

## ESTRATEGIAS MIXTAS DE EXTRACCIÓN DE PARÁMETROS MODALES APLICADAS A UN PÓRTICO DE LABORATORIO

Adriano Trono<sup>a,b</sup>, Emmanuel Beltramo<sup>a,b</sup>, José Stuardi<sup>a</sup>, Marcelo Ceballos<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (FCEFyN – UNC)  
Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina.  
depestructuras@fcefy.unc.edu.ar, <https://fcefy.unc.edu.ar>

<sup>b</sup>Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT – CONICET)  
Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina.  
idit@fcefy.unc.edu.ar, <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu>

**Palabras clave:** análisis modal experimental, funciones de respuesta en frecuencia, fracción polinómica matricial, descomposición en valores singulares.

**Resumen.** En el marco de las actividades del curso de posgrado Análisis Modal Experimental, dictado por los últimos dos autores, se realizaron una serie de ensayos dinámicos sobre un pórtico de cuatro pisos y un metro de altura instalado en el Laboratorio de Estructuras a los efectos de aplicar distintas técnicas de identificación y ajuste de parámetros modales. El programa de ensayos consistió en la realización de ensayos de impacto en una de las direcciones principales del pórtico, golpeando en cada piso con un martillo modal y registrando la respuesta horizontal en todos los pisos a través de acelerómetros. Estos ensayos se repitieron sobre una variante del pórtico provista con un amortiguador de masa sintonizado diseñado para reducir la respuesta del modo fundamental. La obtención de los parámetros modales para ambas configuraciones se realizó en base a técnicas con principios bien diferenciados para comparar la precisión obtenida. Las comparaciones consistieron por un lado en determinar el error en la diferencia entre las funciones experimentales de respuesta en frecuencia y aquellas obtenidas con los parámetros modales ajustados, y por otro lado en cuantificar directamente las diferencias entre los parámetros modales de cada una de las estrategias utilizadas. Los resultados permitieron confirmar que estas estrategias proporcionan una notable correspondencia con los datos experimentales, y al mismo tiempo muestran las eventuales limitaciones que pueden presentar.

**Abstract.** As part of the activities of the Experimental Modal Analysis postgraduate course, dictated by the last two authors, a series of dynamic tests were carried out on a four-story, one-meter-high building installed in the Structures Laboratory in order to apply different techniques of identification and adjustment of modal parameters. The test program consisted of carrying out impact tests in one of the main directions of the building, hitting each floor with a modal hammer and recording the horizontal response on all floors through accelerometers. These tests were repeated on a building variant provided with a tuned mass damper designed to reduce the fundamental mode response. The modal parameters for both configurations were obtained based on techniques with well differentiated principles to compare the precision obtained. The comparisons consisted on the one hand in determining the error in the difference between the experimental frequency response functions and those obtained with the adjusted modal parameters, and on the other hand in directly quantifying the differences between the modal parameters of each of the strategies used. The results confirmed that these strategies provide a remarkable correspondence with the experimental data, and at the same time show the possible limitations that they may present.

## 1 INTRODUCCIÓN

La identificación de los parámetros modales de una estructura resulta de gran utilidad en diferentes ramas de la ingeniería, ya que permiten realizar distintas tareas que cubren desde la calibración de modelos numéricos para la predicción de su comportamiento frente a diferentes excitaciones dinámicas, hasta su monitoreo continuo durante la vida útil para el control de la salud estructural midiendo la respuesta producida por vibraciones ambientales. El desarrollo de métodos de identificación ha tenido su mayor auge en los últimos 40 años, y a partir del año 2000 han cobrado un notable interés las técnicas basadas en registros de larga duración de vibraciones producidas por tránsito, viento, microtemores, etc.

En el marco de las actividades del curso de posgrado Análisis Modal Experimental de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba se propuso como proyecto final la identificación de los parámetros modales de una estructura a través de diferentes técnicas. A tal efecto se usó un pórtico de aproximadamente un metro de altura con 4 pisos, 4 columnas y una masa aproximada de 3 kg por piso, construido con fines didácticos para materias afines a la Dinámica Estructural. El pórtico está montado sobre una mesa vibratoria, lo que permite efectuar diferentes tipos de ensayos dinámicos.

La primera estrategia utilizada para la identificación de los parámetros modales recurre a la Descomposición de Valores Singulares sobre las matrices experimentales de la Función de Respuesta en Frecuencia (FRF) para cada frecuencia de análisis, lo que permite separar la contribución de los distintos modos en la respuesta. Luego puede aplicarse alguna técnica válida para curvas de osciladores simples en torno a cada uno de los picos en el dominio de la frecuencia para extraer los parámetros modales asociados al modo dominante. A tal efecto, en este trabajo se recurre al Método Inverso desarrollado por [Dobson \(1984\)](#).

La segunda estrategia está basada en la Fracción Polinómica Matricial propuesta por [Juang \(1994\)](#), y representa una extensión matricial de la representación de los coeficientes de la FRF a través del cociente entre dos polinomios con potencias de la frecuencia de análisis. Esta técnica requiere linealizar las ecuaciones de ajuste, y además no permite garantizar la simetría de las matrices físicas. Las eventuales distorsiones que se producen por la simetrización de estas matrices y por dicha linealización se corrigen en una etapa final a través de un ajuste fino de los parámetros modales obtenidos.

