Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXXVIII, págs. 723-732 (artículo completo)
H.G. Castro, J.L. Mroginski, R.R. Paz, M.A. Storti (Eds.)
Resistencia, 1-5 Noviembre 2021

USO DE UN PROGRAMA DE EF BASADO EN NURBS PARA RESOLVER EDP EN 2D CON FINES DIDÁCTICOS

USE OF A NURBS-BASED FE PROGRAM FOR SOLVING 2D PDE FOR TEACHING PURPOSES

Fernando G. Flores[a,b] **y Carlos F. Estrada**[b]

[a]*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología(IDIT) UNC-CONICET*

[b]*Departamento de Estructuras, FCEFYN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Velez Sarsfield 1611 , 5016 Cordoba, Argentina. fernando.flores@unc.edu.ar, carlos.estrada@unc.edu.ar,*
http://www.inv.idit.efn.uncor.edu

Palabras clave: Elementos Finitos, NURBS, Enseñanza MEF

Resumen:

En este trabajo se presentan los aspectos principales de un código de elementos finitos basado en NURBS para la solución de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales en dominios planos. Se han implementado problemas asociados con la ecuación de Helmholtz, los tres casos de elasticidad plana y flexión de placas (Mindlin). De momento no existe una interfaz gráfica para el ingreso de los datos por lo que los mismos deben escribirse en un archivo ASCII. Esto no es más complejo que la entrada de datos a través de una interfaz gráfica pues sólo se rquiere de la definición de la geometría usando macro-elementos cuadriláteros. Los resultados pueden ser analizados con un par de post-procesadores comerciales (GiD, Tecplot). El programa puede usarse en carreras de ingeniería de grado y de posgrado según el tipo de problema a resolver. Se discuten las ventajas didácticas de un código de tales características.

Keywords: Keywords: Finite Elements, NURBS, FEM teaching

Abstract:

This paper presents the main aspects of a NURBS-based finite element code for solving partial differential equations in plane domains. Problems implemented are the Helmholtz equation, the three cases of planar elasticity and plate bending (Mindlin). Presently there is not graphical interface for data entry, so the data must be written to an ASCII file. This is not more complex than data entry through a graphical interface, since it only requires geometry definition using quadrilateral macro-elements, In contrast, the results can be analyzed with a couple of commercial post-processors (GiD, Tecplot). The program can be used at graduate and undergraduate level depending on the problem to solve. Advantages for teaching purposes of a code with such characteristics are discussed.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos 15 años han tomado un enorme impulso la utilización de aproximaciones isogeométricas (Cottrel et al. (2009)) dentro del método de elementos finitos (MEF) . Esto es debido a que en el proceso de diseño lo habitual es utilizar herramientas de Diseño Asistido por Computadoras (CAD de su acrónimo en inglés) para la definición de la geometría que, en general, no utilizan los mismos parámetros para la definición de la geometría de los generadores de malla. Esto requiere una compatibilización y/o adaptación previa a la generación de la malla, que puede implicar un consumo importante de horas por parte del analista. El paradigma de isogeometria propone que la aproximación usada para la definición geométrica en el diseño sea también utilizada para la aproximación de las variables en el análisis (vía MEF). Se han escrito infinidad de trabajos orientados a mostrar la factibilidad de transferir los distintos aspectos de los programas de elementos finitos a este nuevo paradigma.

Hay indudablemente ventajas en la nueva aproximación, además de que no es necesario una adaptación de la geometría original para la discretización. Las principales son: el uso de interpolaciones de alto orden, la posibilidad de cambiar el orden de la aproximación sin necesidad de modificar la malla, una mayor velocidad de convergencia debido al orden de los polinomios, que algunos problemas de bloqueo numérico típicos de la aproximación isoparamétrica no se presentan, etc.

Hay sin embargo desventajas y/o limitaciones que necesitan de procedimientos especiales para su abordaje: los NURBS (acrónimo de “Non Uniform Rational B Splines”), que son las definiciones geométricas más comunes en los sistemas CAD, requieren mallas estructuradas; los sistemas CAD pueden generar geometrías no conformes en algunos puntos particulares, lo cual es inaceptable para el MEF; existen facilidades y aproximaciones de los sistemas CAD que implican derechos de propiedad intelectual, es decir que no se dispone de las funciones de interpolación utilizadas, entre otras cosas.

