

## MÉTODOS PROBABILÍSTICOS PARA EL ESTUDIO DE VIBRACIONES LIBRES DE ENTRAMADOS PLANOS CON PARÁMETROS INCIERTOS

### PROBABILISTIC METHODS FOR THE STUDY OF VIBRATIONS FREE OF FLAT FRAMES WITH UNCERTAIN PARAMETERS

Héctor D. Martín<sup>a</sup>, Nicolás Martín<sup>a</sup>, Marcos N. Pereson<sup>a</sup> y Marcelo T. Piovan<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Grupo de Diseño Mecánica, Universidad Tecnológica Nacional, Calle N° 44, 1000 Parque Industrial Reconquista, Reconquista, Pcia Santa Fe, Argentina, [hmartin@comunidad.frrq.utn.edu.ar](mailto:hmartin@comunidad.frrq.utn.edu.ar),  
<https://www.frrq.utn.edu.ar/>

<sup>b</sup>Centro de Investigaciones de Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional FRBB, 11 de Abril 461, B8000LMI, Bahía Blanca. Pcia Buenos Aires, Argentina.  
[mpiovan@frbb.utn.edu.ar](mailto:mpiovan@frbb.utn.edu.ar), <http://www.frbb.utn.edu.ar/>

**Palabras clave:** Incertidumbre paramétrica, entramados planos, series de potencia.

**Resumen.** En este artículo se estudia la propagación de incertidumbre en la respuesta vibratoria de entramados planos debida a la variabilidad de parámetros materiales y geométricos. Se emplea un modelo estructural clásico de viga recta para construir los reticulados. A los parámetros considerados inciertos se asocian variables aleatorias cuyas funciones de distribución de probabilidad se adoptan en base a cierta información a priori, o bien se deducen empleando el principio de máxima entropía. Se emplea el método Monte Carlo para calcular realizaciones independientes aceptando variabilidad en un conjunto de parámetros materiales y constructivos de los miembros del entramado. Los modelos determinístico y probabilístico se construyen a partir de la solución exacta de la dinámica de cada barra a través del método de series de potencias. Se presentan estudios numéricos para evidenciar la influencia de algunos parámetros en cuanto a la propagación de incertidumbre en los patrones de vibración libres en entramados planos típicos.

**Keywords:** Parametric uncertainty, planar frames, power series.

**Abstract.** This article explores the uncertainty propagation due to variability of material and geometric parameters in the dynamic response of planar frames. A classic straight beam model is employed to construct the frames. The uncertain parameters are modeled by means of random variables whose probability distribution functions are adopted based on some information, or they are deduced by means of the Maximum Entropy Principle. The Monte Carlo method is employed to perform independent realizations taking into account a set of uncertain material and geometric parameters of the frame members. The deterministic and probabilistic models are constructed from the exact solutions of the frame dynamics calculated with power-series. A set of numerical studies are presented in order to show the influence of some parameters in the uncertain propagation of the free-vibration patterns of planar frames.

## 1 INTRODUCCIÓN

Se sabe que en determinados cálculos de ingeniería se utilizan los denominados entramados de barras -tanto de comportamiento plano como espacial- y que se emplean desde hace varias décadas los programas del método de rigidez, que dividen el dominio en pequeños elementos, que implican la adopción de incógnitas cinemáticas en la unión nodal de dos o más barras. Sin embargo estos programas conllevan, en general, un importante aumento de las incógnitas del problema. En el presente trabajo se aborda el estudio del comportamiento dinámico de los pórticos cerrados resolviendo las ecuaciones diferenciales gobernantes del problema mediante series de potencias enteras. Como se verá, se reduce considerablemente la cantidad de incógnitas, lo que hace más veloz el proceso, pudiendo aplicar el Método de Monte Carlo variando un conjunto específico de parámetros.

Las series de potencias se utilizan desde hace mucho tiempo en la resolución de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, en (Filipich et al., 2003) los autores utilizan las series de potencias enteras, como alternativa para encontrar las frecuencias naturales de vibración y las formas modales en pórticos planos, poligonales abiertos. Concluyendo en que el número de incógnitas es solamente tres, para cualquier tipo de vinculación del pórtico.

