchers e Beck \(2018\)](#) e [Beck \(2019\)](#). Os passos apresentados anteriormente foram dados em função da direção de busca para facilitar a comparação com o iHLRF, apresentado na próxima seção.

Uma das desvantagens do HLRF, como introduzido anteriormente, é não garantir a convergência ([Beck, 2019](#)).

2.2 Algoritmo iHLRF

O algoritmo iHLRF, proposto por [Zhang e Der Kiureghian \(1995\)](#), apresenta melhorias em relação ao HLRF original. No iHLRF, o passo λ_k da Eq. (3) é ajustado em cada iteração, de modo que a convergência é assegurada. O passo λ_k é determinado através da resolução de um problema de otimização para minimizar uma função mérito $m(U)$.

Para encontrar o índice de confiabilidade através da resolução do problema de otimização da Eq. (1), o iHLRF pode ser dado pelos seguintes passos ([Beck, 2019](#)):

1. Escolha um ponto inicial U_0 para $k = 0$.
2. Calcule $g(U_k)$ e $\nabla g(U_k)$.
3. Verifique a condição de otimalidade. Se a condição é satisfeita, pare. Caso contrário, prossiga.
4. Calcule a direção de busca \mathbf{d}_k :

$$\mathbf{d}_k = \frac{\nabla g(U_k)^t U_k - g(U_k)}{\|\nabla g(U_k)\|^2} \nabla g(U_k) - U_k \quad (4)$$

5. Determine o fator de penalidade c_k da função mérito.
Se $|g(U_k)| \geq \delta$, sendo δ a tolerância:

$$c_k = \gamma \max \left[\frac{\|U_k\|}{\|\nabla g(U_k)\|}, \frac{1}{2} \frac{\|U_k + \mathbf{d}_k\|^2}{|g(U_k)|} \right] \quad (5)$$

Caso contrário:

$$c_k = \gamma \frac{\|U_k\|}{\|\nabla g(U_k)\|} \quad (6)$$

onde γ é um parâmetro para atender a condição de convergência ($\gamma > 1$).

6. Calcule o passo λ_k :

$$\lambda_k = \arg \min [m(U_k + \lambda \mathbf{d}_k)] \quad (7)$$

7. Atualize o ponto U :

$$U_{k+1} = U_k + \lambda_k \mathbf{d}_k \quad (8)$$

8. Incremente $k = k + 1$ e retorne para o passo 2.

O índice de confiabilidade será igual a $\beta = \|U^*\|$, sendo U^* o MPP obtido pelo iHLRF.

Conforme [Zhang e Der Kiureghian \(1995\)](#), uma função mérito simples pode ser escrita como:

$$m(U) = \frac{1}{2} \|U\|^2 + c|g(U)| \quad (9)$$

O cálculo do passo λ_k , na Eq. (7), pode ser feito de forma aproximada pela regra de Armijo ([Zhang e Der Kiureghian, 1995](#)):

$$\lambda_k = \max_{n \in \mathbb{N}} [b^n | m(U_k + b^n \mathbf{d}_k) - m(U_k) \leq -ab^n \nabla m(U_k)^t \mathbf{d}_k], \quad a, b \in (0,1) \quad (10)$$

Conforme [Santos, Matioli e Beck \(2012\)](#), uma desvantagem do iHLRF é o fato de a função mérito (Eq. (9)) ser não diferenciável.

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONFIABILIDADE DA VIGA

A viga de concreto armado considerada é apresentada na [Figura 2](#), sujeita a um carregamento total de 20 kN/m, formado por carga permanente e variável. A viga tem seção transversal retangular ($b \times h$) de 12x45 cm e vão (L) de 4 m. O dimensionamento da viga foi realizado conforme a NBR 6118 ([ABNT, 2014](#)), considerando uma Classe de Agressividade Ambiental igual a II, diâmetro dos estribos igual a 5 mm, resistência à compressão do concreto (f_{ck}) igual a 25 MPa e aço CA-50, resultando em 4 barras de 12,5 mm com 2 porta-estribos de 5 mm.

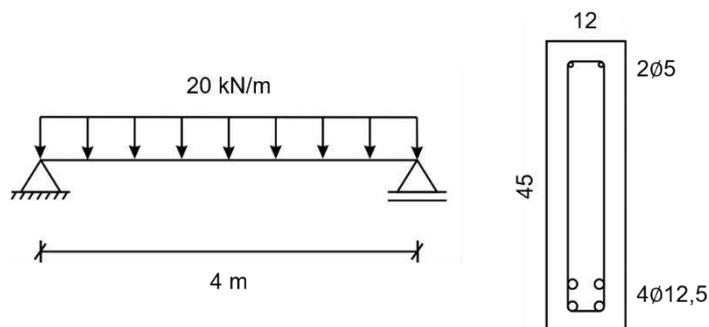


Figura 2: Viga de concreto armado considerada.