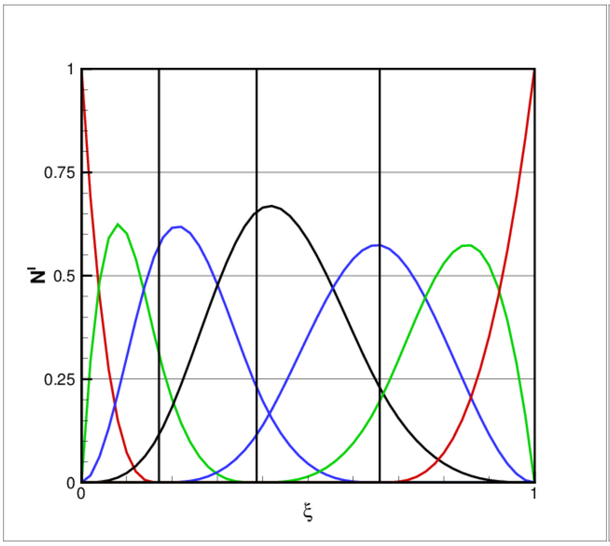
En este trabajo se plantea la posibilidad de que el estudiante/usuario tenga una primera experiencia en el uso de NURBS en el contexto del MEF, que le permita abordar problemas de geometría bidimensional, en los cuales pueda observar distintos aspectos de la discretización y el refinamiento, i.e. la influencia del orden de los polinomios utilizados y el tamaño de los elementos.

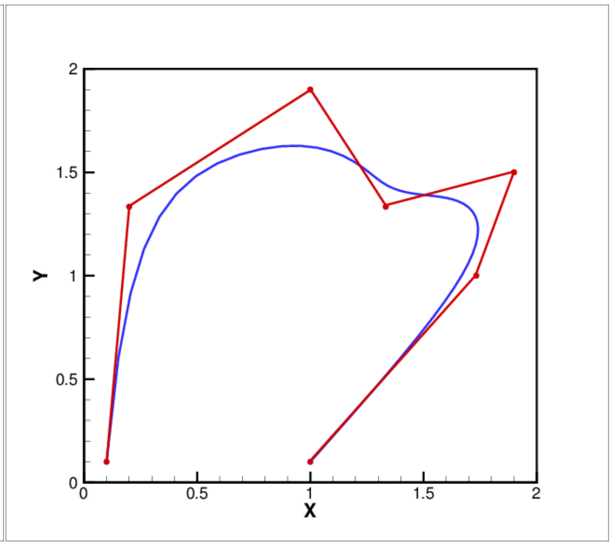
Por otro lado el programa puede ser utilizado por usuarios con un mínimo entrenamiento aunque sin conocimientos del MEF ni de las propias funciones NURBS, para resolver las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales. Por ejemplo, estudiantes de una asignatura clásica como Resistencia de Materiales, pueden evaluar la distribución de tensiones de corte en una sección transversal de una viga sometida a torsión o corte.

En la sección que sigue se describen algunas propiedades de las funciones NURBS a utilizar en el código. En la Sección 3 se describen algunos aspectos del código y en Sección 4 los problemas físicos que pueden ser abordados. En la Sección 5 se describe la entrada de datos y en Sección 6 la forma en que se aborda el postproceso. Finalmente se incluyen algunas conclusiones.

2. LAS FUNCIONES NURBS

El interesado en ahondar sobre las funciones B-Spline, las NURBS y los algoritmos para evaluarlas y derivarlas puede hacerlo en Piegl y Tyller (1997), aquí solo haremos una mínima reseña de sus características principales. Las NURBS son funciones que tienen distintas características deseables para su implementación en un código de elementos finitos, entre ellas





(a) (b)

Figura 1: B-Spline y curva NURBS

1. Las funciones se definen en un intervalo unidimensional, que puede ser normalizado o no
2. Forman una partición de la unidad, es decir la suma de las funciones de interpolación suman 1 en cualquier punto
3. Son no negativas, a diferencia de los polinomios de Lagrange ampliamente utilizados en el MEF, lo cual las hace menos sensible a las posiciones de los nudos internos de un elemento y, al considerar problemas dinámicos, los términos de la matriz de masa diagonalizada usando suma de una fila son siempre positivos.
4. Permiten fácilmente un refinamiento de tipo “h” indicando simplemente el número de subdivisiones a considerar.
5. Permiten fácilmente un refinamiento de tipo “p” indicando simplemente el orden de los polinomios a utilizar.
6. Las funciones en dos dimensiones se obtienen mediante el producto tensorial de las distintas funciones, al igual que los elementos cuadriláteros Lagrangeanos
7. Desde el punto de vista de la geometría, permiten definir en forma exacta cónicas.
8. No interpolan puntos de una curva sino que utilizan puntos de control. Los puntos de control extremos si son interpolantes