Por otro lado, en el trabajo (Mei, 2010) se da una solución analítica para el estudio de las vibraciones en el plano de entramados utilizando ondas. Las vibraciones se describen como ondas que se propagan a lo largo de un elemento estructural uniforme y se reflejan y transmiten a las discontinuidades, como ser las articulaciones estructurales.

En el artículo (Rezaiee-Pajand y Khajavi, 2011) los autores analizan las vibraciones en entramados planos. Se optimizan las matrices estructurales de rigidez y de masa para obtener mejor rendimiento en el estudio de vibraciones naturales del pórtico. Las matrices obtenidas se parametrizan fácilmente debido a su estructura simple. En este estudio se implementan ambos elementos vigas: Bernoulli-Euler y Timoshenko.

Si los parámetros de las ecuaciones que definen las vibraciones de los pórticos son perfectamente conocidos, lo que implica un problema determinístico, el cálculo y el análisis dinámico de los pórticos no revestiría mayor dificultad. Ahora bien, los componentes estructurales pueden tener variaciones aleatorias en sus dimensiones, en las propiedades elásticas y/o materiales, entre otras, debidas a alteraciones en los procesos constructivos o bien de montaje de los pórticos. La variabilidad aleatoria en los parámetros de un modelo de pórticos puede alterar sustancialmente la respuesta dinámica de los mismos, en consecuencia es necesario cuantificar la incertidumbre asociada a estos parámetros y como se propaga. Una manera de encarar este problema es mediante el Enfoque Probabilístico Paramétrico (Soize, 2001) que consiste en asociar variables aleatorias a los parámetros inciertos del modelo, definir las funciones de distribución de probabilidades de tales variables a partir de la información certera disponible y simular una cantidad suficientemente grande de realizaciones y luego evaluarlas estadísticamente.

En este trabajo se emplea el Principio de Máxima Entropía (Jaynes, 2003) para definir las distribuciones de probabilidades de las variables aleatorias asociadas a los parámetros inciertos. Se utilizan algunas hipótesis de estadísticos de tales variables aleatorias que pueden ser medibles o conocidos como el valor medio y el coeficiente de variación o bien la varianza o bien los límites de variación aceptados. Se construye el modelo probabilístico adoptando la estructura matemática del modelo estructural determinístico pero empleando como parámetros las variables aleatorias. Luego se emplea el Método de Monte Carlo para calcular las realizaciones estadísticamente independientes, para efectuar posteriormente el estudio estadístico con toda la información producida. Para los estudios computacionales se utilizó

rutinas programadas en la plataforma *Mathematica*® (Wolfram Mathematica © 1988-2016, Wolfram Research inc. Versiones 10 y 11).

## 2 MODELO DETERMINÍSTICO DE PÓRTICOS EN EL PLANO

La metodología básica consiste en, conocidas las formas de los corrimientos axiales y flexionales, hallar la respuesta dinámica, mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales gobernantes por una propuesta en series de potencias enteras. Con este fin, se plantean las condiciones esenciales o geométricas para todas las barras que concurren a un nodo, el equilibrio del mismo y las condiciones de vinculación a tierra del entramado.

El artificio que simplifica la metodología de cálculo estriba en que cada barra tiene una respuesta en función de constantes arbitrarias de integración, mismas que se obtienen bajo ciertas condiciones recorriendo nodo a nodo del entramado siguiendo una secuencia prescrita. Esto conduce a tener una cantidad muy baja de incógnitas según se verá en los ejemplos. La cantidad de incógnitas depende, por un lado de los grados de vinculación a tierra del entramado y por otro lado de la cantidad de barras que concurren a cada nodo, esto es, si son solo dos barras concurrentes, la cantidad de incógnitas no aumenta, si son más de dos se adicionan tres incógnitas por cada barra que se agrega al nodo. Este procedimiento ha sido introducido y optimizado para entramados abiertos de forma arbitraria (Filipich et al., 2003), mientras que en el presente estudio se concretó y extendió la misma metodología a entramados generales.

### 2.1 Planteo del problema

En la *Figura 1(a)* se muestra un pórtico plano cerrado, referido a un sistema de coordenadas de referencia X-Y. La nomenclatura utilizada es la siguiente:  $n_b$  es la cantidad total de barras;  $n_n$  es el número total de nodos;  $j$  es el subíndice que denota la barra:  $j=1,2,\dots,n_b$ ;  $n$  es el subíndice que denota el nodo:  $n=1,2,\dots,n_n$ .

