

COMPARACIÓN ENTRE DOS ESQUEMAS EXPLÍCITOS PARA LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE EULER Y DE NAVIER-STOKES

Gustavo Bono^a y Armando Miguel Awruch^b

^a*Programa de Posgraduación en Ingeniería Mecánica (PROMEC), Universidade Federal de Rio Grande do Sul, Av. Sarmiento Leite 425, 90050-170 Porto Alegre, Brasil, gbono@mecanica.ufrgs.br, <http://www.mecanica.ufrgs.br/promec>*

^b*Centro de Mecánica Aplicada y Computacional (CEMACOM), Universidade Federal de Rio Grande do Sul, Av. Osvaldo Aranha 99, 90035-190 Porto Alegre, Brasil, amawruch@ufrgs.br, <http://www.ppgec.ufrgs.br/cemacom>*

Palabras clave: Flujos compresibles, Simulación numérica, Método de los Elementos Finitos.

Resumen. Una comparación entre dos esquemas explícitos para la simulación de un flujo viscoso/no viscoso compresible tridimensional de fluidos newtonianos para futuras aplicaciones en problemas de aeroelasticidad es presentada en este trabajo. El sistema de ecuaciones diferenciales se resuelve usando el método de los elementos finitos (MEF), usando una serie de Taylor y el clásico método de Bubnov-Galerkin para la discretización del tiempo y del espacio, respectivamente. Para la resolución del método de Taylor-Galerkin se usan dos esquemas diferentes, siendo el primero explícito iterativo y el segundo explícito de dos pasos. Se adopta un elemento tetraédrico isoparamétrico lineal en el marco de mallas no estructuradas.

Finalmente, son comparados los resultados numéricos y desempeño computacional (memoria, tiempo de procesamiento y convergencia) de ambos esquemas con ejemplos en dos y tres dimensiones para flujos en régimen transónico y supersónico.

1 INTRODUCCIÓN

La dinámica de fluidos computacional ha demostrado en estos últimos años que es una excelente herramienta para el estudio y diseño en problemas envolviendo configuraciones complejas. El análisis de la aerodinámica, optimización y fenómenos aeroelásticos en aviones lleva a mallas con un gran número de grados de libertad. Los costos computacionales (espacio de memoria ocupado y tiempo de procesamiento) crecen rápidamente a medida que aumentamos la discretización y la complejidad del modelo matemático (invíscido o viscoso) usado. El esquema adoptado para la solución de estos problemas además de ser eficiente debe ser robusto para capturar y resolver con precisión los fenómenos que se originan en los diferentes regímenes del flujo. También el esquema debe ser simple y permitir una fácil y directa programación de manera de aprovechar los recursos de procesamiento en paralelo.

El esquema deberá tener buenas características con relación a problemas dependientes del tiempo (no permanente), debido a que las futuras aplicaciones del mismo serán en problemas aeroelásticos, o sea, los principales fenómenos del flujo y de la estructura son función del tiempo. Debido principalmente a esta última exigencia es justificable la adopción de un esquema de avance en el tiempo explícito; esquemas implícitos tienen un mejor desempeño en problemas estacionarios. El esquema explícito además de exigir un pequeño requerimiento de memoria satisface adecuadamente los requisitos expuestos en el párrafo anterior. Una de las principales desventajas es que el paso de tiempo permisible en los esquemas explícitos es limitado por la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

El problema de la discretización sobre configuraciones complejas es fácilmente resuelto con el uso de mallas no estructuradas en la cual el dominio es subdividido en tetraedros, además este tipo de elemento permitiría la adopción de un método de refinamiento adaptativo a fin de captar los diferentes fenómenos en los cuales existen altos valores de los gradientes de las variables (ondas de choque, capa límite, etc.).

Las ecuaciones diferenciales gobernantes del fluido son discretizadas espacialmente usando el principio de los residuos ponderados de Bubnov-Galerkin y el método de los elementos finitos (MEF). Los términos temporales son expandidos en series de Taylor hasta los términos de segundo orden. Para la discretización espacial se adopta un elemento tetraédrico isoparamétrico lineal en el marco de mallas no estructuradas.