## 2 OBJETIVOS

El principal objetivo del trabajo es identificar los parámetros modales de la estructura bajo ensayo en su versión original y para una variante obtenida con una modificación estructural consistente en el agregado de un absorbedor de vibraciones. Para esto, se explora el uso de dos estrategias diferentes de identificación en el dominio de la frecuencia que se desarrollan en base a la aplicación secuencial de técnicas consolidadas dentro del área Análisis Modal Experimental. Los resultados obtenidos se correlacionan luego mediante el uso de indicadores calculados a tal fin. La aplicación de ambas estrategias de identificación permite evaluar sus desempeños y comparar la precisión alcanzada.

## 3 ESTRUCTURA DE ENSAYO

El modelo de ensayo fue diseñado y proyectado con dimensiones y pesos compatibles con las posibilidades del laboratorio, de manera de poder ser excitado convenientemente y a su vez permitir la medición de vibraciones para la aplicación de diferentes técnicas de análisis.

La [Figura 1](#) muestra una fotografía del modelo de laboratorio que constituye la estructura de ensayo, junto con un esquema en el que se describen los principales parámetros mecánicos del modelo plano de análisis estructural. Se trata de un pórtico de cuatro pisos, los que fueron construidos con placas cuadradas de acero de 160 mm de lado y 15 mm de espesor. La

separación vertical de las placas entre baricentros resulta  $h = 240$  mm. Las cuatro columnas del pórtico están formadas por varillas roscadas W1/4" que se empotran en las placas cerca de los vértices. A los efectos de lograr un desacoplamiento de los modos en las dos direcciones horizontales, el pórtico fue rigidizado en la dirección perpendicular a la dirección de análisis. Esta rigidización se logró mediante la vinculación de a pares de las columnas que pertenecen a planos verticales paralelos entre sí mediante dos planchuelas por piso y por plano.

Una variante del sistema original se logra agregando un amortiguador de masa sintonizada de 1.2 kg vinculado a la placa del piso superior a través de una varilla similar a la usada para las columnas, tal como se muestra en la Figura 1. Este amortiguador posee un 10% de la masa total de la estructura, y se sintoniza con la frecuencia del primer modo de la estructura a los efectos de reducir las amplitudes de la respuesta en torno a dicha frecuencia. El pórtico se encuentra montado sobre el enrejado de una mesa vibratoria que posee cierta flexibilidad, la cual podría considerarse como representativa de una eventual flexibilidad de la fundación.

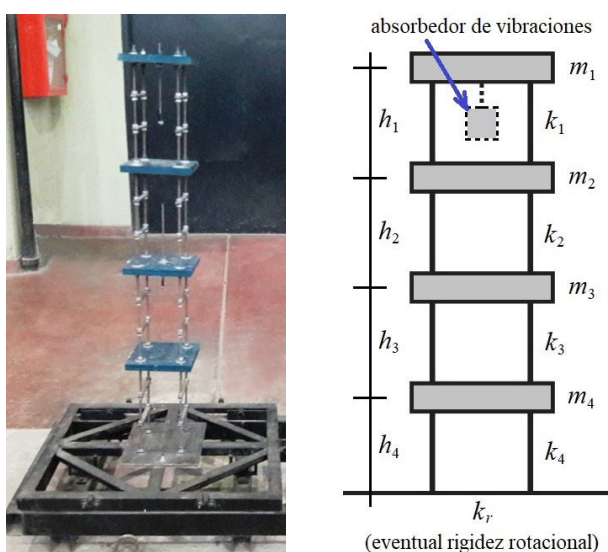


Figura 1: Pórtico montado sobre una mesa vibratoria (izquierda) y modelo plano de análisis (derecha)

#### 4 DESCRIPCIÓN DE LOS ENSAYOS DINÁMICOS

Los ensayos dinámicos sobre el pórtico consistieron en impactos realizados con un martillo modal, aplicando un golpe en cada piso y en la dirección horizontal principal no rigidizada, y tomando registros simultáneos de la fuerza y las aceleraciones horizontales en todos los pisos. Los ensayos se repitieron 5 veces por cada piso para reducir los errores experimentales y para poder estimar la función de coherencia. Este mismo ensayo fue repetido para la modificación estructural ya descrita consistente en el agregado de un absorbedor de vibraciones.

Los transductores usados para el ensayo de impacto son acelerómetros inductivos de medio puente marca HBM con una masa total de 30 gramos, tensión característica de 80 mV/V para una aceleración nominal de  $200 \text{ m/s}^2$ , y un rango de medición entre 0~100 Hz. El martillo modal posee una celda de carga de puente completo de fabricación local marca ROCCA con una sensibilidad de 4500 N/(mV/V).

#### 5 ESTRATEGIAS DE EXTRACCIÓN DE PARÁMETROS MODALES

La extracción de los parámetros modales se realiza utilizando dos estrategias diferentes en donde cada una presenta ventajas y limitaciones que dependen de los casos de aplicación. La originalidad atribuida al trabajo consiste en una combinación apropiada de técnicas conocidas en el área, con lo cual se pretende una sinergia de sus potencialidades.

