

## USO DE MÉTODOS LINEALES DE MÚLTIPLES ETAPAS PARA LA INTEGRACIÓN TEMPORAL DEL SISTEMA VLASOV-POISSON

### USING LINEAR MULTISTEP METHODS FOR THE TIME INTEGRATION OF THE VLASOV-POISSON EQUATIONS

Denis Lorenzon<sup>a</sup> y Sergio A. Elaskar<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT), CONICET - Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba X5016GCA, Argentina. <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu/>*

<sup>b</sup>*Departamento de Aeronáutica, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (FCEFYN), Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba X5016GCA, Argentina. <https://fcefy.unc.edu.ar/>*

**Palabras clave:** plasma, Vlasov-Poisson, volúmenes finitos, Adams-Bashforth.

**Resumen.** La ecuación de Vlasov describe la evolución temporal de la función de distribución de las partículas que componen un plasma no colisional, es decir, cuando la dinámica está gobernada por interacciones electromagnéticas de largo alcance. De entre los numerosos métodos numéricos desarrollados para la solución del sistema Vlasov-Poisson, se destacan los de volúmenes finitos de alto orden sin splitting. Tradicionalmente, la integración temporal del sistema de ecuaciones ordinarias resultantes luego de la discretización espacial se lleva a cabo mediante esquemas de tipo Runge-Kutta (RK). En este artículo se implementan, para tratar el avance en el tiempo, métodos lineales de múltiples etapas explícitos y predictores-correctores (también llamados de Adams). A diferencia de los RK, éstos consiguen órdenes superiores al usar información de un número de pasos de tiempo anteriores, lo que permite, en algunos casos, reducir el tiempo de cómputo. La precisión y el costo computacional los integradores temporales se evalúa y compara mediante la simulación de problemas de prueba clásicos para el sistema Vlasov-Poisson bidimensional.

**Keywords:** plasma, Vlasov-Poisson, finite volume, linear multistep methods.

**Abstract.** The Vlasov equation describes the time evolution of the particles distribution function in a collisionless plasma, that is, when the dynamics is governed by long-range electromagnetic interactions. Among the numerous numerical methods developed for the solution of the Vlasov-Poisson system, we highlight those based on high order finite volumes without splitting. Traditionally, the temporal integration of the ODE system resulting after spatial discretization is carried out through Runge-Kutta (RK) schemes. In this article, explicit linear multistep and predictor-corrector methods (also called Adams methods) are implemented to address the time stepping. Unlike RK schemes, they achieve higher orders by using information from a number of previous time steps, which, in some cases, may reduce computation time. The accuracy and computational cost of these ODE solvers is evaluated and compared by the simulation of classical benchmark problems for the two-dimensional Vlasov-Poisson system.

## 1. INTRODUCCIÓN

La ecuación de Vlasov es fundamental en el marco de la teoría cinética de plasmas, ya que describe la evolución temporal de la función de distribución de las partículas cuando los efectos colisionales son despreciados. Los plasmas astrofísicos y de laboratorio pueden considerarse no colisionales en muchas situaciones donde la dinámica está gobernada por interacciones electromagnéticas de largo alcance, como es el caso de plasmas calientes y poco densos (Chen, 2016; Conde, 2018). Los campos electromagnéticos auto generados se determinan, en general, por medio de las ecuaciones de Maxwell usando las densidades de carga y corriente como fuentes. No obstante, cuando los campos magnéticos, tanto externos como auto generados, son despreciables, el campo electrostático se puede calcular a partir de la ecuación de Poisson en el caso no relativista.

El tratamiento numérico de la ecuación de Vlasov se lleva a cabo usualmente mediante métodos de dos clases: los particle-in-cell (PIC) (Birdsall y Langdon, 2005), que son los más ampliamente usados, y los Eulerianos (Lorenzon y Elaskar, 2019; Lorenzon et al., 2021), también llamados directos o basados en grillas. El enfoque de este trabajo está dirigido hacia los segundos, los cuales no sufren del ruido estadístico característico de los PIC y permiten obtener alta precisión, aunque a un costo computacional mayor. Un miembro reciente de la familia de métodos Eulerianos, son los esquemas sin splitting dimensional basados en volúmenes finitos (FV) de alto orden (Banks y Hittinger, 2010; Colella et al., 2011). La originalidad de este enfoque reside en expresar la integral del producto entre dos cantidades en función del producto de las integrales de cada variable por separado, lo cual permite obtener fácilmente aproximaciones de alto orden de los flujos (Crouseilles et al., 2012; Vogman et al., 2014). La discretización del espacio de fases conduce a una formulación semi discreta de la ecuación de Vlasov, y el sistema de ecuaciones ordinarias (ODE) resultante es integrado en el tiempo usando, tradicionalmente, esquemas de tipo Runge-Kutta (RK).

En el presente artículo se implementan, para tratar el avance en el tiempo, métodos lineales de múltiples pasos explícitos y predictores-correctores (Butcher, 2008; Bashforth y Adams, 1883). Éstos intentan ganar eficiencia utilizando la información de un cierto número de pasos de tiempo anteriores, en lugar de descartarla, como hacen los métodos de un solo paso como los RK. Si bien la aplicación de los métodos de múltiples pasos ha disminuido recientemente, siguen siendo particularmente convenientes para la búsqueda de soluciones suaves con buena precisión cuando se tienen muchas ecuaciones o cuando los costos son muy costosos computacionalmente (Press, 2007).