Las características de cada barra son las siguientes:  $E_j$  Módulo de Young de la barra  $j$ ;  $\rho$  es la densidad de la barra  $j$ .  $F_j$  es el área de la barra  $j$ ;  $J_j$  momento de Inercia de la barra  $j$ ;  $\alpha_j$  es el ángulo entre la barra  $j$  y el eje de abscisas;  $\alpha_{j,k}$  ángulo relativo entre la barra  $j$  y la barra  $k$ ;  $a_j$  longitud de la barra  $j$ ; X-Y sistema de coordenadas globales;  $x_j$  coordenada local de la barra  $j$ .

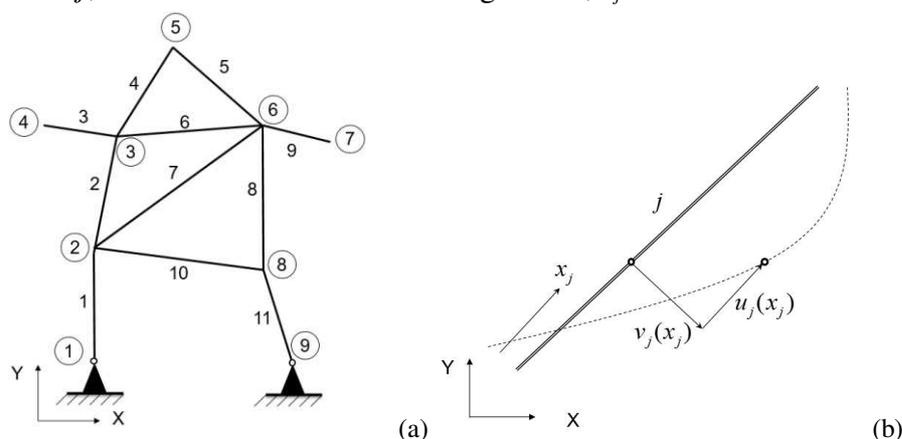


Figura 1: (a) Esquema general de un pórtico. (b) Desplazamientos y coordenadas locales de la barra  $j$ .

Los datos necesarios para poder realizar el proceso son: las coordenadas globales de los nodos, el nodo inicial y final de cada barra, las características geométricas (área e inercia) y mecánicas (módulo de Young, densidad) de cada barra. Con las coordenadas globales final e

inicial de los nodos de cada barra  $j$  se calculan los incrementos  $\Delta X_j$  y  $\Delta Y_j$ . Luego se comienza calculando las constantes geométricas de las barras; longitud  $a_j$  y ángulos relativos  $\alpha_{j,k}$ :

$$a_j = \sqrt{\Delta X_j^2 + \Delta Y_j^2}; \quad \cos \alpha_j = \frac{\Delta X_j}{a_j}; \quad \sin \alpha_j = \frac{\Delta Y_j}{a_j}. \quad (1 \text{ a, b, c})$$

$$\begin{aligned} C_{j,k} &= \cos(\alpha_{j,k}) = \cos(\alpha_j - \alpha_k) = \cos \alpha_j \cos \alpha_k + \sin \alpha_j \sin \alpha_k \\ S_{j,k} &= \sin(\alpha_{j,k}) = \sin(\alpha_j - \alpha_k) = \sin \alpha_j \cos \alpha_k - \cos \alpha_j \sin \alpha_k \end{aligned} \quad (2 \text{ a,b})$$

## 2.2 Estudio energético

Para el estudio energético se considera en cada barra  $j$  un sistema de coordenadas local  $x_j$  en donde cada punto, al vibrar, tendrá un desplazamiento transversal  $v_j(x_j)$  y un desplazamiento axial  $u_j(x_j)$ , como se muestra en la [Figura 1\(b\)](#).