El propósito de este trabajo es presentar un estudio comparativo de dos esquemas explícitos para la solución de flujo viscoso/invíscido compresible tridimensional de fluidos newtonianos para futuras aplicaciones en problemas de aeroelasticidad. Para la resolución del método de Taylor-Galerkin (T-G) primer se usa un esquema de un paso (Donea, 1984) que se resuelve iterativamente, el segundo esquema de dos pasos esta basado en el trabajo de Kawahara y Hirano (1983). Finalmente, son comparados los resultados numéricos y desempeño computacional de ambos esquemas con varios ejemplos clásicos en dos y tres dimensiones para flujos en régimen transónico y supersónico.

2 ECUACIONES GOVERNANTES

Las ecuaciones gobernantes para un flujo viscoso compresible pueden ser escritas en forma compacta como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

donde Ω es el dominio del modelo con contorno Γ , siendo:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v_i \\ \rho e \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \rho v_i \\ \rho v_i v_j + p \delta_{ij} \\ v_i (\rho e + p) \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{G}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tau_{ij} \\ -\tau_{ij} v_i - K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \end{Bmatrix} \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

donde \mathbf{U} es el vector de las variables de campo o variables conservativas, \mathbf{F}_i es el vector de flujo advectivo y términos de presión y \mathbf{G}_i es el vector de flujo difusivo. En esta expresiones, v_i son las componentes del vector de velocidad según el eje x_i , ρ es la densidad del fluido, p es presión termodinámica y e es la energía total específica. τ_{ij} es el tensor de tensiones viscosas newtonianas. Para el flujo de calor se considera la ley de Fourier siendo u la energía interna del fluido y K_{ij} son las componentes del tensor de conductibilidad térmica. Finalmente, δ_{ij} es el delta de Kronecker y t es el tiempo. Se considera que los coeficientes de viscosidad y conductibilidad térmica son dados por la ley de Sutherland (ver Anderson, 1991)

La ecuación (1) es complementada por la ecuación de estado para los gases ideales, y es dada por:

$$p = (\gamma - 1) \rho u \quad (3)$$

donde $\gamma = c_p/c_v$ es la relación entre el coeficiente de calor específico a presión constante y volumen constante, respectivamente. Conviene también expresar las siguientes relaciones:

$$u = c_v T = e - \frac{1}{2} v_i v_i \quad (4)$$

donde T es la temperatura y $(v_i v_i / 2)$ es la energía cinética específica. El problema es completamente definido cuando condiciones iniciales y de contorno son adicionadas a estas ecuaciones.

3 APROXIMACIÓN NUMERICA

El método de Galerkin (G) clásico lleva a un esquema central que es incondicionalmente inestable para problemas hiperbólicos cuando se usa conjuntamente con un esquema de primer orden de precisión en el tiempo (Euler backward), por lo tanto, para estabilizar el proceso es necesario la introducción de viscosidad artificial.

Donea (1984) derivó una importante familia de esquemas Taylor-Galerkin (T-G) para ecuaciones de advección lineal. Adoptando la aproximación del MEF, demostró como el esquema de Galerkin (esquema central) puede ser estabilizado por medio de una expansión en series de Taylor para la derivada de las variables de conservación con relación al tiempo, dicho procedimiento es similar al usado para derivar el esquema de Lax-Wendroff. El esquema propuesto por Donea (1984) mostró tener bajo errores de fase y buenas propiedades de disipación. Otro esquema de amplia utilización es el esquema de T-G de dos pasos que fue propuesto y testado por Löhner et al. (1985) para la solución de las ecuaciones de Euler.

Otra forma clásica de resolver con un esquema explícito de dos pasos las ecuaciones de los fluidos viscosos ligeramente compresibles fue propuesta por Kawahara y Hirano (1983).