## 5.1 Fundamentos básicos

La matriz de FRF expresada en términos de desplazamientos se designa como receptancia  $[\alpha]$ , y suponiendo amortiguamiento del tipo viscoso adopta la siguiente forma en función de las matrices físicas de rigidez  $[K]$ , masa  $[M]$  y amortiguamiento  $[C]$  de la estructura (véase, por ejemplo: [Ewins, 2000](#); [Maia and Silva, 1997](#)):

$$[\alpha(\omega)] = ([K] + i\omega[C] - \omega^2[M])^{-1} \quad (1)$$

Estas matrices son cuadradas y de  $N \times N$ , donde  $N$  es el número de GL dinámicos. Los sistemas con amortiguamiento viscoso clásico satisfacen estas propiedades de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [K] [\Phi] &= [\omega_r^2] & \Rightarrow & [K] = [\Phi]^{-T} [\omega_r^2] [\Phi]^{-1} \\ [\Phi]^T [C] [\Phi] &= [2\xi_r \omega_r] & \Rightarrow & [C] = [\Phi]^{-T} [2\xi_r \omega_r] [\Phi]^{-1} \\ [\Phi]^T [M] [\Phi] &= [I] & \Rightarrow & [M] = [\Phi]^{-T} [\Phi]^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $[\Phi]$  es la matriz de formas modales, mientras que  $\omega_r$  y  $\xi_r$  ( $r = 1 \dots N$ ) representan las frecuencias naturales no-amortiguadas y las relaciones de amortiguamiento, respectivamente, las cuales se encuentran en matrices diagonales indicadas con corchete doble. El reemplazo de (2) en (1) permite relacionar la receptancia con los parámetros modales del sistema:

$$[\alpha(\omega)] = ([\Phi]^{-T} ([\omega_r^2] + i\omega[2\xi_r \omega_r] - \omega^2[I]) [\Phi]^{-1})^{-1} \quad (3)$$

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi] ([\omega_r^2] + i\omega[2\xi_r \omega_r] - \omega^2[I])^{-1} [\Phi]^T \quad (4)$$

De todas maneras, la expresión en (4) no resulta adecuada para el desarrollo de técnicas de identificación de parámetros modales, por lo que se recurre la representación a través de los parámetros modales de la formulación de primer orden (espacio en estado):

$$[\alpha(\omega)] = [\bar{\Psi}] (i\omega[I] - [\bar{\Lambda}])^{-1} [\bar{\Psi}]^T \quad (5)$$

Por otra parte, esta representación permite el ajuste de parámetros modales de sistemas con amortiguamiento viscoso general. En esta expresión, la matriz de formas modales  $[\bar{\Psi}]$  posee una dimensión  $N \times 2N$  mientras que la matriz diagonal de autovalores  $[\bar{\Lambda}]$  es de  $2N \times 2N$ . Los parámetros modales para estructuras con bajo amortiguamiento y del tipo viscoso clásico se presentan en pares conjugados, por lo que la receptancia puede expresarse como:

$$\begin{aligned} [\alpha(\omega)] &= [\Psi] (i\omega[I] - [\Lambda])^{-1} [\Psi]^T + [\Psi^*] (i\omega[I] - [\Lambda^*])^{-1} [\Psi^*]^T \\ \text{con} \quad [\Lambda] &= \left[ \begin{array}{c} -\xi_r \omega_r + i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \\ -\xi_r \omega_r - i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

En este caso, las matrices de autovalores y de formas modales poseen dimensiones  $N \times N$ . Además, las componentes de las formas modales poseen partes real e imaginaria con el mismo módulo, con distinto signo para autovalores con parte imaginaria positiva, y con igual signo para autovalores con parte imaginaria negativa. Estas características producen que uniendo los términos complejos conjugados se arribe a una ecuación idéntica a (4), de donde surge la relación entre las formas modales de primer y segundo orden:

$$[\Phi] = \text{Re}([\Psi]) \left[ \begin{array}{c} \sqrt{4\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}} \\ \sqrt{4\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}} \end{array} \right] \quad (7)$$

## 5.2 Determinación experimental de la matriz de receptancia

Los coeficientes de la matriz experimental de receptancia  $[\alpha(\omega)]$  se obtienen promediando los estimadores  $H_1(\omega)$  y  $H_2(\omega)$  descritos por [Maia and Silva \(1997\)](#). A tal efecto, se calculan las densidades espectrales directas y cruzadas utilizando registros de fuerzas y aceleraciones con una duración de 8 segundos, adquiridos con una frecuencia de muestreo de 600 Hz y un filtro digital pasa-bajo de 50 Hz, que son transformados al dominio de la frecuencia a través de una rutina FFT. El posterior agregado de una zona muerta de 2 segundos permite obtener

una resolución en frecuencia de  $\Delta f = 0.1$  Hz. A los efectos de reducir el efecto de *leakage*, se aplicaron ventanas exponenciales para los registros de aceleraciones y ventanas de fuerza para los registros de las cargas. Las receptancias fueron obtenidas dividiendo cada amplitud de las acelerancias por  $-\omega^2$ .