El trabajo se organiza de la manera siguiente. En la Sección 2 se introducen las ecuaciones que describen la cinética no colisional de plasmas en el límite electrostático. Los métodos numéricos Eulerianos basados en volúmenes finitos de alto orden se exponen sintéticamente en la Sección 3. La precisión, estabilidad y costo computacional de los distintos integradores temporales se analizan y comparan en la Sección 4, mediante la simulación de dos problemas de pruebas clásicos para el sistema Vlasov-Poisson. Finalmente, algunas conclusiones son sacadas en la Sección 5.

## 2. ECUACIONES DE LA CINÉTICA DE PLASMAS

Dentro del marco de la teoría cinética de plasmas, cada especie de partículas está representada por una función de distribución de densidad de partículas instantánea en el espacio de fases  $\mathbf{x}$ - $\mathbf{v}$ , denotada como  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ . Al despreciar las colisiones binarias, las partículas no se crean ni destruyen y la función  $f$  obedece una ley de continuidad en el espacio de fases conocida co-

mo ecuación de Vlasov. Si se restringe el movimiento a una dimensión en el espacio físico ( $x$ ) y una en el de velocidades ( $v$ ), y además, se consideran despreciables los efectos magnéticos y relativistas, entonces la ecuación de Vlasov se escribe:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + a \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (1)$$

donde la aceleración  $a$  es la debida la fuerza de Lorentz, esto es:

$$a = \frac{q}{m} E(t, x). \quad (2)$$

El campo electrostático auto generado ( $E$ ) a introducir en la fuerza de Lorentz se determina mediante la solución de la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(t, x), \quad (3)$$

siendo  $\rho(t, x)$  la densidad de carga eléctrica neta obtenida tomando momentos de la función de distribución, es decir, integrando  $f(t, x, v)$  sobre el espacio de velocidades:

$$\rho(t, x) = \sum_s q_s \int_{-\infty}^{\infty} f_s(t, x, v) dv. \quad (4)$$

El subíndice  $s$  denota que se trata de la cantidad correspondiente a la especie  $s$ , y la sumatoria se realiza sobre todas las especies que componen el plasma. Por otro lado, el potencial electrostático  $\phi(t, x)$ , se define a partir del campo eléctrico como sigue:

$$E(t, x) = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (5)$$

Como simplificación adicional, se considera que el plasma está compuesto por electrones e iones positivos, y se supone que los iones están estacionarios y distribuidos uniformemente en el espacio, mientras que los electrones pueden responder libremente a las fuerzas de interacción.

### 3. MÉTODOS EULERIANOS DE VOLÚMENES FINITOS

Los esquemas conservativos para la ecuación de Vlasov se combinaban, frecuentemente, con la técnica de splitting dimensional (Fijalkow, 1999; Filbet et al., 2001), sin embargo, este procedimiento puede resultar poco apropiado para el tratamiento de problemas no lineales (Huot et al., 2003; Crouseilles et al., 2010). Por ello, cobran interés los esquemas basados en volúmenes finitos de alto orden sin splitting (Banks y Hittinger, 2010; Vogman et al., 2014), los cuales son conservativos por naturaleza y pueden extenderse fácilmente al número requerido de dimensiones y al orden deseado tanto en el espacio como en el tiempo. Una desventaja que presentan, es que el paso de tiempo para el avance temporal está restringido por cuestiones de estabilidad.

Los métodos FV se fundamentan en que, dentro de cada celda que discretiza el dominio, la función de distribución satisface la ley de continuidad dada por la ecuación de Vlasov en su forma conservativa débil:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} f(t, x, v) d\Omega + \oint_{\sigma} \mathbf{F}(t, x, v, f) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (6)$$

donde

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} vf \\ af \end{bmatrix}, \quad d\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} dv \\ dx \end{bmatrix}. \quad (7)$$

La celda centrada en el punto  $(x_i, v_k)$  del espacio de fases se denota como  $\Omega_{i,k}$ . Integrando la Eq. 6 sobre la celda  $\Omega_{i,k}$ , y dividiendo por su volumen  $\Delta x \Delta v$ , resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_{i,k}^n = & -\frac{1}{\Delta x} \left( \langle F_x \rangle_{i+\frac{1}{2},k} - \langle F_x \rangle_{i-\frac{1}{2},k} \right) \\ & -\frac{1}{\Delta v} \left( \langle F_v \rangle_{i,k+\frac{1}{2}} - \langle F_v \rangle_{i,k-\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

donde los corchetes  $\langle F \rangle$  representan cantidades promediadas sobre las superficies rectangulares y ortogonales que componen la frontera de la celda.

Las componentes del flujo en cada dirección, en cualquier sistema de coordenadas, se escriben como el producto de la función de distribución por la velocidad de advección en esa dirección. Por lo tanto, para calcular los flujos promediados sobre las caras de la celda es necesario, por un lado, aproximar la integral del producto entre dos cantidades y, por otro lado, aproximar valores integrados sobre las caras a partir de las variables primarias, que son valores de  $f$  promedios sobre el volumen las celdas.