Na avaliação da confiabilidade da viga foram consideradas as seguintes variáveis aleatórias:

$$X = \{\theta_R, \theta_S, g, q, f_c, f_y\}^T \quad (11)$$

onde θ_R é o erro de modelo da resistência; θ_S é o erro de modelo da solicitação; g é a carga permanente; q é a carga variável; f_c é a resistência à compressão do concreto e f_y é a resistência ao escoamento do aço. As características estatísticas das variáveis aleatórias (distribuição de probabilidade, média e desvio-padrão) se encontram na [Tabela 1](#) e foram extraídas de [Scherer \(2018\)](#).

Variável	Distribuição	Média (μ)	Desvio-padrão (σ)
θ_R	Log-Normal	1	0,05
θ_S	Log-Normal	1	0,05
g	Normal	$1,05g$	$0,10\mu$
q	Gumbel	$\frac{q}{(1 + 0,35 \times 0,25)}$	$0,25\mu$
f_c	Normal	$\frac{f_{ck}}{(1 - 1,645 \times 0,10)}$	$0,10\mu$
f_y	Normal	$\frac{f_{yk}}{(1 - 1,645 \times 0,05)}$	$0,05\mu$

Tabela 1: Características estatísticas de X . Fonte: [Scherer \(2018\)](#).

O estado-limite último considerado é relativo à flexão, sendo calculado conforme a Eq. (12), pela diferença entre a resistência e a sollicitação. Na parcela da sollicitação, consideram-se os momentos fletores devido ao carregamento total ($g + q$) e ao peso próprio da viga ($\rho_c bh$), onde ρ_c é o peso específico do concreto armado igual a 25 kN/m³. Na Eq. (12), M é o momento resistente da seção.

$$g(X) = \theta_R M - \theta_S \left[\frac{(g + q)L^2}{8} + \frac{(\rho_c bh)L^2}{8} \right] \quad (12)$$

Portanto, o problema de confiabilidade consiste em encontrar o índice de confiabilidade da viga de concreto armado, associado a probabilidade de falha quando a resistência é menor que a sollicitação ($g(X) < 0$) na flexão, frente as incertezas de X .

O momento resistente M é calculado conforme o procedimento apresentado em Araújo (2014), baseado no modelo da NBR 6118 (ABNT, 2014) para concretos com f_{ck} menor ou igual a 50 MPa.

Supondo que a viga está no domínio 2 ou 3 (aço tracionado com escoamento), a linha neutra (x) é dada pela Eq. (13). Se x for menor ou igual ao limite x_{34} entre os domínios 3 e 4 (Eq. (14)), a viga de fato está no domínio 2 ou 3. Caso contrário, a viga está no domínio 4 (aço sem escoamento), e a linha neutra é definida pela Eq. (15).

$$x = \frac{f_y A_s}{0,68 f_c b} \quad (13)$$

$$x_{34} = \left(\frac{3,5\%}{3,5\% + \varepsilon_y} \right) d \quad (14)$$

$$x = \frac{-3,5\% E_s A_s + \sqrt{3,5\% E_s A_s (3,5\% E_s A_s + 2,72 f_c b d)}}{1,36 f_c b} \quad (15)$$

onde f_y é a resistência ao escoamento do aço; A_s é a área de aço tracionado; f_c é a resistência à compressão do concreto; b é a largura da seção; ε_y é a deformação de escoamento do aço; d é a altura útil da seção; e E_s é o módulo de elasticidade do aço.

Com a linha neutra definida, o momento resistente M para a viga é:

$$M = 0,68 f_c x b (d - 0,4x) \quad (16)$$

O problema de confiabilidade formulado, apresentado anteriormente, e os algoritmos HLRF e iHLRF foram implementados no MATLAB (versão R2016a). Em ambos os algoritmos, foi considerado a média de X como o ponto inicial e uma tolerância de 10^{-4} . No iHLRF foram adotados γ igual a 2 (Eq. (6)), a igual a 0,1 e b igual a 0,5 (Eq. (10)) (Beck, 2019).

Para avaliar o desempenho do HLRF e iHLRF em diferentes situações para a viga (Figura 2), foi variado o valor da razão entre carga variável e total ($r = \frac{q}{g+q}$) de 0,2, 0,4, 0,6 e 0,8, pois a carga variável q tem a maior contribuição na probabilidade de falha, em relação as demais variáveis aleatórias (Santos, Stucchi e Beck, 2014; Nogueira e Pinto, 2016; Scherer, 2018, Correia, 2020).