Las energías potenciales de deformación  $U$  y cinéticas  $K$  del pórtico serán la sumatoria de las propias de cada barra, todas éstas en función de los desplazamientos:

$$U = \sum_{j=1}^{nb} U_j \quad K = \sum_{j=1}^{nb} K_j. \quad (3)$$

La energía potencial (4) estará dependiendo de momentos y de los esfuerzos normales:

$$U_j = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{a_j} \frac{M^2(x_j)}{E_j J_j} dx_j + \int_0^{a_j} \frac{N^2(x_j)}{E_j F_j} dx_j \right] \quad (4)$$

La Energía Cinética (5), aceptando modos normales de vibración, se expresa en función de  $\omega$  (frecuencia circular de vibración), además de los desplazamientos transversales y axiales.

$$K_j = \frac{1}{2} \rho_j F_j \omega^2 \int_0^{a_j} [v^2(x_j) + u^2(x_j)] dx_j \quad (5)$$

A continuación se indican las expresiones correspondientes a los momentos flectores  $M$  (6a) y a los esfuerzos normales  $N$  (6b):

$$M(x_j) = -E_j J_j v_j''(x_j); \quad N(x_j) = E_j F_j u_j'(x_j) \quad (6 \text{ a,b})$$

Los apóstrofes en las expresiones anteriores significan derivación respecto de  $x_j$ .

Planteando el Teorema de Hamilton:

$$\delta \left( \sum_{j=1}^{nb} U_j - \sum_{j=1}^{nb} K_j \right) = 0 \quad (7)$$

y teniendo en cuenta las expresiones (4, 5 y 6) en la (7), reagrupando convenientemente resultan las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema:

$$E_j J_j v_j'''(x_j) - \rho_j F_j \omega^2 v_j(x_j) = 0, \quad E_j F_j u_j''(x_j) + \rho_j F_j \omega^2 u_j(x_j) = 0 \quad (8a,b)$$

Se pasa ahora a coordenadas adimensionales utilizando el siguiente cambio de variables:

$$0 \leq x_j \leq a_j \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{x_j}{a_j} \leq 1; \quad \xi_j = \frac{x_j}{a_j} \quad (9)$$

Desde aquí en adelante apóstrofes sobre las variables  $u_j$  y  $v_j$  refieren a la derivada respecto de la nueva variable adimensionales. Luego las ecuaciones diferenciales (8 a,b) resultan:

$$\frac{E_j J_j}{a_j^4} v_j''''(\xi_j) - \rho_j F_j \omega^2 v_j(\xi_j) = 0, \quad \frac{E_j F_j}{a_j^2} u_j''(\xi_j) + \rho_j F_j \omega^2 u_j(\xi_j) = 0 \quad (10 \text{ a,b})$$

y pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$\boxed{v_j''''(\xi_j) - \Omega_j^2 v_j(\xi_j) = 0} \quad ; \quad \boxed{u_j''(\xi_j) + \left(\frac{\Omega_j}{\lambda_j}\right)^2 u_j(\xi_j) = 0} \quad (11 \text{ a,b})$$

siendo:

$$\Omega_j^2 = \frac{\rho_j F_j}{E_j J_j} \omega^2 a_j^4 \quad ; \quad \lambda_j^2 = \frac{F_j a_j^2}{J_j} \quad (12 \text{ a,b})$$

### 2.3 Desarrollo de series de potencia

Se propone, para la solución de las ecuaciones diferenciales (11a,b), un desarrollo en series de potencias para las funciones desconocidas de los desplazamientos transversales y axiales de cada barra, (6)-(10) con las siguientes expresiones:

$$v_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m A_{j,i} \xi_j^i \quad ; \quad u_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m B_{j,i} \xi_j^i \quad (13 \text{ a,b})$$

Reemplazando (13a,b) y sus correspondientes derivadas, en las ecuaciones diferenciales que gobiernan nuestro problema (11a,b) escribimos:

$$\sum_{i=0}^{m-4} \varphi_{4,i} A_{j,i+4} \xi_j^i - \Omega_j^2 \sum_{i=0}^m A_{j,i} \xi_j^i = 0, \quad \sum_{i=0}^{m-2} \varphi_{2,i} B_{j,i+2} \xi_j^i + \left(\frac{\Omega_j}{\lambda_j}\right)^2 \sum_{i=0}^m B_{j,i} \xi_j^i = 0 \quad (14 \text{ a,b})$$

dónde:

$$\varphi_{k,j} = \frac{(i+k)!}{k!} \quad (15)$$

Igualando los coeficientes de igual potencia en ambos desarrollos, para la barra  $j$ , se obtiene las siguientes ecuaciones de recurrencia:

$$A_{j,i+4} = \frac{\Omega_j^2 A_{j,i}}{\varphi_{4,i}} \quad B_{j,i+2} = - \left(\frac{\Omega_j}{\lambda_j}\right)^2 \frac{B_{j,i}}{\varphi_{2,i}} \quad (16 \text{ a,b})$$

