

DISEÑO ÓPTIMO DE METAMATERIALES LOCALMENTE RESONANTES MEDIANTE UN MODELO HOMOGENEIZADO SIMPLIFICADO

OPTIMAL DESIGN OF LOCALLY RESONANT METAMATERIALS BY MEANS OF A SIMPLIFIED HOMOGENIZED MODEL

Víctor H. Cortínez^{a,b,c}, Patricia N. Domínguez^{a,b} y Cecilia I. Stoklas^a

^a*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada (CIMTA), Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, vcortine@frbb.utn.edu.ar*

^b*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, pdoming@uns.edu.ar*

^c*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnica, CONICET*

Palabras clave: metamateriales localmente resonantes, dinámica estructural, análisis modal, homogeneización, diseño.

Resumen. Se presenta una metodología para el diseño óptimo del metamaterial localmente resonante de una estructura finita con el propósito de localizar y maximizar una banda de atenuación. Ésta corresponde a un rango de frecuencias donde no existen grandes amplitudes de vibración forzada y se puede definir como el intervalo entre dos frecuencias naturales consecutivas que acotan cierta frecuencia de interés. A efectos de formular el método de diseño se hará uso de un enfoque simplificado de homogeneización para analizar dichas metaestructuras en el rango de bajas frecuencias, que consiste en una expansión modal simultánea de la microestructura (resonadores locales) y de la macroestructura. Esta metodología de análisis se combina con una técnica de optimización aleatoria (método de Recocido Simulado) para obtener la banda de frecuencia buscada.

Keywords: locally resonant metamaterials, structural dynamics, modal analysis, homogenization, design.

Abstract. This paper presents a methodology for the optimal design of a locally resonant metamaterial corresponding to a finite structure with the objective of locating and maximizing an attenuation band. This band constitutes a frequency range where high amplitudes of forced vibrations cannot exist and can be defined by the gap between two consecutive natural frequencies bounding a certain frequency of interest. To formulate the design methodology, a simplified homogenization approach is used in order to analyze the mentioned meta-structures in the range of low frequencies, consisting in a simultaneous modal expansion of the micro-structure (local resonators) and macro-structure. This methodology is used along with a heuristic optimization technique (Simulated Annealing) to obtain the desired frequency band.

1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años se han estudiado intensamente las posibilidades de diseñar materiales compuestos, denominados metamateriales, que poseen propiedades mejoradas respecto a los materiales clásicos. En particular, ha surgido el concepto de metamaterial localmente resonante (MMLR) que es de gran interés con relación a problemas acústicos o dinámico-estructurales, pudiéndose aplicar como dispositivos de atenuación de vibraciones mecánicas, de reducción de ruido, aislación de ondas sísmicas, etc. (Auriault y Boutin, 2012; Basone et al., 2019; Sugino et al. 2017; Sun et al., 2010; Roca et al. 2019; Vondrejic et al., 2017).

Las propiedades mejoradas de tales metamateriales se deben a pequeñas subestructuras (inserciones) inmersas que funcionan como resonadores. Cuando una estructura construida con tales materiales es excitada por cargas vibratorias, tales resonadores funcionan como amortiguadores dinámicos. De esta manera, las amplitudes de vibración de la estructura matriz se minimizan en ciertos rangos de frecuencias que dependen de las características mecánicas y geométricas de los resonadores. Para frecuencias de vibración altas, cuando el movimiento puede ser considerado como una onda propagándose en el metamaterial, emergen ciertas bandas de frecuencia (brechas de banda) donde el carácter de las ondas se hace evanescente. Es decir, el material se comporta como un filtro de frecuencia. Por tal motivo, es de gran interés el diseño de las características mecánicas y geométricas de las subestructuras o resonadores a efectos de asegurar la existencia de brechas de banda para las frecuencias de excitación deseadas (Roca et al. 2019; Vondrejic et al., 2017; Olhoff et al., 2012). Para lograr tal diseño, es necesario utilizar un modelo matemático suficientemente preciso de la dinámica de dichos materiales. En principio, el análisis puede realizarse mediante un modelo detallado de elementos finitos aunque con gran costo computacional, sobre todo en etapas de diseño, debido al alto número de elementos necesarios para representar cada inserción. Por tal motivo, se han desarrollado métodos de análisis más prácticos, tales como el enfoque de Bloch-Floquet (Sun et al., 2010) que permite estudiar la propagación de ondas en un medio periódico heterogéneo. Tal método reduce el problema al análisis de una única celda unitaria. Otro enfoque de utilidad para el estudio de los MMLR es el modelo de homogeneización (Auriault y Boutin, 2012). En éste, el material heterogéneo es aproximadamente modelado como uno homogéneo con características equivalentes de rigidez y densidad. Sin embargo, un aspecto singular de tal modelo es que la densidad equivalente tiene carácter tensorial y depende de la frecuencia. Justamente, la forma propagante o evanescente de las ondas elásticas en el MMLR puede estudiarse a partir de la definición positiva o negativa de la densidad equivalente (Vondrejic et al., 2017). Esta metodología puede aplicarse mientras la longitud de las ondas propagantes en el material sea mayor que la longitud característica de los resonadores. A diferencia del enfoque de Bloch-Floquet, el modelo de homogeneización puede también utilizarse para estudiar estructuras finitas, en las cuales la atenuación de vibraciones puede ser influenciada por la geometría global y el tipo de condiciones de borde. Esto ocurre generalmente para excitaciones en baja frecuencia. Para el estudio de metaestructuras finitas, las ecuaciones del modelo homogeneizado pueden resolverse de manera conveniente mediante el método de Elementos Finitos (MEF) para el problema de vibraciones libres o forzadas.