En la Figura 1.a se muestra como ejemplo la forma de las funciones (B-Spline) cúbicas ($p = 3$) en un intervalo normalizado $[0.,1]$ que se ha dividido a su vez en cuatro ($n = 4$) subintervalos donde el 4to tiene el doble de longitud que el 1ro. En cada subintervalo hay 4 ($p + 1$) funciones no nulas y entre cada subintervalo hay continuidad 2 ($p - 1$). Pueden plantearse distintos niveles de continuidad dentro de una misma parcela, pero aquí solo interesa el caso de mayor continuidad. Notar que sólo las funciones extremas valen uno en los extremos y son los únicos puntos interpolantes. Hay un total de 7 ($p + n$) funciones en el intervalo asociadas con la misma cantidad de puntos de control. En la Figura 1.b se ve una curva interpolada con dichas funciones donde se indican los 7 $(p+n)$ puntos de control y el polinomio de control que es tangente a la curva en los extremos. Notrar que si bien dentro de un intervalo y entre subintervalos se puede elegir el orden de continuidad que se desee, entre dos intervalos contiguos (no mostrado) solo hay continuidad C^0en la forma habitual del MEF. Las curvas NURBS resultan del uso de factores de ponderación (pesos w) para los puntos de control y sus funciones, lo que convierte a los polinomios B-Spline en funciones racionales con mayores posibilidades de interpolación.

En el presente esquema, para dominios bidimensionales, el dominio normalizado es un cuadrado de lado uno en función del par de coordenadas intrínseca $\xi - \eta$, en el cual las funciones asociadas con los puntos de control se obtienen por el producto tensorial de las correspondientes funciones. Esto implica que en la presente implementación el dominio debe dividirse en macro elementos cuadriláteros (4 lados de forma arbitraria) en forma similar a lo que se hace para obtener una malla estructurada de un generador.

3. DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS ASPECTOS DEL PROGRAMA,

Para la construcción del programa, escrito en FORTRAN, se han utilizado distintas características y rutinas preexistentes, entre ellas:

- Rutinas propias para el ingreso flexible de los datos. Esto permite un formato libre, partición de una línea lógica en varias físicas usando caracteres de continuación, el uso de palabras claves con parámetros asociados, el uso de comentarios, de tal forma de que la entrada de datos sea amigable y fácilmente documentada.

- En la estructura de datos se usan listas vinculadas o enlazadas. Esto permite asignar memoria en forma dinámica a medida que se leen los datos, y una vez leídos todos los datos generar internamente los arreglos que sea necesario o conveniente manejarlos como tales y no como listas. En general dentro del programa coexisten ambas estructuras en función de la conveniencia de usar una u otra.

- Un módulo de rutinas para la evaluación de las funciones NURBS y sus derivadas, escritas en FORTRAN a partir de los algoritmos presentes en Piegl y Tyller (1997) con algunas modificaciones.

- La base de datos contiene por un lado los parámetros que definen la geometría del problema: sus puntos de control, curvas NURBS y macro elementos, y por otro las subdivisiones de los macro elementos, que no requieren nuevos puntos de control, ni definición de curvas. Notar que no resulta necesario obtener la posición de los nuevos puntos de control ni curvas interiores ya que toda medida geométrica (e.g. jacobiano) se obtienen de la aproximación geométrica.

- En el caso de la distribución de tensiones de corte debido a un esfuerzo de corte en flexión hay un pre-proceso previo que requiere la evaluación de las propiedades geométricas de la sección (área, momentos de inercia, direcciones principales de inercia), donde además el usuario debe indicar simetrías consideradas para una correcta interpretación de la geometría dato.

- Rutinas para la renumeración de los nudos a los fines de minimizar el perfil (skyline) del sistema de ecuaciones.