Como puede apreciarse en la ecuación (16a), se vinculan los coeficientes  $A_{j,i+4}$  con los  $A_{j,i}$ , y en la ecuación (16b), los  $B_{j,i+2}$  con los  $B_{j,i}$  lo que resulta, en principio, cada barra con un total de 6 incógnitas, a saber:  $A_{j,0}$ ,  $A_{j,1}$ ,  $A_{j,2}$ ,  $A_{j,3}$ ,  $B_{j,0}$  y  $B_{j,1}$ .

Al plantear en cada nodo, en donde arriban las barras, condiciones de compatibilidad

geométricas y condiciones estáticas de equilibrio, se va recorriendo el pórtico resolviendo todas sus barras. El proceso inicia a partir de una de las barras vinculadas a tierra. Finalmente las frecuencias naturales se obtienen con una cantidad muy baja de incógnitas, lo que se manifiesta en el escaso tiempo computacional.

### 3 MODELO PROBABILISTICO PARA ENTRAMADOS PLANOS

En la sección anterior se ha presentado el modelo determinístico de análisis para los entramados planos. Ahora bien, entendiendo que existen parámetros de las barras de los entramados y de los entramados mismos que son pasibles de tener una importante variabilidad aleatoria, en esta sección se establecen algunas especificaciones para cuantificar los aspectos de incertidumbre de la respuesta del modelo matemático. Así pues, para este problema se seleccionan algunos parámetros a los cuales se les asigna una variable aleatoria. Las funciones de distribución de probabilidades de tales variables aleatorias se seleccionan en virtud de evidencia experimental clara o bien se deducen en función de algunas restricciones impuestas de valores estadísticos (p.e., estimado del valor medio y algún dato de dispersión, etc.) y con ellas aplicar métodos variacionales de acuerdo con el Principio de Máxima Entropía.

Para construir el modelo estadístico se selecciona como variable aleatoria a los siguientes parámetros: (a) Módulo de elasticidad y densidad del material, (b) geometría seccional. Se emplearán dos alternativas basadas en las siguientes hipótesis:

- Caso A: Los parámetros son entidades físicas reales, con ello son positivas. Se acepta que varían entre un mínimo y un máximo estipulados a partir de una moda conocida y se conocen pocos datos de muestras estadísticas reales.

- Caso B: Como en el Caso A, son entidades físicas reales, se conocen los límites extremos y se acepta que el valor medio o expectativa coincide con la respuesta determinística.

En ambos casos todas las variables aleatorias se consideran estadísticamente independientes. En el Caso A, sin mediar aplicación de otro criterio de auxilio, se admite el uso de una distribución triangular. En tanto que para el Caso B, la aplicación del Principio de Máxima Entropía, entendida en el sentido informativo, conduce a una distribución uniforme (ver las referencias Jaynes, 2003; Piovan y Sampaio, 2015). Así pues, las funciones de distribución de probabilidad de las variables aleatorias tomarán la forma (17a) para la distribución triangular simétrica y la forma (17b) para la distribución uniforme.

$$p(V_i) = \begin{cases} S_{T[L_{vi}, U_{vi}]}(V_i) \frac{V_i - \underline{V}_i (1 - CV_i \sqrt{6})}{6(\underline{V}_i CV_i)^2}, \forall V_i \leq \underline{V}_i \\ S_{T[L_{vi}, U_{vi}]}(V_i) \frac{\underline{V}_i (1 + CV_i \sqrt{6}) - V_i}{6(\underline{V}_i CV_i)^2}, \forall V_i > \underline{V}_i \end{cases}, i = 1, \dots, 4 \quad p(V_i) = S_{U[L_{vi}, U_{vi}]}(V_i) \frac{1}{2\sqrt{3} \underline{V}_i CV_i}, i = 1, \dots, 4 \quad (17 \text{ a,b})$$

Siendo  $S_{T[L_{vi}, U_{vi}]}$  y  $S_{U[L_{vi}, U_{vi}]}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , las funciones de soporte de las distribuciones triangular y uniforme, respectivamente, mientras que  $L_{vi}$  y  $U_{vi}$ ,  $i = 1, \dots, 4$  son los límites inferior y superior de la distribución de cada variable aleatoria;  $\underline{V}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  el valor medio de las variables aleatorias asociadas a los parámetros inciertos, mientras que  $CV_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  es el coeficiente de variación definido como la razón entre el desvío estándar y el valor medio de la variable aleatoria.