Una metodología más económica computacionalmente para resolver el problema multiescala (local – global) homogeneizado se logra mediante la expansión modal simultánea de la cinemática local de los resonadores y global de la estructura (Cortínez y Domínguez, 2019). Para ello se utilizan autofunciones asociadas al problema de vibración libre del resonador local y autofunciones asociadas a la estructura global.

En este trabajo se presenta una metodología para el diseño óptimo de los resonadores de un

MMLR correspondiente a una estructura finita con el propósito de localizar adecuadamente la banda de atenuación y maximizar su ancho. Tal banda corresponde a un rango de frecuencias donde no existen grandes amplitudes de vibración forzada y se puede definir como el intervalo entre dos frecuencias naturales consecutivas que acotan cierta frecuencia de interés.

Esta metodología de diseño hace uso del enfoque simplificado de homogeneización basado en la doble expansión modal para analizar el problema de vibraciones libres en dichas metaestructuras para el rango de bajas frecuencias. Este enfoque se combina con una técnica de optimización aleatoria (método de Recocido Simulado) (Dominguez y Cortínez, 2018) para obtener la banda de frecuencia buscada. Se formula el método de diseño y se dan ejemplos numéricos de aplicación.

2 DINÁMICA DE METAMATERIALES LOCALMENTE RESONANTES

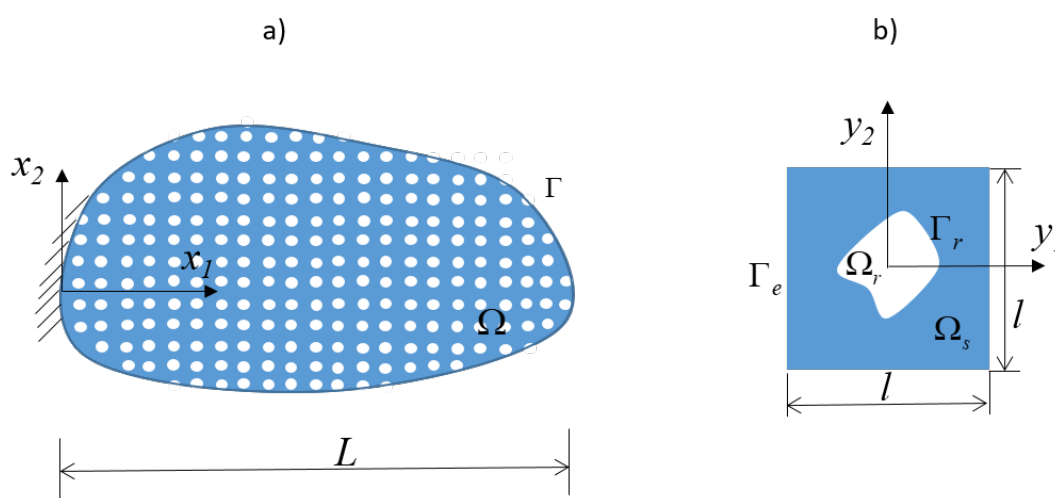


Figura 1: Esquema del MMLR y de una celda.