- Rutina para resolver en forma directa, en memoria, un sistema de ecuaciones simétrico definido positivo (`COLSOL`, Bathe y Wilson (1976)) usando almacenamiento compacto y esquema reducido de columnas.
- Para el cálculo de las matrices de coeficientes dentro de cada subdivisión se ha utilizado integración numérica, donde en cada dirección local (ξ o η) el número de puntos depende del orden de los polinomios p utilizados. Aquí se ha utilizado $\frac{(p-1)^2}{2}+1$ y un mínimo de 2 puntos. No se ha hecho énfasis en optimizar este aspecto, sino simplemente que las matrices y vectores resulten correctamente integrados.

4. PROBLEMAS ABORDADOS EN EL CÓDIGO

Las ecuaciones diferenciales que pueden resolverse con el código son lineales de segundo orden en un dominio plano con continuidad C^0 para la incógnita principal. Básicamente se ha incluido la posibilidad de resolver las ecuaciones diferenciales que permiten analizar los siguientes problemas:

- Ecuación de Helmholtz con una variable escalar, que puede asociarse a distintos problemas físicos dependiendo del significado que se le den a los coeficientes, el tratamiento de los términos de fuente y a sus condiciones de borde
  1. flujo potencial, usando ya sea la carga hidráulica o la línea de corriente como variable,
  2. flujo en un medio poroso,
  3. flujo del calor,
  4. torsión sin restricción de alabeo usando la función de alabeo o la función de tensión,
  5. distribución de tensiones de corte en flexión debido a un esfuerzo de corte.
- Elasticidad bidimensional con una variable vectorial de dos componentes, incluyendo los tres casos típicos:
  1. tensión plana,
  2. deformación plana,
  3. sólidos axilsimétricos.
- Flexión de placas planas incluyendo deformaciones de corte transversales (aproximación de Mindlin-Reissner o teoría de placas con deformaciones de corte de primer orden), que implica una variable escalar (el desplazamiento transversal) y una variable vectorial con dos componentes (el giro de la fibra normal a la placa). En la aproximación habitual del MEF, este tipo de problemas requiere aproximaciones especiales para evitar el bloqueo por cortante. Aquí no resulta necesario ningún procedimiento especial en la medida de que se utilicen al menos polinomios de orden cúbico.

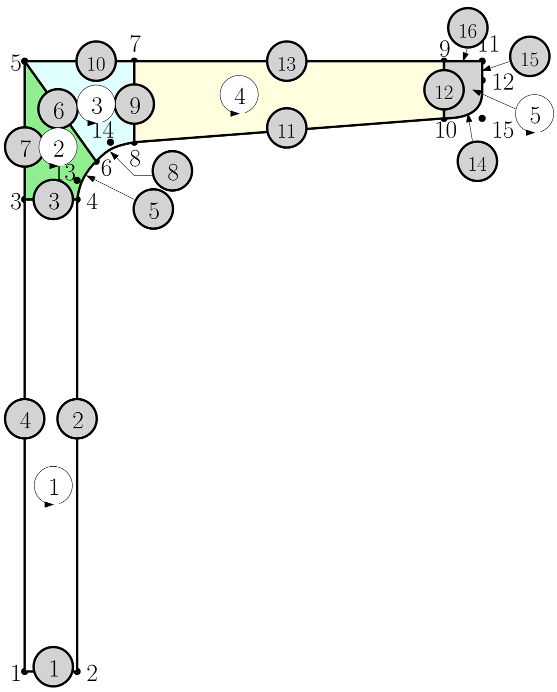
Naturalmente que sería posible abordar otros problemas con este código en la medida de que sean de las mismas características, es decir lineales, de continuidad C^0, sobre un dominio bidimensional. La programación de un problema diferente es simple ya que implica unos pocos cambios en los cuales se tenga en cuenta la matriz “constitutiva” $\mathbf{D}$ y matriz $\mathbf{B}$ que relaciona el gradiente de la(s) variable(s) con los valores nodales, los términos de fuente y la salida de resultados.

5. ENTRADA DE DATOS

En general la definición de la geometría del problema y el resto de los datos necesarios para la definición del modelo numérico es conveniente y más amigable realizarla con una interfaz gráfica. En este caso la programación de dicha interfaz no se ha hecho todavía, por lo cual los datos deben incluirse en un archivo ASCII. Aunque en principio esto parezca engorroso no lo es tanto debido a que los datos necesarios no difieren de los que deben introducirse a través de una interfaz. La ventaja de la interfaz es que uno inmediatamente puede ver las distintas partes de la geometría que va introduciendo y hay una mejor guía en los datos necesarios.