### Integral del producto entre dos cantidades

Las relaciones entre valores puntuales e integrales de superficie de dos cantidades  $f$  y  $g$  se derivan expandiendo dichas funciones en series de Taylor en torno al centro de la cara  $\sigma_{i+\frac{1}{2},k}$ , e integrando luego sobre la superficie de la cara. Mediante este procedimiento se obtienen expresiones de la forma

$$\langle f \rangle_{i+\frac{1}{2},k} = \int_{\sigma_{i+\frac{1}{2},k}} f dv = f_{i+\frac{1}{2},k} + \frac{1}{24} \Delta v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \mathcal{O}(\Delta v^4), \quad (9)$$

$$\langle fg \rangle_{i+\frac{1}{2},k} = \int_{\sigma_{i+\frac{1}{2},k}} fg dv = f_{i+\frac{1}{2},k} g_{i+\frac{1}{2},k} + \frac{1}{24} \Delta v^2 \frac{\partial^2 (fg)}{\partial v^2} + \mathcal{O}(\Delta v^4). \quad (10)$$

### Interpolación polinómica 1D

Para conseguir valores de  $f$  promediados sobre la superficie de la cara  $\langle f \rangle_{i+\frac{1}{2},k}$  con base en los promedios de  $f$  sobre el volumen de las celdas  $f_{i,k}^n$ , se emplea una reconstrucción polinómica de la solución. Para ello, es necesario encontrar los coeficientes que definen al polinomio interpolante en cada intervalo mediante la evaluación de un conjunto de condiciones de interpolación obtenidas por integración sobre las celdas que rodean a la cara en cuestión. Llamaremos UP3 y UP5 a las reconstrucciones obtenidas con polinomios de segundo y cuarto orden, integrados sobre los stencil laterales *upwind* de 3 y 5 celdas, respectivamente. La reconstrucción UP3 se escribe:

$$\begin{aligned} UP3 (v_k > 0) : \\ \langle f \rangle_{i+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{6} (-f_{i-1,k} + 5f_{i,k} + 2f_{i+1,k}) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} UP3 (v_k < 0) : \\ \langle f \rangle_{i+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{6} (2f_{i,k} + 5f_{i+1,k} - f_{i+2,k}) \end{aligned} \quad (12)$$

Notar que el stencil requerido para una reconstrucción lateral de tipo upwind depende de la dirección en la que se propaga la información, esto es, del signo de la velocidad de advección en esa dimensión.

### 3.1. Avance en el tiempo

Una vez realizada la discretización espacial y aproximados los flujos, se obtiene una formulación semi discreta de la ecuación de Vlasov (la variable temporal permanece continua) para cada celda, en la que el valor de la variable primaria depende de los valores promediados de  $f$  en las celdas circundantes. El problema de valores iniciales se reduce a resolver este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas, de la forma:

$$\frac{d}{dt} f_{i,k} = r h s_{i,k}(t, f), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad k = 0, 1, \dots, N_v \quad (13)$$

donde los lados derechos  $r h s_{i,k}$  se determinan en cada paso de tiempo a partir de valores conocidos de la función de distribución y del campo eléctrico.

De entre las numerosas familias de métodos numéricos, explícitos e implícitos, para la resolución de ODEs, se analizan y comparan los de Runge-Kutta y los de múltiples pasos.

### Métodos de Runge-Kutta

Dentro de un mismo intervalo de tiempo, calculan cierto número de lados derechos intermedios y los combinan de manera tal que proporcione una aproximación de alto orden. Los métodos RK, en particular aquellos de alto orden con estimación del error de truncamiento local y paso de tiempo adaptativo, siguen siendo no sólo la alternativa más ampliamente usada, sino también la más efectiva cuando se requiere precisión moderada y los lados derechos no son extremadamente costosos (Press, 2007). Todos los métodos RK, aplicados a la Ec. 13, pueden escribirse de la siguiente forma genérica:

$$f^{n+1} = f^n + \Delta t \sum_{i=1}^S b_i k_i, \quad (14)$$

donde los  $k_i$  representan los lados derechos en las etapas intermedias:

$$k_i = r h s \left( t^n + c_i \Delta t, f^n + \Delta t \sum_{j=1}^S a_{ij} k_j \right). \quad (15)$$

Los coeficientes  $b_i$ ,  $a_{ij}$  y  $c_i$  caracterizan a cada método particular y suelen escribirse de una forma bien conocida llamada tabla de Butcher. Si la matriz formada por los  $a_{ij}$  es triangular inferior, entonces el método es explícito. Los métodos conocidos como *embedded* están diseñados para producir una estimación del error de truncamiento local de un paso y, como resultado, posibilitan acotar el error adaptando el tamaño del  $\Delta t$ . Para ello, integran dos métodos con los mismos coeficientes  $a_{ij}$ , uno de orden  $p$  y otro de orden  $p - 1$ .

En este trabajo implementamos y comparamos seis miembros de la familia RK: el método de Heun de segundo orden con dos etapas (RK2), el de Ralston de tercer orden con tres etapas (RK3), el esquema clásico de cuarto orden con cuatro etapas (RK4), el método *embedded* de Bogacki-Shampine de tercer orden con cuatro etapas (RK324), el de Fehlberg de quinto orden con seis etapas (RK546) y el de Dormand-Prince de quinto orden con siete etapas (RK547). Descripciones detalladas y las tablas de Butcher de cada uno pueden verse en Butcher (2008).