Se considera una estructura construida por un material heterogéneo compuesto de inclusiones r distribuidas periódicamente en una matriz s (Figura 1a). En la Figura 1b) puede apreciarse un esquema de cada celda. Se utiliza la siguiente notación: $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ corresponde a las coordenadas globales de la estructura mientras que $\mathbf{y}=(y_1, y_2, y_3)$ corresponde a las coordenadas locales de cada celda, $\Omega, \Omega_c, \Omega_r, \Omega_s$, denotan al volumen total, el de cada celda, el ocupado por el material rígido s de cada celda y el ocupado por la inclusión compuesta r de cada celda. $\Gamma, \Gamma_e, \Gamma_r$ denotan la superficie de la estructura, la de la celda y la del resonador (inserción), respectivamente. En cada celda, la relación entre las coordenadas globales y locales se expresa como $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$, donde \mathbf{x}_0 es la coordenada del centroide de la celda. La arista de una celda típica se denota con l , mientras que la longitud característica de la estructura global con L . La relación entre ambas longitudes es $\varepsilon = l/L (\ll 1)$. Se asume que la estructura global puede estar dividida en Z regiones con diferentes características materiales (tanto de los resonadores como de la matriz), siendo Ω_z el volumen de estas subregiones.

Se pretende describir las vibraciones de la estructura sometida a cargas armónicas con frecuencias de excitación ω relativamente bajas donde los modos relevantes poseen una longitud de onda comparable a la de la estructura (L). Se acepta que existe la posibilidad de resonancia local en las inclusiones, lo que implica la posibilidad de interacción dinámica en

dos escalas. De esta manera, las inserciones podrían actuar como absorbedores dinámicos extrayendo energía del movimiento vibratorio global, atenuando las amplitudes de las vibraciones de la estructura. El efecto dinámico de las inserciones sobre la vibración de la estructura se denomina “micro-inercia”. Se ha demostrado (Auriault y Boutin, 2012) que en el caso de resonadores homogéneos, tal efecto es de importancia cuando se cumplen las siguientes relaciones: a) $|C^r|/|C^s| = O(\varepsilon^2)$ donde $|C^r|$ y $|C^s|$ corresponden a medidas de los tensores de rigidez de los materiales r y s respectivamente y b) $\rho_r/\rho_s = O(1)$, donde ρ_r y ρ_s corresponden a la densidad de la inserción y de la matriz, respectivamente. Por otra parte, también es de importancia tal efecto cuando las inserciones son de dos materiales: un recubrimiento blando b y una inserción rígida interna p , si se verifica $|C^b|/|C^s| = O(\varepsilon^2)$, $|C^b|/|C^p| = O(\varepsilon^q)$, $q \geq 1$, $\rho_b/\rho_s = O(\varepsilon^k)$, $k \geq 1$ y $\rho_p/\rho_s = O(1)$ (Bonnet y Monchiet, 2015)

Este problema puede ser formulado mediante la teoría de la elasticidad en conjunto con un modelo detallado de elementos finitos. Sin embargo, esto requiere un mallado muy tupido, sobre todo en la zona de los resonadores, para capturar los modos locales. Por tal motivo, es de interés utilizar formulaciones más económicas desde el punto de vista computacional. En particular, aquí se utiliza la teoría de homogeneización de Auriault y Boutin (2012). De acuerdo a la misma, la cinemática global en el metamaterial puede describirse aproximadamente mediante un desplazamiento $\mathbf{u}_{Total} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ donde $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ es una componente con variación suave en Ω , mientras que $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ describe la cinemática local correspondiente a la inserción. Las ecuaciones gobernantes para el material homogeneizado se expresan de la siguiente manera:

$$Div_x [C^H : \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u})] + \boldsymbol{\rho}_{eq} \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad C.B : \mathbf{B}[\mathbf{u}]|_{\Gamma} = 0 \quad (1)$$

donde C^H es el tensor constitutivo del material homogeneizado. Para su determinación es necesario resolver las ecuaciones de Navier estáticas para el material de la matriz en una celda agujereada (densidad nula en la inserción). Los detalles pueden consultarse en las referencias Cortínez y Dominguez (2019) o Auriault y Boutin (2012). $\mathbf{B}[\mathbf{u}]$ es el operador que indica las condiciones de borde, que pueden ser desplazamientos conocidos (condiciones de borde cinemáticas) o fuerzas externas armónicas de amplitud conocida (fórmulas de Cauchy). $\boldsymbol{\rho}_{eq}$ es la densidad equivalente del material homogeneizado dependiente de la frecuencia ω cuya expresión viene dada por:

$$\boldsymbol{\rho}_{eq} = [\rho_{eqij}] = \left[\bar{\rho} \delta_{ij} + \sum_n \frac{\omega^2}{(\lambda_n^2 - \omega^2)} R_{ij}^n \right] \quad (2)$$