### 5.3 Descomposición de Valores Singulares (DVS) + Método Inverso

La DVS de una matriz de variable compleja  $[A]$  es una factorización algebraica basada en los autovalores de esta matriz que posee múltiples aplicaciones en distintas disciplinas (por ejemplo: [Brincker and Ventura, 2015](#); [Rainieri and Fabbrocino, 2014](#)). En el campo específico del Análisis Modal Experimental ha dado origen a una importante cantidad de técnicas de identificación de parámetros modales en base a datos experimentales. La matriz  $[A]$  se representa de la siguiente forma:

$$[A] = [U][S][V]^T \quad (8)$$

donde  $[S]$  es una matriz diagonal que contiene los valores singulares, y las matrices  $[U]$  y  $[V]$  resultan ortogonales, lo cual implica que sus inversas son iguales a sus transpuestas y que sus columnas son linealmente independientes. La expresión de la receptancia presentada en (4) posee para cada frecuencia de análisis una estructura matemática idéntica a la DVS de la matriz  $[A]$  dada en (8), por lo que la factorización de matrices experimentales de receptancia permite separar la contribución de los distintos modos. Una vez aplicada la DVS, el primer valor singular representa la contribución del modo dominante en el rango de frecuencia en torno a cada pico espectral. Para la frecuencia  $\omega_j$  de ese rango se tiene:

$$[\alpha(\omega_j)] = \sum_{r=1}^N \{U_r\} S_{j,r} \{V_r\}^T = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Phi_r\} \{\Phi_r\}^T}{\omega_r^2 + i\omega_j 2\xi_r \omega_r - \omega_j^2} \quad (9)$$

$$\text{con } \{U_r\} = \{V_r\} = \{\Phi_r\} \quad \text{y} \quad S_{j,r} = \frac{1}{\omega_r^2 + i\omega_j 2\xi_r \omega_r - \omega_j^2} \quad (10)$$

Una vez filtrada la contribución de los modos secundarios en proximidades de cada pico, es decir, tomando sólo el primer término de la sumatoria en (9), puede luego aplicarse alguna técnica para la identificación de parámetros modales válida para curvas de un oscilador simple en el dominio de la frecuencia. El Método Inverso utilizado en este trabajo ([Dobson, 1984](#)) asume un modelo de amortiguamiento histerético, pero los valores obtenidos se transforman a viscosos equivalentes para compatibilizarlos con los resultados de la otra estrategia propuesta. Cada curva de receptancia proporciona una estimación de las mismas frecuencias naturales y relaciones de amortiguamiento, por lo que los valores se promediaron para definirlos como parámetros globales (no suelen producirse diferencias importantes entre las distintas curvas).

La [Figura 2](#) muestra como ejemplos la DVS de las curvas de receptancia  $\alpha_{11}$  del pórtico original y  $\alpha_{43}$  del pórtico modificado, las cuales son representativas de las restantes curvas. Las curvas en líneas continuas que contienen la superposición de todos los modos presentan módulos que permiten identificar claramente las anti-resonancias, y fases tomando valores de  $0^\circ$  (fase) y  $180^\circ$  (contrafase) con variaciones abruptas en correspondencia con las resonancias y las anti-resonancias, lo cual indica un bajo amortiguamiento estructural. La contribución de cada modo queda claramente evidenciada, así como la pérdida de relevancia de cada modo a medida que aumenta la distancia al pico asociado a dicho modo. En el caso de la curva  $\alpha_{43}$  del pórtico modificado se observa que las amplitudes de los dos primeros picos (que surgen de la interacción entre el modo fundamental de la estructura original con el amortiguador) resultan un orden de magnitud menores respecto a la amplitud del pico asociado al modo fundamental de la estructura original, lo cual muestra la eficiencia del amortiguador de masa sintonizada.



El rango de frecuencias adoptado para el ajuste es de 0.6 Hz (7 puntos) para los modos 1 y 2, y de 1.0 Hz (11 puntos) para los modos 3 y 4, tomando como frecuencia central a aquella correspondiente al pico del modo. Estos rangos de frecuencia se han elegido considerando la necesidad de tomar un número suficiente de puntos que permita una redundancia adecuada, pero considerando la conveniencia de tomar sólo amplitudes con alta relación señal/ruido.

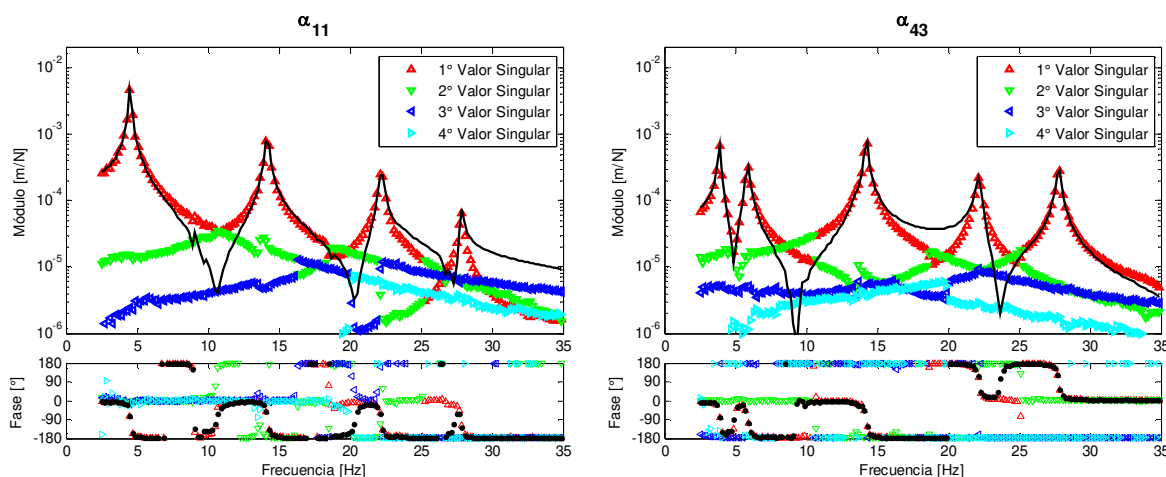


Figura 2: DVS de  $\alpha_{11}$  del pórtico original (izquierda) y de  $\alpha_{43}$  del pórtico modificado (derecha)