### Métodos lineales de pasos múltiples (*multistep*)

Intentan ganar eficiencia manteniendo los valores de las variables primarias y de los lados derechos obtenidos en pasos de tiempo anteriores, y luego, haciendo una combinación lineal de ellos de manera tal que proporcione una aproximación de orden superior. Es usual, al emplear este tipo de métodos, corregir la predicción extrapolada usando el lado derecho calculado en el nuevo punto. Por esta razón, suelen llamarse genéricamente métodos predictores-correctores (Henrici, 1962). Al no requerir la evaluación del  $rhs(t, f)$  en etapas intermedias dentro de cada intervalo de tiempo, éstos se vuelven particularmente atractivos para tratar problemas donde el cálculo de los lados derechos es muy complejo o, como en este caso, cuando se tiene un número muy grande de ecuaciones. Si las soluciones que se persiguen son suaves, los métodos predictores-correctores han mostrado ser más eficientes computacionalmente que los RK (Press, 2007). Sin embargo, la situación se puede revertir cuando el problema no es lo suficientemente suave ya que el tamaño máximo del paso de tiempo puede verse severamente condicionado por cuestiones de estabilidad.

La clase más significativa de métodos de pasos múltiples son los llamados métodos de Adams, los cuales aplicados a la Ec. 13 se escriben:

$$f^n = f^{n-1} + \Delta t \beta_0 rhs(t^n, f^n) + \Delta t \beta_1 rhs(t^{n-1}, f^{n-1}) + \Delta t \beta_2 rhs(t^{n-2}, f^{n-2}) + \dots + \Delta t \beta_k rhs(t^{n-k}, f^{n-k}), \quad (16)$$

donde los coeficientes de la combinación lineal  $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$  son elegidos de manera tal que proporcionen la aproximación de mayor orden posible (Hairer et al., 2009). Si  $\beta_0 = 0$ , entonces el método es explícito y se conoce como de Adams-Bashforth, mientras que los implícitos ( $\beta_0 \neq 0$ ) se conocen como de Adams-Moulton.

Es usual implementar los métodos de Adams en la forma de predictor-corrector. En primer lugar, se hace una extrapolación de la solución usando la forma de Bashforth, y luego se calculan los  $rhs$  en este nuevo punto, los que son introducidos en la fórmula de Moulton para corregir la predicción inicial. Este proceso requiere la evaluación de los lados derechos dos veces por cada paso de tiempo y se suele denotar como PECE (*predict-evaluate-correct-evaluate*). Una característica útil de este método es que, si la predicción y la corrección tienen el mismo orden, entonces la diferencia entre ellas puede usarse para estimar el error de truncamiento local (Milne, 1926), lo que es esencial para algoritmos con paso de tiempo adaptativo.

En este trabajo se implementan y comparan seis métodos multistep: los Adams-Bashforth explícitos de segundo (AB2), tercer (AB3) y cuarto orden (AB4), y los predictores-correctores tipo PECE de orden 2-3 (ABM23), 3-4 (ABM34) y 4-5 (ABM45), donde el primer número indica el orden de la etapa Adams-Bashforth, y el segundo, el orden de la etapa Adams-Moulton. Notar que un esquema de Adams de  $k$  etapas no es aplicable para los primeros  $k - 1$  pasos de tiempo, ya que no se tiene información previa suficiente. Una alternativa es empezar con el método de Euler, y luego los Adams-Bashforth de segundo, tercer y siguientes órdenes. La otra alternativa, que es la empleada aquí, es la de empezar con métodos de etapas intermedias de tipo Runge-Kutta, como el RK4.

## 4. PRUEBAS NUMÉRICAS

El objetivo general de estas pruebas es evaluar si conviene, en términos de eficiencia computacional y precisión, emplear integradores temporales de múltiples pasos en lugar de los tradicionales RK. Es común afirmar que un ODE-solver de alto orden es más preciso que uno de segundo orden, pero más significativa que la precisión (teórica) del método es su eficiencia, esto

es, el costo computacional a igual precisión. Por ejemplo, el RK4 requiere cuatro cómputos de los lados derechos en cada paso de tiempo, por consiguiente, podemos decir que es superior que la regla del punto medio, sólo si sus características de estabilidad permiten emplear un  $\Delta t$  significativamente mayor.

Teniendo esto en mente, se simulan numéricamente dos problemas de pruebas clásicos para el sistema Vlasov-Poisson, a saber, el amortiguamiento no lineal de Landau (*Strong LD*) y la inestabilidad de las dos corrientes (*Two-Stream-Instability* o *TSI*), con las mismas condiciones iniciales y de contorno que las usadas en Lorenzon et al. (2021). Ambos problemas se simulan de dos maneras: primero, usando el mismo tamaño de paso de tiempo con todos los integradores, y luego, usando el máximo  $\Delta t$  que es posible con cada solver antes de que la solución se vuelva inestable. Estos  $\Delta t$  máximos fueron encontrados para cada solver y para cada resolución de malla mediante prueba y error, y se muestran en la Tabla 1 para el LD y en la Tabla 2 para la TSI.

Nx	Nv	RK2	RK3	RK4	AB2	AB3	AB4	ABM23	ABM34	ABM45	RK324e	RK546e	RK547e
100	400	1.03	1.64	1.77	0.59	0.40	0.22	1.04	0.82	0.63	1.64	2.17	2.27
200	800	1.00	1.63	1.75	0.58	0.39	0.22	1.03	0.81	0.62	1.63	2.15	2.25
400	1600	0.97	1.61	1.73	0.57	0.38	0.21	1.00	0.78	0.60	1.61	2.10	2.18

Tabla 1: Tamaños máximos de pasos de tiempo que preservan la estabilidad en el amortiguamiento no lineal de Landau. Para calcular el  $\Delta t$  dimensional en [s], multiplicar el factor tabulado por:  $2,2275E-7 / N_x$ .