con

$$\bar{\rho} = \int_{\Omega_c} \rho d\Omega_c / \Omega_c \quad \text{y} \quad R_{ij}^n = \frac{\int_{\Omega_r} \rho_r \psi_i^n d\Omega_r \int_{\Omega_r} \rho_r \psi_j^n d\Omega_r}{\Omega_c} \quad (3)$$

donde ρ y $\bar{\rho}$ son la densidad y densidad media del material de la celda. Observar que el

segundo término de las componentes de la densidad equivalente corresponden al efecto inercial de los resonadores. Las funciones ψ_i^n corresponden a la solución del siguiente problema de vibraciones libres locales del resonador:

$$\begin{cases} \text{Div}_r [\mathbf{C}^r : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\boldsymbol{\Psi}^n)] + \rho_r \lambda_n^2 \boldsymbol{\Psi}^n = 0, & \text{en } \Omega_r \\ \boldsymbol{\Psi}^n|_{\Gamma_r} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Se admite que los autovectores $\boldsymbol{\Psi}^n$ verifican la siguiente condición de ortonormalidad:

$$\int_{\Omega_r} \rho_r \boldsymbol{\Psi}^n \boldsymbol{\Psi}^m d\Omega = \delta_{nm} \quad (5)$$

Si existen autovalores degenerados esta condición debe obtenerse mediante el procedimiento de Gram-Schmidt.

Si bien la solución de las ecuaciones (1) puede obtenerse mediante el MEF, puede resultar más conveniente (considerando la dependencia de la densidad equivalente de la frecuencia) utilizar una expansión modal (Cortínez y Domínguez, 2019). Para ello el desplazamiento global se aproxima de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = \sum_l \beta_l \boldsymbol{\Phi}^l \quad (6)$$

donde β_l son constantes, mientras que las autofunciones $\boldsymbol{\Phi}^l$ corresponden al problema de vibraciones libres de la estructura homogeneizada sin considerar microinercia:

$$\text{Div}_x [\mathbf{C}^H : \boldsymbol{\varepsilon}_x(\boldsymbol{\Phi}^l)] + \bar{\rho} \zeta_l^2 \boldsymbol{\Phi}^l = 0 \quad \text{C.B.: } \tilde{\mathbf{B}}[\boldsymbol{\Phi}^l]|_{\Gamma} = 0 \quad (7)$$

donde $\tilde{\mathbf{B}}[\boldsymbol{\Phi}^l]$ solo involucra las restricciones cinemáticas del problema (no contempla las fuerzas aplicadas). Se asume que tales funciones son ortonormales ($\int_{\Omega} \bar{\rho} (\boldsymbol{\Phi}^n \cdot \boldsymbol{\Phi}^m) d\Omega = \delta_{nm}$). Sustituyendo la expresión (6) en (1) y aplicando el método global de Galerkin se llega a:

$$\sum_l A_{sl}(\omega) \beta_l = P_s \quad (8)$$

donde A_{sl} es una matriz de rigidez dinámica dada por:

$$A_{sl} = (\omega^2 - \zeta_s^2) \delta_{ls} - \sum_z \sum_n \int_{\Omega_z} \frac{\omega^2}{(\lambda_{n,z}^2 - \omega^2)} ((\mathbf{R}^{n,z} \cdot \boldsymbol{\Phi}^l) \cdot \boldsymbol{\Phi}^s) d\Omega \quad (9)$$

siendo:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}^{n,z} \cdot \Phi^l) \cdot \Phi^s &= (R_{11}^{n,z} \phi_1^l + R_{12}^{n,z} \phi_2^l + R_{13}^{n,z} \phi_3^l) \phi_1^s + (R_{21}^{n,z} \phi_1^l + R_{22}^{n,z} \phi_2^l + R_{23}^{n,z} \phi_3^l) \phi_2^s \\ &+ (R_{31}^{n,z} \phi_1^l + R_{32}^{n,z} \phi_2^l + R_{33}^{n,z} \phi_3^l) \phi_3^s \end{aligned} \quad (10)$$

y donde $\mathbf{R}^{n,z}$ corresponde al valor de matriz \mathbf{R}^n en la región z . P_s corresponde al trabajo realizado por las cargas externas. Si, por ejemplo, se considera una fuerza \mathbf{F} aplicada en un punto \mathbf{x}_p del borde, puede expresarse en la forma $P_s = \mathbf{F} \cdot \Phi^s(\mathbf{x}_p)$.