#### 5.4 Fracción Polinómica Matricial (FPM) + Ajuste Fino

En línea con la formulación de primer orden, la FPM se basa en una aproximación de la receptancia con la forma dada en (5) a través de la siguiente expresión:

$$[\alpha(\omega)] = [\mathbf{Q}(\omega)]^{-1} [\mathbf{R}(\omega)] = [\mathbf{C}] (i\omega [\mathbf{I}] - [\mathbf{A}])^{-1} [\mathbf{B}] \quad (11)$$

$$[\mathbf{Q}(\omega)] = [Q_0] + i\omega [Q_1] + (i\omega)^2 [Q_2] + \dots + (i\omega)^{L-1} [Q_{L-1}] + (i\omega)^L [I] \quad (12)$$

$$[\mathbf{R}(\omega)] = [R_0] + i\omega [R_1] + (i\omega)^2 [R_2] + \dots + (i\omega)^{L-1} [R_{L-1}]$$

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & \dots & [0] & -[Q_0] \\ [I] & [0] & [0] & \dots & [0] & -[Q_1] \\ [0] & [I] & [0] & \dots & [0] & -[Q_2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0] & [0] & [0] & \dots & [0] & -[Q_{L-2}] \\ [0] & [0] & [0] & \dots & [I] & -[Q_{L-1}] \end{bmatrix} \quad [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [R_0] \\ [R_1] \\ [R_2] \\ \vdots \\ [R_{L-2}] \\ [R_{L-1}] \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[\mathbf{C}] = [[0] \quad [0] \quad [0] \quad \dots \quad [0] \quad [I]]$$

La aproximación dada en (11) abandona la simetría que se observa en las formulaciones anteriores, y también podría plantearse invirtiendo el orden de los polinomios matriciales (es decir, pos-multiplicando a  $[\mathbf{R}]$  por la inversa de  $[\mathbf{Q}]$ ). Esta aproximación permite realizar la siguiente linealización para ajustar los coeficientes de ambos polinomios matriciales:

$$[\mathbf{Q}(\omega)][\alpha(\omega)] = [\mathbf{R}(\omega)] \quad \Rightarrow \quad -[\mathbf{Q}(\omega)][\alpha(\omega)] + [\mathbf{R}(\omega)] = [0] \quad (14)$$

El término independiente surge de pasar al 2° miembro el coeficiente de  $[\mathbf{Q}]$  definido como la matriz identidad para el mayor exponente en  $(i\omega)$ . Los detalles de la implementación numérica pueden encontrarse en el libro de Juang (1994). A los efectos de obtener sistemas con un buen condicionamiento numérico, se utiliza un modelo de tiempo discreto donde se reemplaza la frecuencia  $\omega$  por la variable  $z = \exp(i\omega\Delta t)$ , siendo  $\Delta t$  el incremento de tiempo de muestreo experimental. Una vez ajustados los coeficientes de los polinomios matriciales  $[\mathbf{Q}]$  y  $[\mathbf{R}]$ , se arman las matrices  $[\mathbf{A}]$ ,  $[\mathbf{B}]$  y  $[\mathbf{C}]$ , y se resuelve el siguiente problema de autovalores:

$$[\mathbf{A}][\Psi'] = [\Psi'][\tilde{\Lambda}] \quad (15)$$

De esta manera, la receptancia en (11) puede expresarse de siguiente forma:

$$[\alpha(\omega)] = [\tilde{\Psi}_R] (i\omega [I] - [\tilde{\Lambda}])^{-1} [\tilde{\Psi}_L] \quad (16)$$

$$\text{con } [\tilde{\Psi}_R] = [C][\Psi'] \quad \text{y} \quad [\tilde{\Psi}_L] = [\Psi']^{-1} [B] \quad (17)$$

La ecuación (16) resulta idéntica a la expresión (5), aunque posee autovectores por derecha que no necesariamente coinciden con los autovectores por izquierda. Esto genera la necesidad de recurrir a algún proceso de “simetrización” que permita que dichos parámetros modales se puedan representar a través de matrices físicas simétricas. La degradación en la precisión de los parámetros modales producida tanto por la linealización de las ecuaciones de ajuste como por la simetrización de las formas modales sugiere la conveniencia de plantear una etapa final de “ajuste fino” partiendo de los parámetros ya calculados y usando como funciones objetivo a las curvas experimentales de FRF. Esta etapa requiere el cálculo de las “sensibilidades” o derivadas de la receptancia dada en la expresión (5) respecto a los parámetros modales. Dichas sensibilidades se linealizan y posteriormente se procede a realizar un ajuste iterativo de los parámetros modales limitando en cada paso de iteración la tasa de cambio, a los efectos de que precisamente se mantenga la validez de las expresiones linealizadas.