Nx	Nv	RK2	RK3	RK4	AB2	AB3	AB4	ABM23	ABM34	ABM45	RK324e	RK546e	RK547e
200	400	0.87	1.58	1.83	0.52	0.44	0.26	0.95	0.77	0.60	1.59	2.09	1.99
400	800	0.87	1.58	1.83	0.52	0.44	0.26	0.95	0.77	0.60	1.59	2.09	1.99

Tabla 2: Tamaños máximos de pasos de tiempo que preservan la estabilidad en la inestabilidad de las dos corrientes. Para calcular el  $\Delta t$  dimensional en [s], multiplicar el factor tabulado por:  $7,2394E-7 / N_x$ .

Notar que, para un mismo esquema, los factores tabulados anteriormente no son sensibles a la densidad de la malla, esto sugiere que el  $\Delta t$  estable máximo varía de manera aproximadamente lineal con el tamaño de las celdas en la dirección espacial ( $\Delta t_{max} \propto \Delta x$ ).

#### 4.1. Amortiguamiento no lineal de Landau

Se denomina amortiguamiento de Landau a la disipación no colisional de ondas electrostáticas longitudinales, u ondas de Langmuir, en un plasma. Cuando la amplitud de la perturbación es relativamente grande, el campo electrostático decae inicialmente hasta que los efectos no lineales producen un aumento posterior, aunque sin recuperar la amplitud original.

El sistema Vlasov-Poisson tiene ciertas propiedades de conservación a las cuales debe prestarse especial atención durante el desarrollo de métodos numéricos. La evolución temporal de estas cantidades, teóricamente invariantes, puede usarse como métrica para cuantificar la precisión de un esquema numérico o la validez de una simulación. En este trabajo, prestamos particular atención al desarrollo de la variación en las normas  $L_1$  y  $L_2$  de la función de distribución, obtenido con los diferentes integradores temporales. Se advirtió que con todos los ODE-solvers implementados, la evolución de las normas que se obtiene es muy similar, por lo cual resulta conveniente representar las diferencias entre ellos.

En la Fig. 1 (arriba) se grafica la diferencia entre distintos integradores temporales y el esquema RK4 clásico, de la variación en el tiempo de las normas  $L_1$  (izquierda) y  $L_2$  (derecha) de  $f$  normalizadas respecto de la condición inicial, usando el mismo  $\Delta t$  en todos los casos. Luego, en la Fig. 1 (abajo), es graficada la esta misma diferencia, sólo que usando el máximo tamaño de paso de tiempo que es estable con cada esquema.

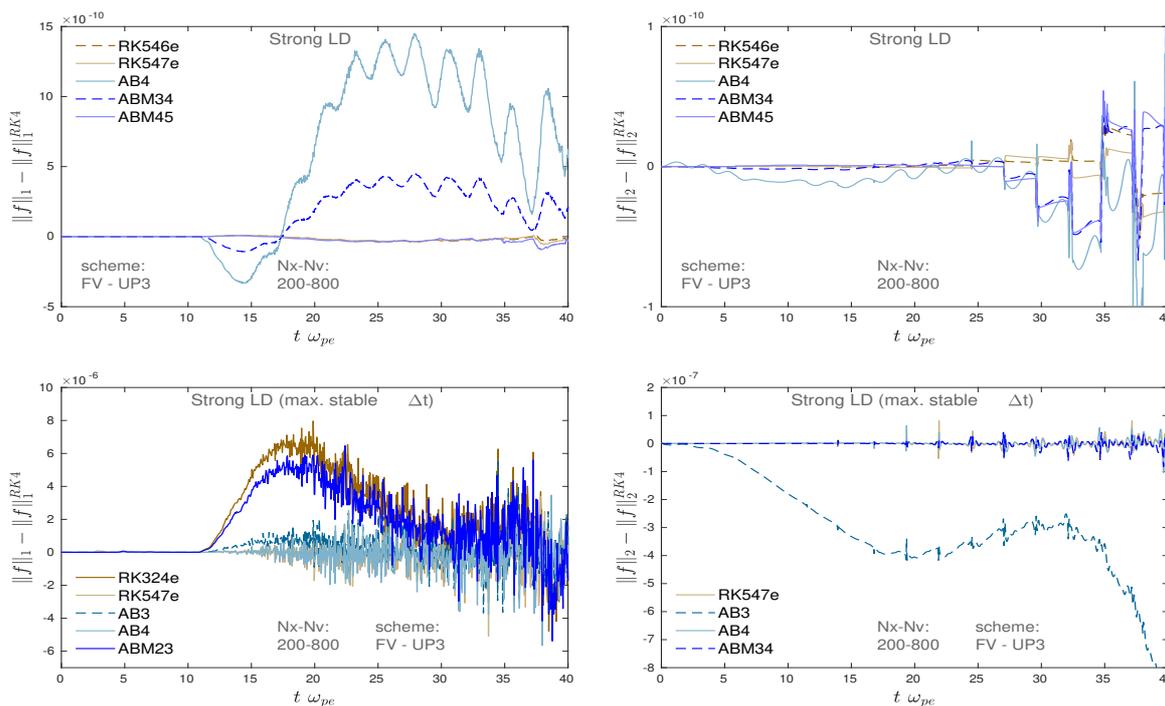


Figura 1: Evolución temporal de las normas  $L_1$  (izquierda) y  $L_2$  (derecha) de  $f$  en el amortiguamiento no lineal de Landau. Diferencias entre distintos integradores y el esquema RK4, normalizadas respecto de la condición inicial. Arriba: usando igual  $\Delta t$ . Abajo: usando el máximo  $\Delta t$  estable.