3 DISEÑO ÓPTIMO DE METAMATERIALES LOCALMENTE RESONANTES

El objetivo que se busca en el problema de diseño propuesto consiste en generar una banda de atenuación de vibraciones alrededor de una frecuencia (o frecuencias) preestablecida $\bar{\omega}$. Esto quiere decir que ante la existencia de cargas externas armónicas con frecuencias cercanas a aquella seleccionada, no se deben producir amplitudes muy grandes de vibración. Para ello, se procura establecer las características de los resonadores y las geometrías de las subregiones para que la separación entre las frecuencias naturales mayor y menor a la frecuencia $\bar{\omega}$ sea la mayor posible para evitar resonancias cercanas. En el caso de modos suficientemente altos (en los cuales se pierda el efecto de borde) tal concepto corresponde a la denominada “brecha de banda”. Consecuentemente, el problema de diseño óptimo puede ser formulado de la siguiente manera:

$$[\rho_{r,z}, G_{r,z}, G_z] = \arg \max(\omega_s - \omega_i) \quad (11)$$

donde $\rho_{r,z}$ es la densidad del resonador para la región z (que a su vez puede variar localmente), $G_{r,z}$ corresponde al conjunto de parámetros geométricos que definen la geometría del resonador en la misma región, G_z es el conjunto de parámetros geométricos que define las regiones globales de diferentes materiales, ω_i es la máxima frecuencia natural menor que $\bar{\omega}$ y ω_s es la mínima frecuencia natural mayor que $\bar{\omega}$ ($\omega_i < \bar{\omega} < \omega_s$).

Los resonadores generan antiresonancia cuando sus frecuencias coinciden con frecuencias de excitación externas y tienden, en general, a producir atenuación para frecuencias mayores que las propias. Consecuentemente, para establecer la maximización de tal separación de frecuencias naturales estrictamente asociada al efecto de los resonadores locales, se procura aquí que el intervalo buscado contenga alguna de las frecuencias naturales propias de los resonadores ($\exists \lambda_n \in (\omega_i, \omega_s)$).

El problema anterior puede estar sujeto a diferentes restricciones tanto de resistencia y de rigidez como geométricas. De manera simplificada aquí se supone que todas éstas pueden considerarse incluidas en las restricciones geométricas (cada variable geométrica estará entre valores máximos y mínimos preestablecidos).

Para resolver el problema anterior, dada la geometría global Ω , el material de la matriz ρ_s, \mathbf{C}^s y la frecuencia $\bar{\omega}$, se procede de la siguiente manera: a) se propone la estructura de los microresonadores y su distribución espacial: $\rho_r, G_{r,z}, G_z$; b) se obtiene la matriz de rigidez homogeneizada \mathbf{C}^H (para lo cual se resuelven mediante el MEF seis problemas estáticos elásticos en el espacio o tres en el plano); c) se resuelve el problema local de vibraciones (4) para cada tipo de resonador, mediante el MEF, para obtener las

frecuencias locales de los resonadores y la densidad equivalente para cada zona; d) se resuelve mediante el MEF el problema de vibraciones de la estructura global sin microinercia (7) para determinar las autofunciones globales Φ^l ; e) se determina la matriz de rigidez global homogeneizada $A_{ij}(\omega)$ mediante (9); f) se determinan las frecuencias naturales a partir de $\det(A_{ij})=0$ y g) se calcula $\Delta\omega = \omega_s - \omega_i$ procurando que en el intervalor exista una frecuencia local del resonador. El proceso se itera para diferentes escenarios comparando $\Delta\omega$ hasta obtener el valor máximo. Para mejorar la eficiencia computacional de este proceso de búsqueda puede utilizarse una técnica de optimización apropiada tal como el método de Recocido Simulado (Dominguez y Cortínez, 2018). Es interesante observar que si la geometría externa de cada resonador se mantiene invariable en el diseño, los pasos a) y d) se realizan una sola vez. Alternativamente, el cálculo de las frecuencias naturales (paso f) se podría realizar buscando las frecuencias de resonancia que se obtienen aplicando una fuerza armónica de amplitud arbitraria F .

Otra forma de realizar el diseño consiste en seleccionar la estructura de los resonadores para que en el rango de frecuencias de interés, una medida de la amplitud de las excitaciones forzadas sea mínima. Por ejemplo, se podría minimizar la amplitud de la energía cinética. Para que este tipo de diseño resulte realista, a la formulación del problema homogeneizado habría que adicionarle el amortiguamiento.