Para aliviar el trabajo la sintaxis de la entrada de datos del archivo ASCII es flexible y utiliza palabras clave a los fines de hacer más amigable la generación, lectura y modificación del archivo de datos. Para mostrar esto usaremos un ejemplo. Se trata de la sección transversal de un perfil UPN. En la Figura 2 se muestra la mitad del perfil debido a simetría, el que ha sido divido en 5 macro elementos de 4 lados. Se indica con:

- puntos ● y números los puntos de control
- con círculos encerrando números las curvas NURBS
- arcos de círculo cuasi cerrados y números las parcelas o macro elementos en las que se ha dividido el dominio limitados cada una por cuatro curvas NURBS.



```
CONTROl_points  GSCALE = 1.000
  1      0.00      0.00   1.
  2      8.50      0.00   1.
  3      0.00     75.50   1.
  4      8.50     75.50   1.
  5      0.00    100.00   1.
  6     11.87     83.63   1.
  7     20.00    100.00   1.
  8     20.00     87.00   1.
  9     69.00    100.00   1.
 10     69.00     90.92   1.
 11     75.00    100.00   1.
 12     75.00     96.92   1.
 13      8.50     80.26   0.9239
 14     14.83     86.59   0.9384
 15     75.00     90.44   0.7348
END_CONtrol_points
```

Figura 2: Geometría de un perfil UPN

A la izquierda se muestra como es la entrada de datos de los 15 puntos de control, los cuales pueden etiquetarse con cualquier número natural e incluirse en cualquier orden, tampoco es necesario indicar previamente la cantidad de puntos a leer, en tanto que el formato es libre y el peso es opcional. Esto va precedido por un encabezamiento donde se indica el tipo de problema, propiedades de los materiales a utilizar y datos generales. En este caso lo relevante es el factor $G\theta$ (módulo de elasticidad transversal por el ángulo específico de torsión). Definidos los puntos de control las curvas NURBS se definen indicando el vector de nodos asociado y los puntos de control correspondientes.

```
CURVES
  NURBS_Curve  1 KNOT_VEctor 1    N_SPAN  4  P_ORDER 3  RATIO 1.5
   2      1
  NURBS_Curve  2 KNOT_VEctor 1    N_SPAN  8  P_ORDER 3  RATIO 1.5
   4      2
  NURBS_Curve  3 KNOT_VEctor 1
   4      3
  NURBS_Curve  4 KNOT_VEctor 1
   3      1
  NURBS_Curve  5 KNOT_VEctor 2    N_SPAN  8  P_ORDER 3  RATIO 1.0
   6  13  4
  NURBS_Curve  6 KNOT_VEctor 1
   6      5
  NURBS_Curve  7 KNOT_VEctor 1
   5      3
  NURBS_Curve  8 KNOT_VEctor 2    N_SPAN  8  P_ORDER 3  RATIO 1.0
   8  14  6
  NURBS_Curve  9 KNOT_VEctor 1
   8      7
  NURBS_Curve 10 KNOT_VEctor 1
   7      5
  NURBS_Curve 11 KNOT_VEctor 1   N_SPAN 10  P_ORDER 3  RATIO 1.0
   10     8
  NURBS_Curve 12 KNOT_VEctor 1
   10     9
  NURBS_Curve 13 KNOT_VEctor 1
    9     7
  NURBS_Curve 14 KNOT_VEctor 2   N_SPAN  4  P_ORDER 3  RATIO 1.25
   12 15 10
  NURBS_Curve 15 KNOT_VEctor 1
   12    11
  NURBS_Curve 16 KNOT_VEctor 1
   11     9
END_CURVES
```

Allí, además, es necesario introducir dos aspectos asociados ya no a la geometría sino al cálculo, el primero es la partición deseada para cada curva (`N_SPAN`) que indica la cantidad de subdivisiones a realizar en ella, en forma similar a lo que se haría en un mallado estructurado, que aquí lo hace el programa en forma automática y que podría asimilarse a un refinamiento "h", y por otro el orden del polinomio (`P_ORDER`) a utilizar a lo largo de la curva, que podría asimilarse a un refinamiento "p" y que debe ser al menos el orden usado en la definición geométrica. Adicionalmente se puede graduar la distribución de las subdivisiones a lo largo de la curva usando el parámetro RATIO que indica la relación entre las longitudes de la úlitma subdivisión y la primera. Notar que no es necesario que estos parámetros para el análisis se den para todos los lados, debido a que los lados opuestos de cada parcela deben tener el mismo orden de polinomio y subdivisión lo que se trasmite a las parcelas vecinas como en cualquier malla estructurada.