Se observa que, si bien los solvers implementados son de distintos órdenes y tipos, las variaciones en el tiempo de las normas  $\|f\|_1$  y  $\|f\|_2$  obtenidas con cada uno son muy similares. Si se emplea el mismo  $\Delta t$ , las diferencias relativas entre ellos tienen órdenes de magnitud entre  $10^{-10}$  y  $10^{-9}$ . Por otro lado, cuando los pasos de tiempo son los máximos estables, las diferencias relativas son mucho mayores aunque insignificantes para fines prácticos.

### 4.2. Inestabilidad de las dos corrientes

Existen muchas variedades de esta inestabilidad del espacio de velocidades, siendo muy estudiado el caso de dos corrientes de la misma especie con igual densidad de partículas, que se desplazan a través del fondo neutralizante con velocidades medias opuestas.

Al igual que en el caso anterior, estudiamos el desarrollo de la variación en las normas  $L_1$  y  $L_2$  de  $f$ , obtenido con los diferentes solvers temporales. En la Fig. 2 (arriba), se muestra la diferencia entre distintos integradores temporales y el esquema RK4 clásico, de la variación en el tiempo de las normas  $L_1$  (izquierda) y  $L_2$  (derecha) de  $f$  normalizadas respecto de la condición inicial, usando igual  $\Delta t$ . A continuación, en la Fig. 2 (abajo), se muestra esta misma diferencia sólo que usando, esta vez, el máximo tamaño de paso de tiempo estable.

Al igual que en el amortiguamiento de Landau, se observa que la evolución de las normas de  $f$  no es sensible al solver usado. Estos resultados sugieren que, para avanzar en el tiempo el sistema de ecuaciones 13, no es fundamental usar un algoritmo costoso o de alto orden, ya que todos los implementados aquí permiten representar adecuadamente la solución y respetan, con similar precisión, las propiedades de conservación del sistema Vlasov-Poisson.

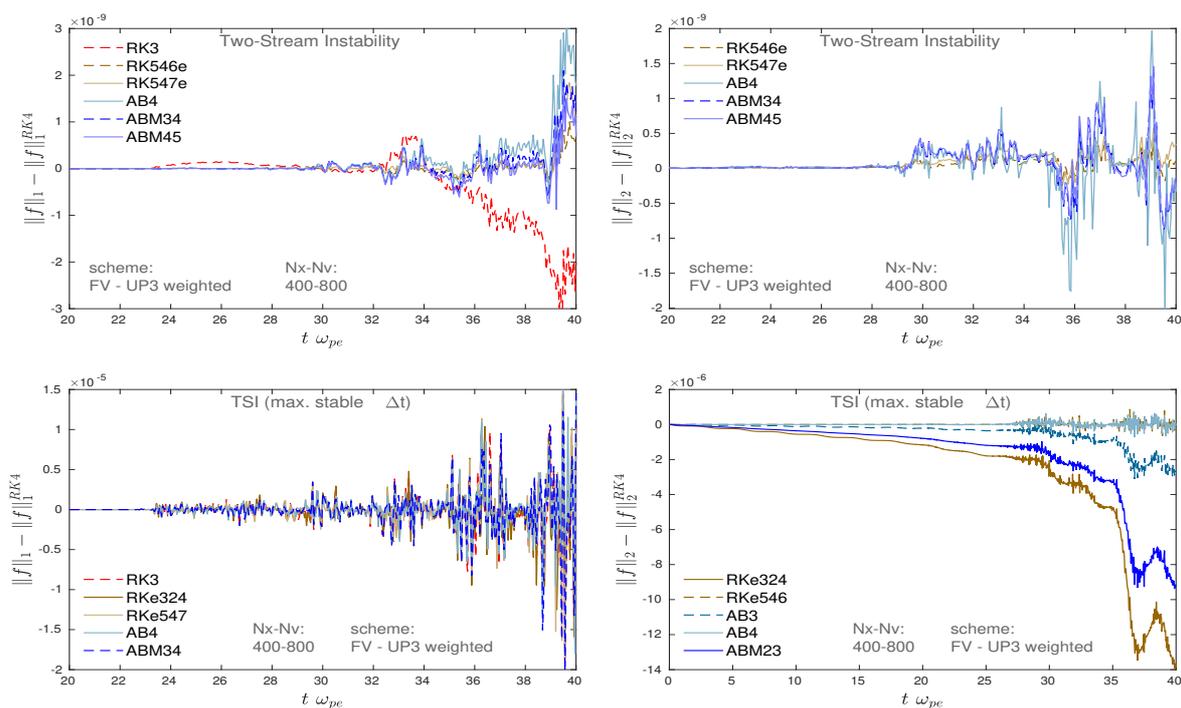


Figura 2: Evolución temporal de las normas  $L_1$  (izquierda) y  $L_2$  (derecha) de  $f$  en la TSI. Diferencias entre distintos integradores y el esquema RK4, normalizadas respecto de la condición inicial. Arriba: usando igual  $\Delta t$ . Abajo: usando el máximo  $\Delta t$  estable.