4 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Es interesante, en primer lugar, analizar la diferencia existente entre el concepto de brecha de banda y banda de atenuación. El primero de ellos se define a partir del fenómeno de propagación de ondas viajeras en un medio localmente resonante infinito. Es decir, se asume que la longitud de las ondas propagantes es mucho menor que la longitud característica de la estructura si ésta es finita. Describe un rango de frecuencias donde no es posible la existencia de tales ondas viajeras permitiéndose solo ondas evanescentes. En tal caso, se espera que las amplitudes de vibraciones elásticas sean muy pequeñas. Por otra parte, el concepto de banda de atenuación aquí estudiado se define a partir de las vibraciones estacionarias en estructuras finitas y describe un rango de frecuencias en el cual no existen frecuencias naturales. Consecuentemente, las amplitudes de vibración también son pequeñas. Sin embargo, la banda de atenuación y la brecha de banda no necesariamente coinciden.

Por ejemplo, en la estructura mostrada en la Figura 2 con $L = 4m$, $H = 1,2m$ se consideran resonadores idénticos (Caso 1, Tabla 1): $l = 0,05m$, $r_a = 0,008m$, $r_b = 0,006m$, $\rho_s = 2400 \text{ kg/m}^3$, $\rho_b = 60 \text{ kg/m}^3$, $\rho_p = 7800 \text{ kg/m}^3$, módulos de elasticidad: $E_s = 2E10 \text{ Pa}$, $E_b = 1,2E5 \text{ Pa}$, $E_p = 2E11 \text{ Pa}$ para la matriz (s), el recubrimiento blando (b) y la inserción rígida (p), respectivamente y coeficiente de poisson $\nu = 0,3$ para todos los materiales. Se pretende estudiar la banda de atenuación alrededor de la frecuencia objetivo $\bar{\omega} = 1500 \text{ rad/s}$, el cálculo de frecuencias naturales realizado a partir de anular el determinante de la matriz (9) indica una banda de antenuación entre 1283 y 1878 rad/s (ancho de banda de 595 rad/s). Por otra parte, la brecha de banda que emerge ante el pasaje de ondas por la estructura considerada infinita (Cortínez y Dominguez, 2021) viene dada entre 1483 y 1875 rad/s (392 rad/s). Es decir, la banda de atenuación es 203 rad/s más amplia que la brecha de banda.

Caso	$\bar{\omega}$	Zona I				Zona II				Anchos de banda		
		r_{a_1}	r_{a_2}	r_{b_1}	r_{b_2}	r_{a_1}	r_{a_2}	r_{b_1}	r_{b_2}	ω_i	ω_s	Banda
1	1500	8	8	5	5	8	8	5	5	1283	1878	595
2	1700	7	7	4	4	7	7	3,5	3,5	1691	1705	14
3	1700	8	8	6	6	8	8	6	6	1278	2179	901
4	1700	8	8	6	6	8	8	4	6	1594	2104	510
5	1700	7	7	4	6	7	8	4	3	1666	1760	94

Tabla 1: Características específicas de las configuraciones presentadas. Las frecuencias están en rad/s y los radios en mm .

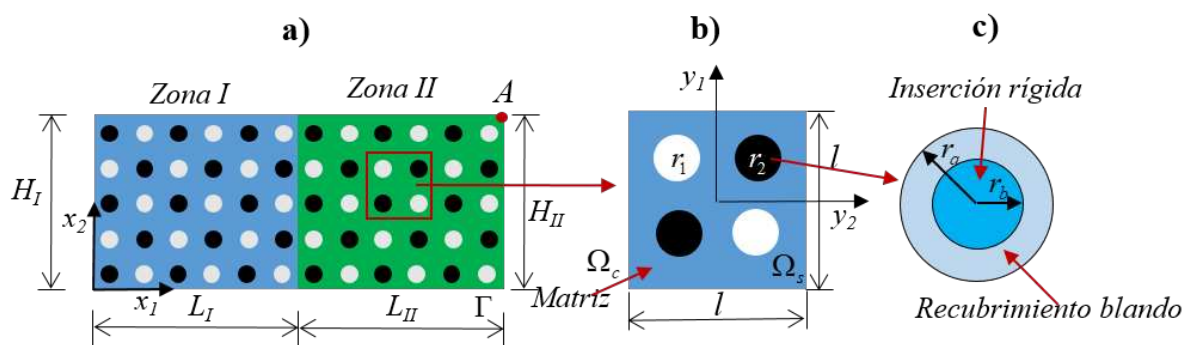


Figura 2: Esquema del MMLR finito analizado. a) Estructura global con 2 zonas de diferente configuración, b) una celda típica y c) un resonador aislado.