## 6 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

### 6.1 Resultados de DVS + Método Inverso

Las curvas experimentales correspondientes a las primeras dos columnas de la matriz de receptancia del pórtico original se presentan en la Figura 3, junto con las curvas obtenidas con los parámetros modales ajustados con la técnica basada en la DVS, y que se incluyen en la Tabla 1. En todos los casos se observa una notable correspondencia entre los pares de curvas, incluso en torno a las antirresonancias que naturalmente se encuentran más afectadas por los ruidos experimentales. Esto también se produce para las últimas dos columnas de la matriz de receptancia que no se incluyen en este trabajo por limitaciones de espacio.

Esta técnica también se emplea en el ajuste de las curvas de FRF del pórtico modificado agregando el amortiguador de masa sintonizada. La Figura 4 presenta las curvas de las dos primeras columnas de la matriz de receptancia mientras que la Tabla 2 incluye los parámetros modales ajustados. La correspondencia observada resulta nuevamente notable. En relación a los parámetros modales, se observa que la colocación del absorbedor de vibraciones diseñado para reducir las amplitudes del modo fundamental produce el surgimiento de 2 nuevos modos con forma modales similares, mientras que los restantes modos permanecen casi inalterados.

De acuerdo de los valores identificados de amortiguamiento que se muestran en la Tabla 1, se observa que podría adoptarse un modelo de tipo histerético con un valor  $\eta = 2\xi \approx 0.6\%$  uniforme en todo el rango de frecuencias.

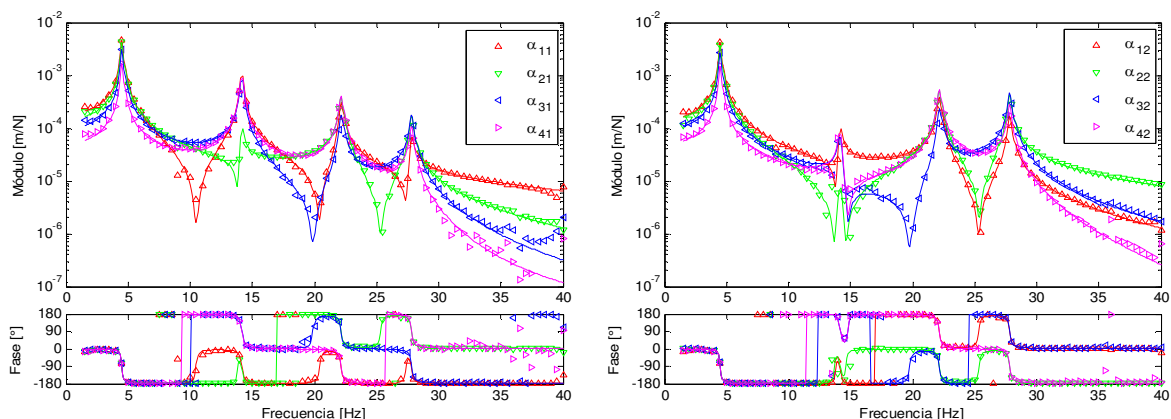


Figura 3: Curvas de receptancia experimentales (triángulos) y ajustadas (líneas continuas) del pórtico original

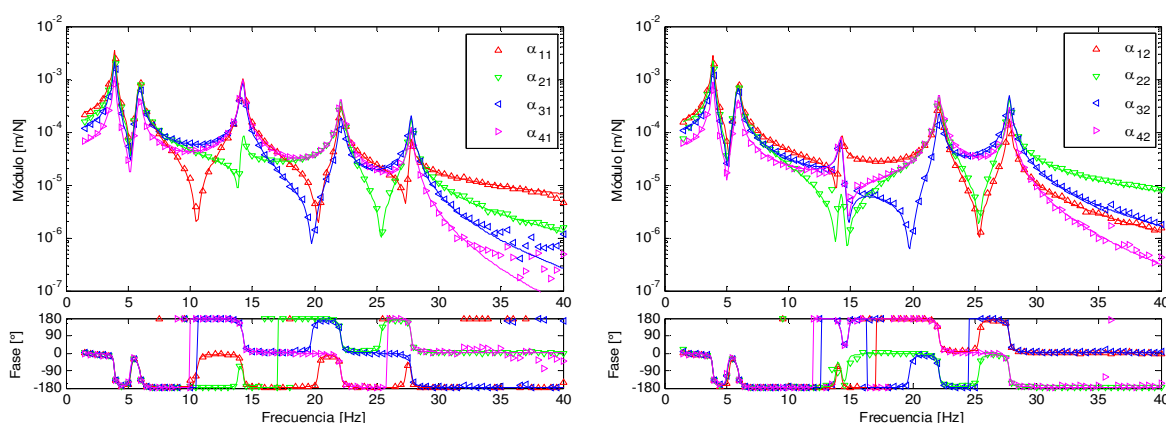


Figura 4: Curvas de receptancia experimentales (triángulos) y ajustadas (líneas continuas) del pórtico modificado

## 6.2 Resultados de FPM + Ajuste Fino

La aplicación de la técnica basada en FPM sobre los datos experimentales de la respuesta del pórtico original produce los parámetros modales que se incluyen en la [Tabla 1](#), y que son casi idénticos a los obtenidos con la técnica anterior. La [Tabla 2](#) presenta los resultados para el caso del pórtico modificado, donde esta técnica tuvo dificultades para identificar con cierta precisión los dos primeros modos, a pesar de que en otras situaciones se ha comportado de manera satisfactoria. Esto ratifica que en este campo no existe un método que resulte infalible, sino que en muchas circunstancias el método adecuado depende del caso analizado.