La definición de la geometría se completa con las conectividades de los macro elementos, que son las etiquetas de las cuatro curvas que la circundan ordenadas en sentido antihorario (cuatro primeros valores) y el material asociado (último valor) como se indica a continuación:

```
PATCHEs
  PATCH_Label : 1
       1  2  3  4   1
  PATCH_Label : 2
       5  6  7  3   1
  PATCH_Label : 3
       8  9 10  6   1
```

```
  PATCH_Label : 4
      11 12 13  9   1
  PATCH_Label : 2
      14 15 16 12   1
END_PATches
```

El programa chequea internamente la compatibilidad de las subdivisiones de los lados entre macro elementos (usa la mayor indicada) y similarmente con el orden de los polinomios.

Finalmente, para completar el modelo, se indican las condiciones de contorno (naturales y esenciales). En el tipo de problema ejemplo solo hay esenciales y en este caso en particular se debe indicar que en la línea de simetría el alabeo es nulo (en la curva `1`, la variable escalar es conocida, lo que indica con un `1` y el valor es `0.00`). En el contorno con condiciones naturales el flujo normal es nulo y no requiere ser especificado.

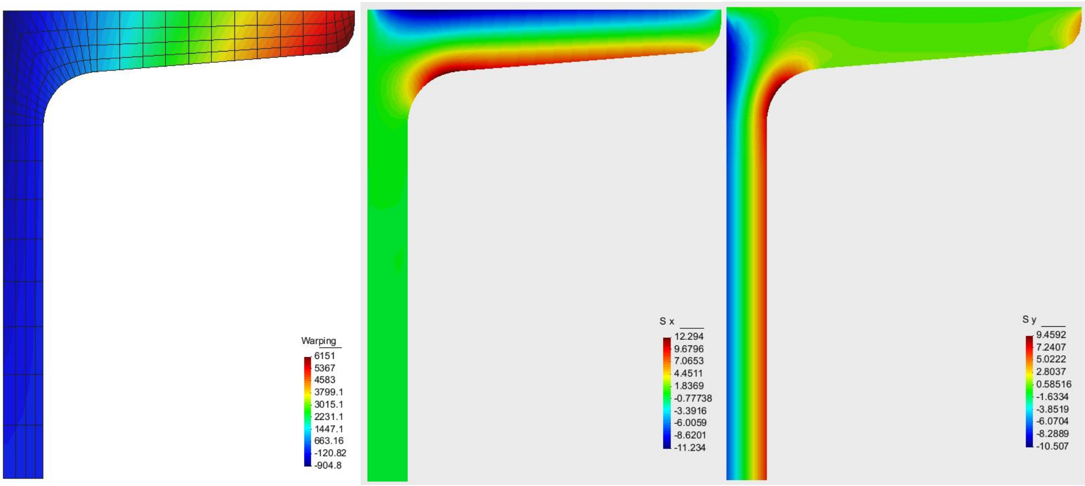
```
BOUNDAry_conditions
  ESSENTial
    SIDES
      1 1 0.00
    END_SIDes
  END_ESSential
END_BOUndary_conditions
```

6. POSTPROCESO Y PRÁCTICA

Para el postproceso se han considerado dos programas comerciales GiD-15.0. (2021) y Tecplot (2005). En ambos casos se utilizaron elementos cuadriláteros de cuadro nudos coincidentes con las subdivisiones utilizadas para los macro-elementos. Las posiciones de los nudos no son los puntos de control si no los que resultan de la aproximación NURBS. Naturalmente las variables principales del problema se pasan en los nudos y, al igual que las coordenadas, resultan de la interpolación NURBS, no son las incógnitas obtenidas al resolver el sistema de ecuaciones. En cuanto a las variables de flujo, en el caso de GiD se ha preferido pasarlas en los lugares correspondientes a los 9 puntos de Gauss correspondientes al elemento isoparamétrico estándar, que solo corresponden a los puntos de integración usados por el programa cuando se usa $p = 3$ en ambos sentidos. En general la precisión del programa es mejor que los resultados provistos a GiD, pero la utilizada ha sido una solución simple y conveniente. En el caso de Tecplot todos los resultados se guardan en los nudos, por lo que los flujos en los puntos interiores a un macro elemento se evalúan directamente allí, en tanto que los puntos en el contorno requieren de un promediado entre los elementos que los comparten.