Todos os resultados foram obtidos utilizando um processador Intel(R) Core(TM) i3-2328M CPU @ 2.20GHz com 4 GB de memória RAM.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os índices de confiabilidade (β) para a viga com os diferentes valores de r , determinados com os algoritmos HLRF e iHLRF, se encontram na [Tabela 2](#). Como observado, o HLRF e iHLRF convergem para o mesmo índice de confiabilidade em todos os casos da relação r .

r	β	
	HLRF	iHLRF
0,2	6,19	6,19
0,4	4,96	4,96
0,6	4,18	4,18
0,8	3,66	3,66

Tabela 2: Índices de confiabilidade da viga obtidos com o HLRF e iHLRF.

Na [Figura 3](#) são apresentadas as iterações do HLRF e iHLRF para cada valor de r . Verifique-se que os dois algoritmos não apresentam problemas de convergência em todos os casos.

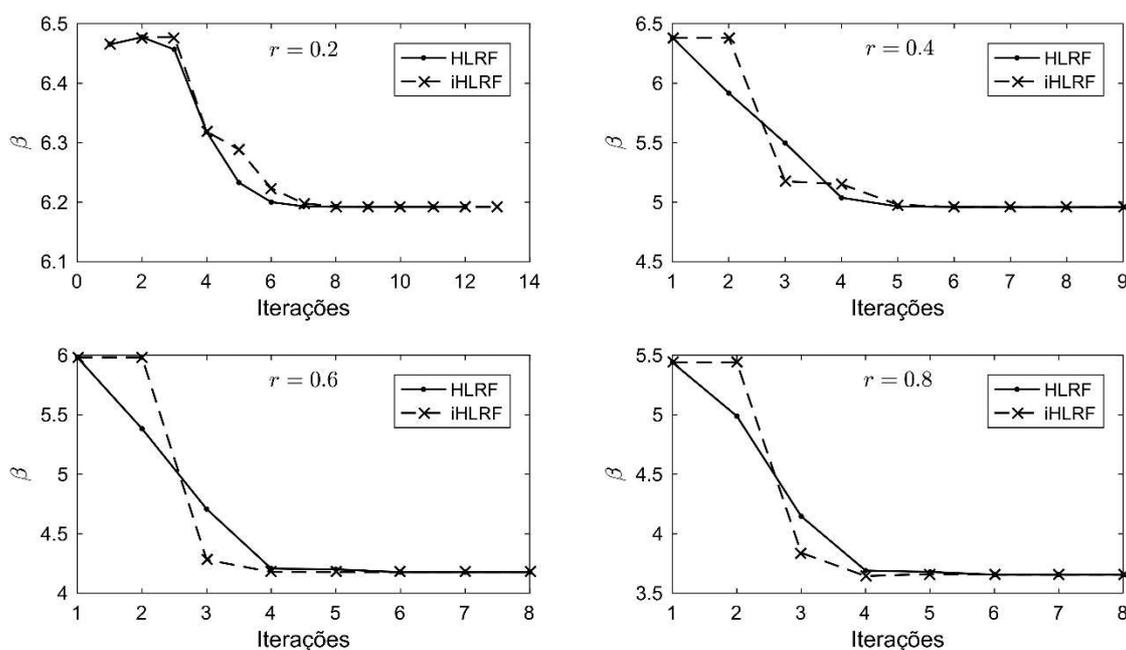


Figura 3: Iterações do HLRF e iHLRF para os diferentes valores de r .

Na [Tabela 3](#) são apresentados o número de iterações, o número de avaliações da equação de estado-limite ($\#g$), o número de avaliações do gradiente da equação de estado-limite ($\#\nabla g$) e o tempo computacional para a execução de cada algoritmo.

Em todos os casos, o número de iterações do HLRF e iHLRF foram praticamente iguais. Já o número de avaliações de $g(X)$ foi maior no iHLRF. Para r igual a 0,2, 0,4, 0,6 e 0,8, esse número foi aproximadamente 4, 6, 6 e 7 vezes maior que o número de avaliações realizadas no HLRF, respectivamente. O número de avaliações de $\nabla g(X)$ foi praticamente o mesmo nos dois algoritmos. O tempo de execução do iHLRF foi aproximadamente 2 vezes maior que o do HLRF, já que a função de estado-limite foi avaliada mais vezes.

r	Algoritmo	Iterações	# g	# ∇g	Tempo (s)
0,2	HLRF	12	13	13	0,43
	iHLRF	13	58	14	0,82
0,4	HLRF	9	10	10	0,53
	iHLRF	9	58	10	0,88
0,6	HLRF	8	9	9	0,39
	iHLRF	8	55	9	0,79
0,8	HLRF	8	9	9	0,47
	iHLRF	8	59	9	0,92

Tabela 3: Comparação do HLRF e iHLRF.