El procedimiento de cálculo asociado al modelo probabilístico recurre al empleo del Método Monte Carlo para la ejecución de la gran cantidad de realizaciones que luego serán evaluadas estadísticamente. La convergencia del proceso Monte Carlo se calcula con la raíz media cuadrática de la norma respecto del modelo determinístico.

## 4 RESULTADOS OBTENIDOS

### 4.1 Caso de estudio

En la Figura 2(a) se muestra como ejemplo de estudio un pórtico de 6 barras doblemente empotrado, en los nodos 1 y 6. Para el cálculo se ha utilizado desarrollos en series de potencias de grado 35 para todas las barras, pues a partir del grado 35 se ha comprobado convergencia definitiva para las diez primeras frecuencias. Aun así esto no incrementa la cantidad de incógnitas o variables cinemáticas libres, que para este pórtico son solamente nueve.

Para simplificar el estudio de propagación de incertidumbre, se adopta en el modelo determinístico (que es a su vez el valor medio del probabilístico) todas las barras las mismas propiedades seccionales tal que el área es  $F=0.12 \text{ m}^2$ , el módulo de elasticidad  $E=2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ , el momento de inercia  $J=0,0036 \text{ m}^4$  y la densidad  $\rho=7850 \text{ Kg/m}^3$ . Las barras también se miden en metros con las coordenadas entre paréntesis. Se ha efectuado un cálculo a priori con el modelo determinístico para conocer los valores de las frecuencias circulares naturales, mismas que se muestran en la Figura 2(b)

Se utilizaron variables aleatorias con distribuciones triangular y uniforme, en las que se conocen algunos datos de la expectativa estadística de cada parámetro y se suponen coeficientes de variación para cotejar la propagación de incertidumbre asociada a todos los parámetros en conjunto o independientemente.

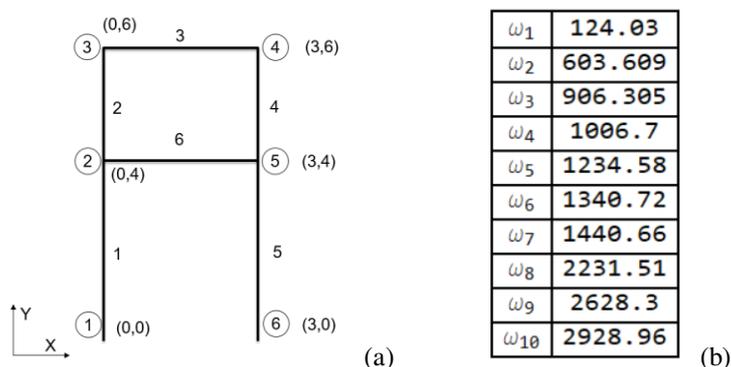


Figura 2: (a) Esquema general del pórtico en estudio. (b) Frecuencias circulares determinísticas.

A continuación se efectúa una evaluación de la propagación de incertidumbre en la determinación de las frecuencias de vibración, tomando como referencia las correspondientes al modelo determinístico y cotejando la dispersión en términos del coeficiente de variación de la respuesta  $CV(\omega)$  y el coeficiente de variación impuesto en las variables aleatorias  $CV(\underline{V}_i)$ . Se tendrá presente que tanto las distribuciones uniformes como las triangulares tienen condicionamientos en cuanto al valor máximo que puede tener el coeficiente de variación para que las variables aleatorias sean de segundo orden.

Se han seleccionado como parámetros inciertos al módulo de elasticidad longitudinal de las barras, la densidad, el área seccional y el momento de inercia. A cada uno de ellos se le asigna una variable aleatoria y en consecuencia su correspondiente distribución.