### 4.3. Costo computacional

Los esquemas Runge-Kutta explícitos de Bogacki-Shampine y de Dormand-Prince requieren 4 y 7 evaluaciones de los lados derechos, respectivamente, por cada paso de tiempo, mientras que los de Adams explícitos o predictores-correctores calculan los *rhs* solamente una o dos veces por paso, independientemente del orden. En esto estaba apoyada la idea de que, implementando métodos lineales de múltiples pasos, podría reducirse considerablemente (entre 2 y 4 veces) el tiempo de cómputo de las simulaciones de la cinética de plasmas.

Sin embargo, se encontró que el tamaño máximo de paso de tiempo que es posible usar en los métodos *multistep*, está severamente limitado por cuestiones de estabilidad. Sumado a esto, mientras mayor es el orden del esquema, menor es el  $\Delta t$  estable máximo, por el contrario de lo que ocurre con los métodos RK. Como consecuencia, lo que se gana en performance al no calcular varias veces los lados derechos en cada paso, se pierde al tener que emplear un  $\Delta t$  más pequeño. Esto puede apreciarse en las Fig. 3, donde se grafican los tiempos de ejecución totales requeridos para avanzar desde  $t = 0$  hasta un instante de tiempo dado.

Se puede apreciar que, si se emplea el mismo tamaño de paso de tiempo, los esquemas de Adams son considerablemente más rápidos que los RK (ver Fig. 3: arriba), no obstante, cuando la estabilidad es tenida en cuenta (Fig. 3: abajo), no sólo que las diferencias se achican sino que la situación se revierte y los RK resultan ser más eficientes.

## 5. CONCLUSIONES

De la familia de esquemas Eulerianos para el tratamiento numérico de la ecuación de Vlasov, se destacan los basados en volúmenes finitos de alto orden sin *splitting* dimensional, los cuales discretizan el espacio de fases y conducen a una formulación semi discreta de la ecuación de Vlasov válida en cada celda.

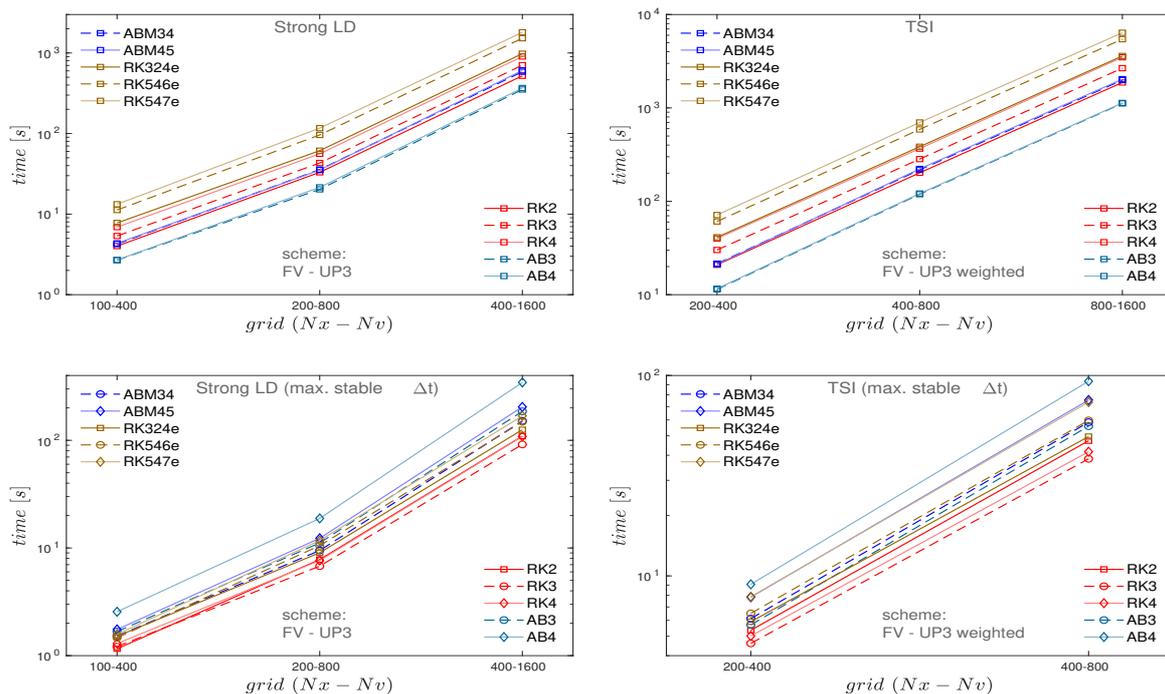


Figura 3: Tiempos totales de cómputo para distintas densidades de malla. Arriba: usando igual  $\Delta t$ . Abajo: usando el máximo  $\Delta t$  estable.

El avance en el tiempo del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias resultantes se trata, tradicionalmente, por medio de esquemas de tipo Runge-Kutta. En este trabajo se implementan, además de los RK, métodos lineales de múltiples pasos explícitos y predictores-correctores. Con el objetivo de estudiar y comparar su precisión, estabilidad y costo computacional, se simulan numéricamente dos problemas de pruebas clásicos para el sistema Vlasov-Poisson: el amortiguamiento no lineal de Landau y la inestabilidad de las dos corrientes. Ambos se simulan, primero, usando el mismo tamaño de paso de tiempo, y luego, usando el  $\Delta t$  máximo posible que mantiene la estabilidad de la solución.