O número de avaliações de $g(X)$ foi maior no iHLRF pois, a cada iteração, o passo λ_k é calculado através da minimização (Eq. (7)) de uma função mérito (Eq. (9)). A função mérito envolve o cálculo da função de estado-limite. A resolução da Eq. (7) é feita de maneira aproximada pela regra de Armijo (Eq. (10)). Dessa forma, conforme o exposto no item 2.2, a cada iteração do iHLRF, além da avaliação de g no passo 2, também é necessário calcular g no passo 6 onde a regra de Armijo é aplicada. Na regra de Armijo, o passo λ_k obtido fica entre 0 e 1. São nas situações onde o passo λ_k é próximo de 0 em que é necessário um número maior de avaliações de g , até que a condição da Eq. (10) seja satisfeita. Isso ocorre, por exemplo, na iteração 2 para r igual a 0,4, 0,6 e 0,8 (Figura 3). Assim, um desempenho mais satisfatório do iHLRF, de modo a reduzir o número de avaliações de $g(X)$, pode ser obtido ajustando os parâmetros a e b da regra de Armijo.

5 CONCLUSÕES

A partir dos resultados obtidos, em relação ao desempenho dos algoritmos HLRF e iHLRF no cálculo do índice de confiabilidade de vigas de concreto armado, verifica-se que:

- O HLRF e o iHLRF encontram o mesmo índice de confiabilidade e não apresentam problemas de convergência. Assim, os dois algoritmos podem ser utilizados no cálculo do índice de confiabilidade de vigas de concreto armado. A convergência do iHLRF era esperada, já que o passo é ajustado em cada iteração.
- O número de iterações e de avaliações do gradiente da função de estado-limite nos dois algoritmos são praticamente os mesmos. Porém, o número de avaliações da equação de estado-limite é maior no iHLRF, resultando em um tempo de execução aproximadamente duas vezes maior do que o do HLRF. Dessa forma, caso o tempo de execução seja um critério importante na escolha do algoritmo, o HLRF poderia ser selecionado. Esse número de avaliações da equação de estado-limite pode ser reduzido ajustando os parâmetros da regra de Armijo.

Por fim, ressalta-se que as conclusões obtidas são referentes as situações analisadas, considerando as formulações apresentadas. O desempenho do HLRF e iHLRF foi avaliado para o problema de confiabilidade apresentado no item 3. Outros resultados podem ser obtidos em situações diferentes.

REFERÊNCIAS

Associação Brasileira de Normas Técnicas – Norma Brasileira. *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, NBR 6118*. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

- Araújo, J.M. *Curso de Concreto Armado*. v. 1, 4ª ed, Rio Grande: Dunas, 2014.
- Beck, A.T. *Confiabilidade e Segurança das Estruturas*. 1ª ed, Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.
- Choi, S.K.; Grandhi, R.V.; Canfield, R.A. *Reliability-based structural design*. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- Correia, R.S. *Avaliação da confiabilidade de vigas otimizadas de concreto armado*. 2020. 132 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental) – PPGECAM, Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2020.
- Hasofer, A.M.; Lind, N.C. Exact and Invariant Second-Moment Code Format. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 100, n. 1, p. 111-121, 1974.
- Melchers, R.E.; Beck, A.T. *Structural reliability analysis and prediction*. 3ª ed, Hoboken: Wiley, 2018.
- Nogueira, C.G.; Pinto, M.D.T. Avaliação da variabilidade da segurança de vigas em concreto armado submetidas ao momento fletor considerando os coeficientes parciais de segurança da NBR 6118:2014. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 9, n. 5, p. 682-709, 2016.
- Rackwitz, R.; Fiessler, B. Structural Reliability under Combined Random Load Sequences. *Computers and Structures*, v. 9, n. 5, p. 489-494, 1978.
- Santos, S.R.; Matioli, L.C.; Beck, A.T. New Optimization Algorithms for Structural Reliability Analysis. *Computer Modeling in Engineering and Sciences - CMES*, v. 83, n. 1, p. 23-55, 2012.
- Santos, D.M.; Stucchi, F.R.; Beck, A.T. Confiabilidade de vigas projetadas de acordo com as normas brasileiras. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 7, n. 5, p. 723-746, 2014.
- Scherer, M. *Avaliação da confiabilidade de vigas de concreto armado pelo método dos elementos finitos*. 2018. 179 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.
- Zhang, Y.; Der Kiureghian, A. Two improved algorithms for reliability analysis. In: *Proc. 6th IFIP WG7.5 conference on reliability and optimization of structural systems*, 1994, Assisi. Reliability and optimization of structural systems. Springer-Science+Business Media Dordrecht, 1995.