3.1 Esquema de avance en el tiempo de Un Paso

Este esquema de avance en el tiempo está basado en el trabajo de Donea (1984) y Yoon et

al. (1998). Desarrollando las variables de campo de las ecuaciones de conservación por una expansión en el tiempo según una serie de Taylor, obtenemos:

$$\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^{n+s_1} + \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \right)^{n+s_2} + O(\Delta t^3) \quad (5)$$

donde $\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$. Los superíndices n y $n+1$ indican las posiciones t y Δt en el dominio del tiempo y Δt es el incremento de tiempo. Las variables s_1 y s_2 definen la forma de avance en el tiempo a través de esquemas implícitos, semi-implícitos y explícitos, de acuerdo con los valores adoptados. Además también se define:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}^{n+s_1}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} + s_1 \frac{\partial \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t} & \text{con } 0 \leq s_1 \leq 1 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{U}^{n+s_2}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial t^2} + s_2 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t^2} & \text{con } 0 \leq s_2 \leq 1 \end{aligned} \quad (6)$$

Para el presente método adoptamos $s_1 = s_2 = 1/2$ y reemplazando la ecuación (6) en (5) resulta:

$$\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t^2} \right) \quad (7)$$

Los incrementos $\Delta \mathbf{U}^{n+1}$ y las derivadas segundas de \mathbf{U} en la ecuación (7) se pueden obtener fácilmente a partir de la ecuación vectorial (1). Reorganizando los términos y eliminando términos de orden superior se obtiene la siguiente ecuación de avance en el tiempo para los incrementos de las variables:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_{I+1}^{n+1} &= \Delta t \left[-\frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_k^n \frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} \right) \right] + \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \left[-\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{iI}^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta \mathbf{G}_{iI}^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_k^n \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{iI}^{n+1}}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Los incrementos de las variables de campo $\Delta \mathbf{U}$ deben ser obtenidos a través de un proceso iterativo, una vez que están definidos para el mismo tiempo que los incrementos que aparecen en el segundo corchete de la ecuación, por lo tanto se adiciona un contador de número de iteraciones I . Los índices $I+1$ y I se refieren al paso iterativo actual y anterior. La matriz \mathbf{A}_k corresponde a la matriz del jacobiano convectivo que aparece en la ecuación (1) escrita en forma quasi-linear (Hughes y Tezduyar, 1984).

3.2 Esquema de avance en el tiempo de Dos Pasos

Se adopta el esquema propuesto por Kawahara y Hirano (1983) para el avance en el tiempo. Dada la solución en un cierto paso de tiempo t^n , el objetivo es calcular la solución para un nuevo paso de tiempo, $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, avanzando dos pasos de tiempo con la solución. Desarrollando las variables de campo de las ecuaciones de conservación por una expansión en series de Taylor en el tiempo para el tiempo $t^{n+1/2} = t^n + \Delta t/2$, obtenemos:

$$\Delta \mathbf{U}^{n+1/2} = \left(\frac{\Delta t}{2}\right) \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} + \frac{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{U} + \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^n + O(\Delta t^3) \quad (9)$$

La ecuación (9) es solucionada en dos pasos; en el primer paso, se calcula las variables de campo en el instante de tiempo $t + \Delta t/2$ correspondiente a los términos contenidos entre paréntesis. Introduciendo la ecuación (1) y su derivada en la expresión (9) y eliminando los términos de orden superior obtenemos para el primer paso:

$$\Delta \mathbf{U}^{n+1/2} = \frac{\Delta t}{2} \left[-\frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{A}_i^n \frac{\partial \mathbf{F}_j^n}{\partial x_j} \right) \right] \quad (10)$$

con $\Delta \mathbf{U}^{n+1/2} = \mathbf{U}^{n+1/2} - \mathbf{U}^n$. En el segundo paso, se calcula las variables de campo en el instante de tiempo $t + \Delta t$ utilizando las variables en $t + \Delta t/2$ determinadas en el primer paso a través de la ecuación (10). Para obtener los valores de la variable \mathbf{U} en $n+1$, se puede aplicar una expansión en series de Taylor de la siguiente forma:

$$\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^n + \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \right)^n + O(\Delta t^3) = \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{U} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^n + O(\Delta t^3) \quad (11)$$

Trabajando la ecuación (11) de la misma forma que fue hecho con la expresión (9) se obtiene finalmente:

$$\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \Delta t \left[-\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} \right) \right]^{n+1/2} \quad (12)$$

3.3 Discretización espacial. Método de Galerkin

Las ecuaciones (8), (10) y (12) son discretizadas en el espacio usando la técnica de Galerkin en el contexto del método de los elementos finitos. En la aproximación espacial se adopta un elemento tetraédrico linear isoparamétrico, el cual tiene la flexibilidad de adaptarse a dominios de geometría compleja con una buena eficiencia computacional.