La comparación de curvas de receptancia experimentales y ajustadas para ambas variantes del pórtico prácticamente coincide con las mostradas en la [Figura 3](#) y en la [Figura 4](#), razón por la que no se presentan en esta sección.

## 7 COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Las formas modales tanto del pórtico original como del pórtico modificado se presentan en la [Figura 5](#) poniendo en evidencia la influencia del absorbedor dinámico sobre las mismas. En esta figura se muestran las formas modales del pórtico original en el lado izquierdo, mientras que a la derecha se presentan las formas modales asociadas al pórtico modificado. Debido a la presencia del absorbedor, el modo fundamental queda subdividido en dos modos designados 1A y 1B con deformadas similares aunque con una reducción de las componentes modales. Las frecuencias naturales de estos modos resultan 14% menor y 31% mayor, respectivamente, en relación al modo fundamental del sistema original. Las formas modales y las frecuencias naturales de los restantes modos permanecen prácticamente inalteradas.

Las últimas cuatro filas de la [Tabla 1](#) y la [Tabla 2](#) presentan diferencias porcentuales entre las frecuencias naturales y las relaciones de amortiguamiento para ambas técnicas, mientras que las formas modales se comparan mediante los parámetros denominados Diferencia Modal Normalizada (*NMD*) y Criterio de Aseguramiento Modal (*MAC*) definidos como:

$$NMD(\{\phi_i^{DVS}\}, \{\phi_j^{FPM}\}) = \sqrt{1/MAC(\{\phi_i^{DVS}\}, \{\phi_j^{FPM}\}) - 1} \quad (18)$$

$$\text{donde} \quad MAC(\{\phi_i^{DVS}\}, \{\phi_j^{FPM}\}) = \frac{|\{\phi_i^{DVS}\}^H \{\phi_j^{FPM}\}|^2}{(\{\phi_i^{DVS}\}^H \{\phi_i^{DVS}\})(\{\phi_j^{FPM}\}^H \{\phi_j^{FPM}\})} \quad (19)$$

Las diferencias entre las frecuencias naturales identificadas por ambas técnicas no superan 0.1%, excepto para los modos 1A y 1B del pórtico modificado donde las diferencias alcanzan 0.5% por las dificultades que ha presentado la FPM para ajustar estas variantes del modo fundamental. En el caso de las relaciones de amortiguamiento, las diferencias son mayores como resulta habitual, aunque no superan el 15%, excepto para el modo 1B por la razón ya indicada. El parámetro *NMD* permite definir una diferencia porcentual entre formas modales y



toma valores que no superan 1.2%, excepto para los modos 1A y 1B. La misma tendencia se observa para el parámetro *MAC*, que toma valores muy próximos a la unidad indicando una excelente correspondencia, excepto para el modo 1A.

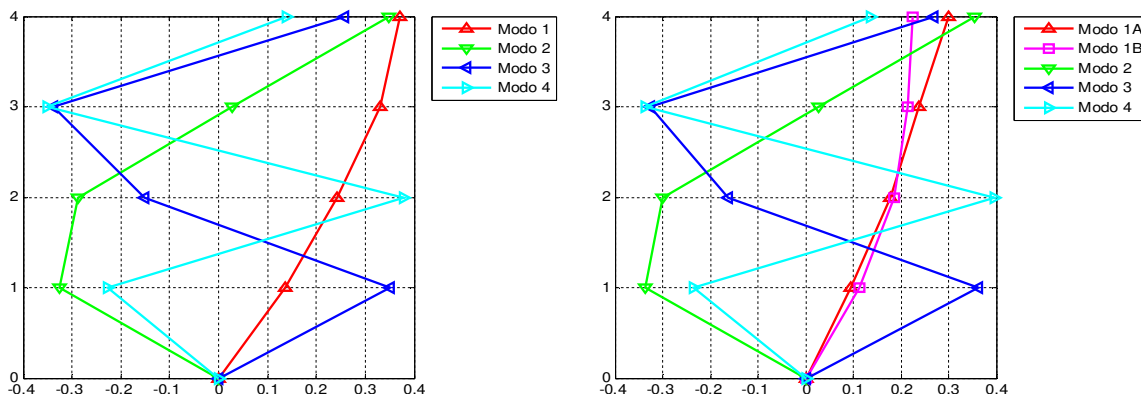


Figura 5: Formas modales identificadas (izquierda: pórtico original – derecha: pórtico modificado)

Tabla 1. Comparación de los parámetros modales correspondientes al pórtico original

	Parámetro	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
DVS + Método Inverso	$f_r$ [Hz]	4.526	14.16	22.17	27.83
	$\zeta_r$ [%]	0.410	0.310	0.284	0.238
FPM + Ajuste Fino	$f_r$ [Hz]	4.527	14.18	22.18	27.84
	$\zeta_r$ [%]	0.365	0.340	0.288	0.240
Estimadores comparativos	$\Delta f_r$ [%]	0.037	0.089	0.017	0.020
	$\Delta \zeta_r$ [%]	-11.07	9.67	1.52	0.84
	<i>NMD</i> [%]	0.564	1.144	0.294	0.378
	<i>MAC</i>	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000

Tabla 2. Comparación de los parámetros modales correspondientes al pórtico modificado