En la Figura 3 se muestra una comparación de las respuestas obtenidas con dos clases de distribución para dos modos de vibración particulares. En cada caso se considera solo uno de los parámetros como incierto, mientras que los restantes se consideran determinísticos y constantes. Nótese que en la medida que va aumentando el coeficiente de variación impuesto en las variables aleatorias de entrada, el coeficiente de variación de la respuesta (es decir de la frecuencia circular) también va aumentando). En la misma se incorpora la forma modal de la 1ª y la 7ª frecuencias circulares, en las cuales se ha notado una mayor variación en los valores del

coeficiente de variación.

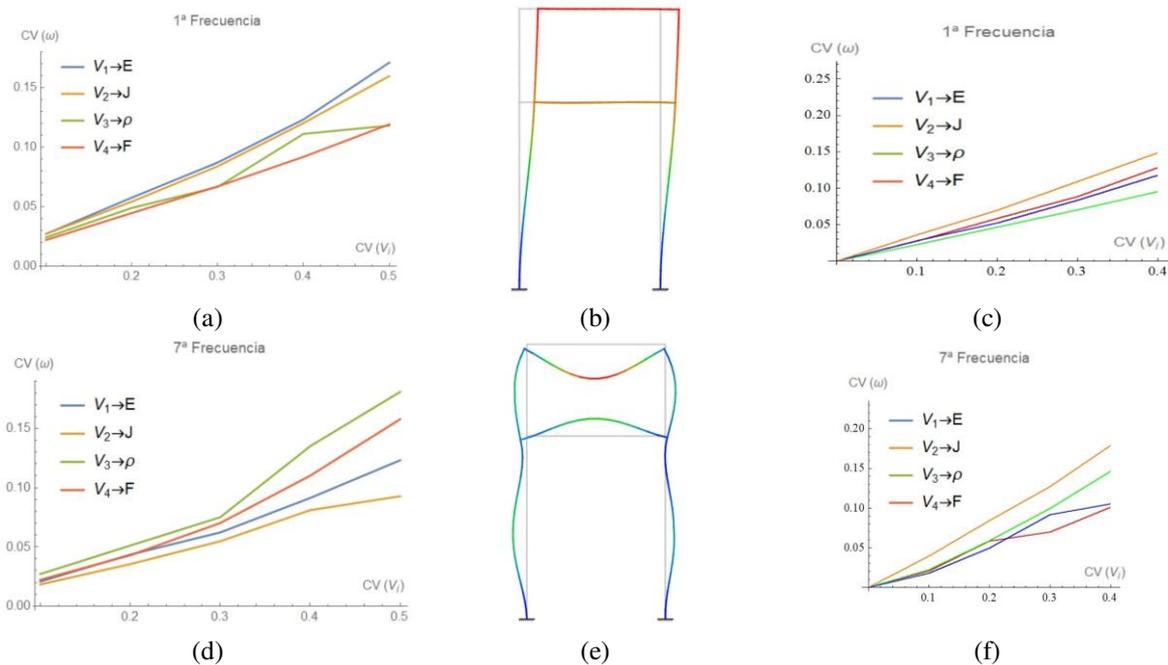


Figura 3: Efecto de cada componente en forma independiente en la 1ª y 7ª frecuencias. (a) y (d) con distribución uniforme, (c) y (f) con distribución triangular, (b) y (e) los respectivos modos.