Se ha escrito un pequeño manual que describe el detalle de la entrada de datos y se han escrito dos tutoriales que detalla como instalar los programas necesarios, como realizar un modelo (varios ejemplos), correr el programa y analizar los resultados en el postprocesador GiD. Los tutoriales corresponden a dos tipos de problemas:

- Elasticidad 2D, orientado a estudiantes de grado que toman un curso de elasticidad que incluye un capítulo dedicado a los fundamentos del MEF, que luego pueden usarlo para resolver problemas de placas. Desde el punto de vistas del modelo, además de la geometría, lo más importante aquí es la introducción de las condiciones de contorno que requiere una comprensión detallada de su significado y por ello la necesidad de haber tomado un curso de elasticidad.



(a) Alabeo (b) τ_{zx} (c) τ_{zy}

Figura 3: Resultados torsión UPN usando función de alabeo

- Determinación de distribución de tensiones de corte en una sección debidas a esfuerzo de corte y debidas a torsión de Saint Venant. Orientado a estudiantes que han tomado un curso de Resistencia de Materiales, y que no conocen los fundamentos del MEF. En este caso se hace particular énfasis en la elección de las condiciones de contorno esenciales que se asocia a condiciones de simetría y antisimetría, necesarias para la construcción correcta del modelo numérico. Y en el caso de no haber condiciones de simetría/antisimetría la necesidad de imponer el valor de la variable en un punto.

Ambos tutoriales pueden ser utilizados por estudiantes de un curso de posgrado sobre el MEF

En la Figura 3 se muestran resultados para el ejemplo descripto antes, puede observarse en (a) la subdivisión utilizada para el cálculo y el postproceso, además del valor de la variable principal del problema que en este caso es el alabeo de la sección. En la Figura 3.b-c se muestran las variables de “flujo” que en este caso corresponden con las componentes cartesianas de las tensiones de corte que son el objetivo principal del problema. Allí puede observarse la variación cuasi lineal de las mismas en el espesor del perfil.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha intentado mostrar que es posible utilizar un programa de elementos finitos basado en NURBS para que los estudiantes hagan práctica y experiencia con un método numérico avanzado sin tener un conocimiento detallado de sus fundamentos. Los requisitos para el uso del programa en este caso son:

- ser capaces de definir su geometría, que en general requiere:
  - la subdivisión del dominio en macro elementos de 4 lados curvos
  - definición de lineas rectas y curvas cónicas (arcos de círculo o elipse) y
  - la determinación de los puntos de control y sus pesos (casos simples)
- Reconocer las condiciones de contorno asociadas en general con las curvas NURBS y eventualmente con puntos de control, lo cual depende de los problemas a resolver

- para problemas de torsión y corte solo se requiere reconocer condiciones de simetría/antisimetría, es decir aspectos principalmente geométricos accesibles para un alumno que no ha alcanzado la mitad de su carrera
- para problemas de elasticidad y placas requiere de aspectos conceptuales asociados con la física del problema, al igual que en el caso de querer obtener el flujo en un medio poroso o transmisión del calor. En todos estos casos necesariamente debe haber conocimientos previos de los correspondientes cursos de grado.

- El aprendizaje de los rudimentos de un programa de postproceso para analizar los resultados

En contrapartida el estudiante podrá:

- desarrollar habilidades para modelado geométrico y uso de programas
- distinguir entre tipos de refinamiento
- comparar resultados detallados con fórmulas simplificadas
- comprender las consecuencias de las condiciones de contorno impuestas

REFERENCIAS

Bathe K. y Wilson E. *Numerical Methods in finite element analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1976.

Cottrel J., Hughes T., y Bazilevs Y. *Isogeometric Analysis, Towards Integration of CAD and FEa*. Wiley, Chichester, Reino Unido, 2009.

GiD-15.0. *The personal pre and post processor*. International Center for Numerical Methods in Engineering, UPC, Barcelona, 2021.

Piegl L. y Tyller W. *The NURBS book, 2da Ed.* Springer-Verlag, Berlin, Alemania, 1997.

Tecplot. *Tecplot 10 Release 6*. Tecplot, Inc. Bellevue, Washington, EEUU, 2005.