	Parámetro	Modo 1A	Modo 1B	Modo 2	Modo 3	Modo 4
DVS + Método Inverso	$f_r$ [Hz]	3.894	5.920	14.22	22.15	27.80
	$\zeta_r$ [%]	0.566	1.104	0.344	0.300	0.220
FPM + Ajuste Fino	$f_r$ [Hz]	3.916	5.886	14.23	22.16	27.80
	$\zeta_r$ [%]	0.521	2.717	0.365	0.321	0.251
Estimadores comparativos	$\Delta f_r$ [%]	0.557	-0.573	0.088	0.036	0.008
	$\Delta \zeta_r$ [%]	-7.81	146	6.17	6.83	14.41
	<i>NMD</i> [%]	17.05	3.135	0.256	0.632	0.557
	<i>MAC</i>	0.9718	0.9990	1.0000	1.0000	1.0000

A los efectos de cuantificar el grado de ajuste de las FRF experimentales que se consigue con ambas técnicas utilizadas, se define la siguiente norma de error aplicada a la diferencia de las matrices de receptancia (“exp” indica experimental, mientras “aj” indica ajustada):

$$\|\Delta\alpha\| = \sqrt{\text{promedio}(|\alpha_{\text{exp}} - \alpha_{\text{aj}}|^2)} / \text{máximo}(|\alpha_{\text{exp}}|) \quad (20)$$

La **Tabla 3** muestra los valores que adopta esta norma, donde puede observarse que la FPM produce el valor porcentual más bajo para el pórtico original, pero al mismo tiempo produce el valor más alto para el caso del pórtico modificado.

Tabla 3. Norma de error utilizada para cuantificar la precisión obtenida

	Pórtico original		Pórtico modificado	
	DVS + Aj. Fino	FPM + Met. Inv.	DVS + Aj. Fino	FPM + Met. Inv.
$\ \Delta\alpha\ $ [%]	0.332	0.249	0.974	1.253

## 8 CONCLUSIONES

El pórtico ensayado en sus versiones tanto original como modificada por la colocación de un absorbedor ha permitido la aplicación y el análisis de dos estrategias mixtas de extracción de parámetros modales que combinan técnicas bien conocidas en el campo del Análisis Modal Experimental. Ambas estrategias están basadas en el ajuste de receptancias experimentales en el dominio de la frecuencia, lo que permite la identificación de los parámetros modales de la estructura para ambas configuraciones.

La estrategia basada en la FPM tiene como ventaja que permite identificar varios modos incluso de una única curva de FRF, aunque la utilización de varias curvas proporciona mayor redundancia para una identificación más precisa de los modos. Esta técnica fue ampliamente usada por los autores, aunque en algunas situaciones ha mostrado algunas dificultades para identificar con precisión ciertos modos, como ocurre en el pórtico modificado con los modos 1A y 1B. Por otra parte, la estrategia basada en la DVS ha mostrado en general resultados más precisos, aunque se requiere contar con varias filas o columnas de la matriz de receptancia experimental para poder separar la contribución de los distintos modos para cada frecuencia, particularmente en torno a los picos de las curvas espectrales.

La combinación de técnicas desarrolladas en el ámbito de Análisis Modal Experimental ha potenciado las prestaciones individuales de cada una de ellas, mejorando el grado de ajuste final de las curvas experimentales de FRF. En efecto, la aplicación de un Ajuste Fino como etapa final de la estrategia basada en la FPM ha permitido corregir la degradación en el ajuste producida por el proceso de simetrización de las formas modales por derecha e izquierda. Por otra parte, el Método Inverso como etapa final de la estrategia basada en la DVS ha permitido identificar los parámetros modales asociados a cada modo sin las perturbaciones producidas por los restantes modos en el rango de frecuencias de análisis.

Ambas estrategias de identificación de parámetros modales muestran excelentes resultados en relación al grado de ajuste conseguido sobre las receptancias experimentales, aunque para los modos 1A y 1B del pórtico modificado el nivel conseguido con la estrategia basada en la FPM resulta sólo satisfactorio. El amortiguador de masa sintonizada se utilizó a los efectos de generar una variante del pórtico por medio de una modificación estructural. Se comprueba que la sintonización de este dispositivo con el modo fundamental disminuye su contribución a la respuesta aunque subdividiéndose en dos modos con formas modales muy parecidas, donde para el modo con frecuencia más baja el amortiguador queda en fase con la forma modal completa, y para el modo con frecuencia más alta queda en contrafase. Resulta probable que agregando los registros del movimiento de la masa del absorbedor a los datos experimentales se pueda diferenciar mejor las formas modales de ambos modos, lo que a su vez mejoraría el grado de ajuste conseguido. Esto podrá corroborarse en futuros ensayos sobre la estructura.

## REFERENCIAS

- Brincker, R. and Ventura, C.E., *Introduction to Operational Modal Analysis*, John Wiley and Sons, 2015.
- Dobson, B., *Modal Analysis Using Dynamic Stiffness Data*, Royal Naval Engineering College (RNEC), TR-84015, 1984.
- Ewins, D.J., *Modal Testing: Theory, Practice, and Application*, Research Studies Press Ltd., 2000.
- Juang, J.-N., *Applied System Identification*, PTR Prentice-Hall, Inc., New Jersey, USA, 1994.
- Maia, N.M.M. and Silva, J.M.M., *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Research Studies Press Ltd., 1997.
- Rainieri, C. and Fabbrocino, G., *Operational Modal Analysis of Civil Engineering Structures*, Springer Science, 2014.