Se considera ahora una estructura como la de la Figura 2 con las características indicadas en la Tabla 1, Caso 2, con $L_I = L_{II} = 2m$ y $H_I = H_{II} = 1,2m$. En este caso se pueden definir dos brechas de banda de acuerdo al tipo de metamaterial considerado: la primera entre 1720 y 1934 rad/s , y la segunda entre 1690 y 1960 rad/s . Como puede apreciarse, la mayor de ellas que involucra a la frecuencia de interés $\bar{\omega} = 1700 rad/s$ tiene un ancho de banda de 270 rad/s . Sin embargo, el cálculo de frecuencias realizado para la estructura finita con dos tipos de material permite determinar una banda de atenuación de sólo 14 rad/s entre las frecuencias 1691 y 1705 rad/s . Es decir, el cálculo de brechas de banda como estructura infinita, en este caso sobrestima la región de atenuación. Para este caso se han determinado además las vibraciones forzadas a partir de la ecuación (8) asumiendo que la fuerza externa $\mathbf{F} = (1,1)$ está aplicada en el punto A (extremo superior derecho, Figura 2). El correspondiente diagrama de amplificación se muestra en la Figura 3. También se muestran los límites de la brecha de banda calculada en línea de trazos roja. Como se aprecia, la aparición de las frecuencias naturales de 1705, 1715 y 1720 rad/s impide la existencia de tal brecha de banda minimizándose así la banda de atenuación.

Finalmente, a manera de ejemplo de la metodología de diseño propuesta, se considera nuevamente la metaestructura mostrada en la Figura 2 con dos tipos de resonadores en cada una de las zonas I y II con el propósito generar una banda de atenuación alrededor de la frecuencia objetivo $\bar{\omega} = 1700 rad/s$. Como variables de diseño se adoptan los radios de los subdominios de los resonadores: r_{a_i}, r_{b_i} ($i = 1, 2$) para cada una de las zonas I y II .

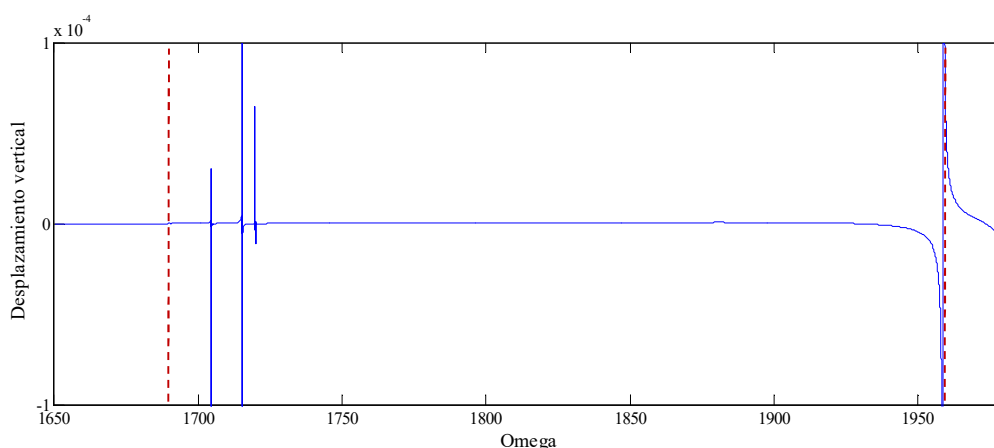


Figura 3: Diagrama de amplitudes forzadas del Caso 2.

Como restricciones se han considerado en todos los casos $0,004 \leq r_{a_i} \leq 0,008$ y $0,001 \leq r_{b_i} \leq r_{a_i} - 0,001$. El resto de los parámetros figuran en la Tabla 1 (Caso 3). También pueden verse en la misma tabla para propósitos de comparación los anchos de banda logrados con otros esquemas de diseño factibles (Casos 4 y 5). Puede apreciarse una notable extensión de la banda de atenuación con respecto a la brecha de banda. En la Figura 4 se muestra el diagrama de amplitudes forzadas para el caso óptimo obtenido y también los límites de la brecha de banda correspondiente (línea de trazos roja).