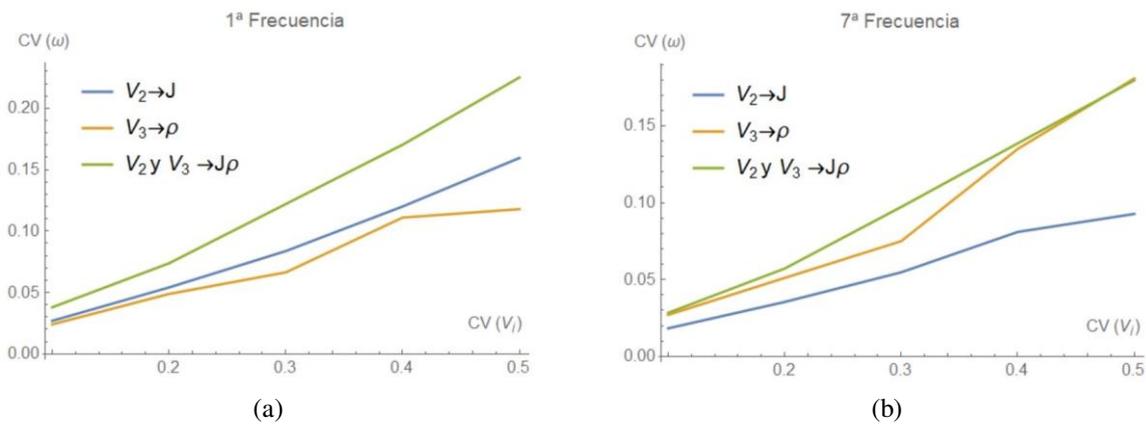


Figura 4: Efectos de la variación de la densidad y el momento de inercia por separado y combinados en una distribución uniforme. (a) Para el primer modo (b) Para el séptimo modo.

En la Figura 4 se muestra una comparación de los efectos de la propagación de incertidumbre de un par de parámetros en forma independiente y combinada, en este caso solo para la distribución uniforme. Nótese como la incertidumbre en dos parámetros combinados es netamente mayor que la de cada uno en forma independiente en el caso del primer modo, mientras que en el caso del séptimo modo no es tan marcado. Esto se debe a que la forma del modo en el caso del pórtico influye (magnificando o conteniendo) en la propagación de incertidumbre.

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se efectuó un estudio de propagación de incertidumbre de parámetros de estructuras de pórticos recurriendo al Enfoque Probabilístico Paramétrico y al método de series de potencias para resolver las ecuaciones que rigen el problema de autovalores dinámicos de tales estructuras. Se han seleccionado 4 parámetros distintivos de las barras y se ha evaluado su influencia en la propagación de incertidumbre en forma independiente y combinada en el cálculo de las frecuencias naturales, a través de la relación entre coeficientes de variación de las variables aleatorias y de los homónimos de las distribuciones estadísticas de las frecuencias naturales.

Se ha observado que la incertidumbre de los parámetros materiales ( $E$  y  $\rho$ ) tienen mayor influencia que los parámetros geométricos ( $F$  y  $J$ ) en la propagación de incertidumbre de la respuesta de los autovalores, al menos en forma independiente de cada parámetro. A su vez se observado que la combinación de incertidumbre en varios parámetros magnifica sustancialmente o no la propagación de incertidumbre, dependiendo del tipo de modo. Si bien este es un estudio preliminar para evidenciar algunos aspectos de incertidumbre en la dinámica de pórticos y/o entramados, a futuro se pretende ampliar este enfoque incorporando mayores detalles en las variables aleatorias y en la detección de frecuencias y modos que sean más sensibles a la presencia de parámetros inciertos.

## REFERENCIAS

- Labib, A., Kennedy, D., Featherston, C. *Free vibration analysis of beams and frames with multiple cracks for damage detection*. Journal of Sound and Vibration (2014), 333(29), 4991-5003.
- Mei, C. *In-plane vibrations of classical planar frame structures-an exact wave-based analytical solution*. Journal of Vibration and Control (2010), 16 (9), 1265-1285. Doi: 10.1177/1077546309339422.
- Soize C. Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. Journal of Acoustical Society of America, 109(5):1979–1996, 2001.
- M.T. Piovan, R. Sampaio. Parametric and non-parametric probabilistic approaches in the mechanics of thin-walled composite curved beams. Thin-Walled Structures 90, 95–106 (2015)
- Jaynes E. Probability Theory: The logic of Science: Vol.1. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2003.
- C. P. Filipich, M. R. Escalante, M. B. Rosales, *Series de potencias: una ventajosa alternativa aplicada a vibraciones libres de pórticos*, ENIEF 2003, Mecánica Computacional, Vol. XXII, pág. 908-920. Bahía Blanca, noviembre de 2003
- Rezaiee-Pajand M. and Khajavi R., *Vibration analysis of plane frames by customized stiffness and diagonal mass matrices*, Journal of Mechanical Engineering Science (2011), 225, 2848-2863. Doi: 10.1177/0954406211405435.
- Wolfram Mathematica © 1988-2016, Wolfram Research inc. Versiones 10 y 11