Se observa que, si bien los solvers son de distintos tipos y órdenes, la evolución en el tiempo de las variaciones en las normas  $L_1$  y  $L_2$  de  $f$  obtenidas con cada uno son muy similares. Cuando los  $\Delta t$  son los máximos estables, las diferencias relativas son mucho mayores que si se usa el mismo paso de tiempo, pero aún así son insignificantes.

Aunque los esquemas de tipo multistep sólo calculan los lados derechos una o dos veces por intervalo de tiempo, el tamaño máximo posible de  $\Delta t$  que pueden usar está severamente limitado por cuestiones de estabilidad. Además, mientras mayor es el orden del esquema, menor es el máximo  $\Delta t$  estable, al contrario de lo que ocurre con los RK. Por esta razón se encuentra que, si se emplea el mismo paso de tiempo, los esquemas de Adams son más rápidos que los RK, no obstante, cuando se considera la estabilidad, los RK resultan, en general, más eficientes.

**REFERENCIAS**

Banks J.W. y Hittinger J.A.F. A New Class of Nonlinear Finite-Volume Methods for Vlasov Simulation. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 38(9):2198–2207, 2010. ISSN 0093-3813. doi:10.1109/TPS.2010.2056937.

Bashforth F. y Adams J. *An Attempt to Test the Theories of Capillary Action by Comparing the Theoretical and Measured Forms of Drops of Fluid*. University Press, 1883.

- Birdsall C.K. y Langdon A.B. *Plasma physics via computer simulation*. Taylor & Francis, New York, 2005. ISBN 978-0-7503-1025-3.
- Butcher J.C. *Numerical methods for ordinary differential equations*. Wiley, Chichester, England ; Hoboken, NJ, 2nd ed edición, 2008. ISBN 978-0-470-72335-7.
- Chen F.F. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Springer International Publishing, Cham, 2016. ISBN 978-3-319-22308-7 978-3-319-22309-4.
- Colella P., Dorr M., Hittinger J., y Martin D. High-order, finite-volume methods in mapped coordinates. *Journal of Computational Physics*, 230(8):2952–2976, 2011. ISSN 00219991. doi:10.1016/j.jcp.2010.12.044.
- Conde L. *An Introduction to Plasma Physics and its Space Applications*. Morgan & Claypool Publishers, 2018. ISBN 978-1-64327-171-2 978-1-64327-172-9 978-1-64327-174-3.
- Crouseilles N., Glanc P., Mehrenberger M., y Steiner C. Finite volume schemes for Vlasov. *ESAIM: Proceedings*, 38:275–297, 2012. ISSN 1270-900X. doi:10.1051/proc/201238015.
- Crouseilles N., Mehrenberger M., y Sonnendrücker E. Conservative semi-Lagrangian schemes for Vlasov equations. *Journal of Computational Physics*, 229(6):1927–1953, 2010. ISSN 00219991. doi:10.1016/j.jcp.2009.11.007.
- Fijalkow E. A numerical solution to the Vlasov equation. *Computer Physics Communications*, 116(2-3):319–328, 1999. ISSN 00104655. doi:10.1016/S0010-4655(98)00146-5.
- Filbet F., Sonnendrücker E., y Bertrand P. Conservative Numerical Schemes for the Vlasov Equation. *Journal of Computational Physics*, 172(1):166–187, 2001. ISSN 00219991. doi:10.1006/jcph.2001.6818.
- Hairer E., Nørsett S.P., y Wanner G. *Solving ordinary differential equations I: nonstiff problems*. número 8 En Springer series in computational mathematics. Springer, Heidelberg ; London, 2nd rev. ed edición, 2009. ISBN 978-3-540-56670-0 978-3-642-05163-0 978-3-540-78862-1.
- Henrici P. *Discrete variable methods in ordinary differential equations*. Wiley, New York, 1962. ISBN 978-0-471-37224-0.
- Huot F., Ghizzo A., Bertrand P., Sonnendrücker E., y Coulaud O. Instability of the time splitting scheme for the one-dimensional and relativistic Vlasov–Maxwell system. *Journal of Computational Physics*, 185(2):512–531, 2003. ISSN 00219991. doi:10.1016/S0021-9991(02)00079-7.
- Lorenzon D. y Elaskar S. Comparación de Esquemas de Segundo Orden Basados en Diferencias Finitas y Volúmenes Finitos para la Solución de la Ecuación de Vlasov en el Caso No Magnetizado. *Mecánica Computacional*, XXXVII(26):1103–1117, 2019. ISSN 2591-3522.
- Lorenzon D., Elaskar S.A., y Cimino A.M. Numerical Simulations Using Eulerian Schemes for the Vlasov–Poisson Model. *International Journal of Computational Methods*, página 2150031, 2021. ISSN 0219-8762, 1793-6969. doi:10.1142/S0219876221500316.
- Milne W.E. Numerical Integration of Ordinary Differential Equations. *The American Mathematical Monthly*, 33(9):455–460, 1926. ISSN 0002-9890, 1930-0972. doi:10.1080/00029890.1926.11986619.
- Press W.H., editor. *Numerical recipes: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, UK ; New York, 3rd ed edición, 2007. ISBN 978-0-521-88068-8 978-0-521-88407-5 978-0-521-70685-8.
- Vogman G., Colella P., y Shumlak U. Dory–Guest–Harris instability as a benchmark for continuum kinetic Vlasov–Poisson simulations of magnetized plasmas. *Journal of Computational Physics*, 277:101–120, 2014. ISSN 00219991. doi:10.1016/j.jcp.2014.08.014.