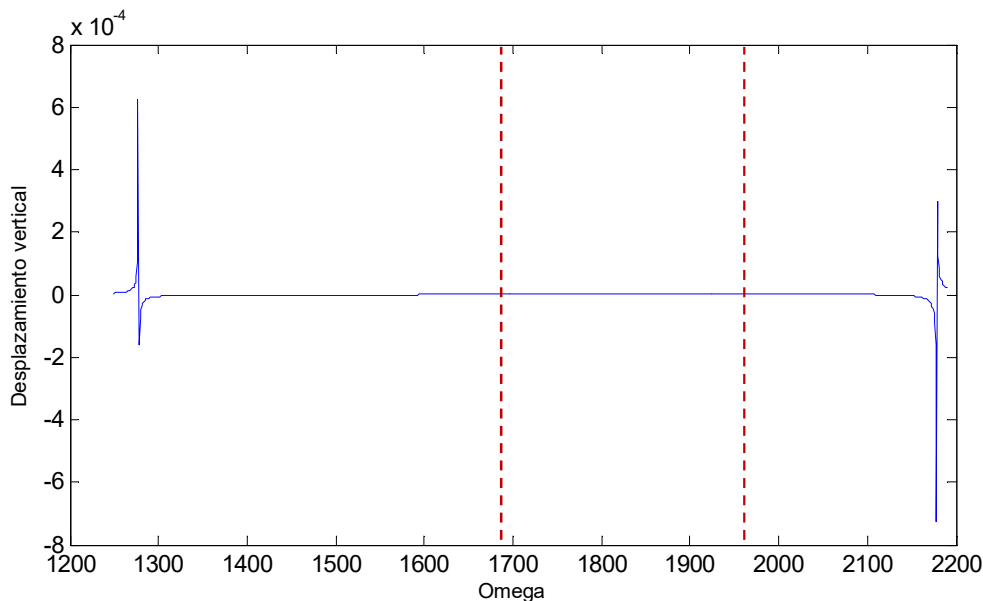


Figura 4: Diagrama de amplificación para el diseño óptimo (Caso 3).

5 CONCLUSIONES

Se ha presentado un enfoque para el diseño óptimo de estructuras finitas construidas con metamateriales localmente resonantes. El objetivo planteado para tales diseños es maximizar la banda de atenuación, definida como un rango de frecuencias carente de resonancia. El método utilizado para el cálculo de las frecuencias naturales de la metaestructura finita se basa en una expansión modal simultánea de la mecánica local de las inserciones y de la mecánica

global de la estructura. Para ello se utilizan autofunciones de los problema de vibraciones libres asociados a la inserción y a la matriz agujereada homogeneizada respectivamente que se determinan mediante el método de elementos finitos. Este enfoque conduce a un sistema de ecuaciones reducido que permite la obtención de frecuencias naturales de la metaestructura finita de manera eficiente. Tal metodología se combina con una técnica de optimización adecuada para minimizar el número de evaluaciones necesarias de la función objetivo. Se han presentado ejemplos numéricos para ilustrar la diferencia entre brechas de banda, obtenidas para materiales infinitos, y bandas de atenuación de metaestructuras finitas. Asimismo, se muestra un ejemplo de diseño óptimo de la configuración de los resonadores.

REFERENCIAS

- Auriault, J. L. y Boutin, C., Long wavelength inner resonance cut-off frequencies in elastic composite materials, *International Journal of Solids and Structures* 49: 3269-3281, 2012.
- Basone, F., Wenzel, M., Bursi, O.S. y Fossetti, M., Finite locally resonant metafoundations for the seismic protection of fuel storage tanks, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 48(2):232-252, 2019.
- Bonnet, G. y Monchiet, V., Low frequency locally resonant metamaterials containing composite inclusions, *Journal of the Acoustical Society of America* 137: 3263, 2015.
- Cortínez, V. H. y Dominguez, P.N. Un modelo reducido para la dinámica estructural de metamateriales localmente resonantes, *Mecánica Computacional* 37, 705-714, 2019.
- Cortínez, V. H. y Dominguez, P.N. Determinación analítica de “bandgaps” en una clase de materiales localmente resonantes, *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial* Vol. 8, 523-526, 2021.
- Dominguez, P.N. y Cortínez, V. H. Un modelo Timoshenko-Vlasov para vigas curvas compuestas de sección arbitraria: diseño óptimo, *Mecánica Computacional* 36, 831-840, 2018.
- Olhoff, N., Niu, B. y Cheng, G, Optimum design of bandgap beam structures, *International Journal of Solids and Structures* 49: 3158-3169, 2012.
- Roca, D., Yago, D., Cante, J., Lloberas-Valls, O. y Oliver, J., Computational design of locally resonant acoustic metamaterials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 345: 161-182, 2019.
- Sugino, C. Xia, Y., Leadenham, S., Ruzzene, M. y Erturk, A., A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures, *Journal of Sound and Vibration* 406, 104-123, 2017.
- Sun, H., Du, X. y Frank Pai, P. Theory of Metamaterial beams for Broadband Vibration Absorption, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 21, 1086-1101, 2010.
- Vondrejč, J., Rohan, E. y Heczko, J., Shape optimization of phononic bandgap structures using the homogenization approach, *International Journal of Solid and Structures* 113-114: 147-168, 2017.