Debe observarse que las ecuaciones obtenidas son en principio un esquema semi-implícito, por lo tanto, para desacoplar el sistema de ecuaciones de manera de ser resuelto explícitamente se considera la matriz de masa diagonal o discreta (Löhner, 2001).

Finalmente, después de aplicar el método de Galerkin en el contexto del MEF en los esquemas de avance en el tiempo de un paso, ecuación (8), y de dos pasos, ecuaciones (10) y (12), obtenemos los modelos numéricos de T-G de un paso (T3F) y de dos pasos (T3P2F), respectivamente.

3.4 Estabilidad numérica y viscosidad artificial

Como el método adoptado es explícito y éstos son condicionalmente estables, esta sujeto a la condición de estabilidad de CFL. Tal condición, aplicada sobre un elemento E , establece que el paso de tiempo local Δt_E debe satisfacer la expresión:

$$\Delta t_E = \delta \frac{L_E}{a + (v_i v_i)^{1/2}} \quad (13)$$

donde, Δt_E es el incremento de tiempo crítico del elemento, δ es un coeficiente de seguridad, L_E es la dimensión característica del elemento E (menor arista) y a es la velocidad del sonido.

La solución directa a través del esquema de T-G puede producir la aparición de oscilaciones de alta frecuencia en las proximidades de las ondas de choque. Para suavizar tales efectos locales es introducida una viscosidad artificial que es adicionada explícitamente a la solución no amortiguada, resultando en la siguiente expresión:

$$\mathbf{U}_s^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{D} \quad (14)$$

donde \mathbf{U}_s^{n+1} es el vector de las variables de campo amortiguadas en el instante de tiempo $t + \Delta t$, \mathbf{M}_L es la matriz de masa discreta y \mathbf{D} el vector de amortiguamiento artificial, calculado según el procedimiento mostrado por Argyris et al. (1990):

$$\mathbf{D} = \sum_{ele} CFL \text{ CAF } S_{ele} [\mathbf{M} - \mathbf{M}_L]_{ele} \mathbf{U}_{ele}^n \quad (15)$$

siendo que el índice ele indica que la ecuación (15) es calculada para cada elemento, CFL es el número de Courant-Friedrichs-Lewy local, CAF es una constante especificada por el usuario, \mathbf{M} es la matriz de masa consistente y S_{ele} es el coeficiente de distribución de presión del elemento, calculado como la media de los valores nodales S_i del elemento, definido para el nodo i como:

$$S_i = \sum_{ele} \frac{|(\mathbf{M} - \mathbf{M}_L)_{ele} \mathbf{p}|_i}{\left[|\mathbf{M} - \mathbf{M}_L|_{ele} \mathbf{p} \right]_i} \quad (16)$$

donde \mathbf{p} es el vector con las presiones nodales del elemento ele . El valor del coeficiente de amortecimiento ficticio (CAF) debe ser ajustada para cada ejemplo y modelo numérico utilizado, siendo que un excesivo valor de la viscosidad artificial interfiere en la viscosidad física.

4 RESULTADOS NUMERICOS

En este ítem se presentan los resultados de varios ejemplos clásicos con el objetivo de validar el código y comparar el desempeño de los dos esquemas usados. Todos los ejemplos fueron modelados en 3D, por lo tanto, en los ejemplos bidimensionales (2D) se tiene como mínimo 1 elemento en la dirección z , salvo que se indique lo contrario. Debido a que el objetivo de este trabajo es analizar el desempeño computacional de ambos esquemas, en algunos ejemplos bidimensionales se uso dos elementos en la dirección perpendicular al plano x - y con el fin de aumentar el número de grados de libertad.

En todos los casos se indica la cantidad total de elementos y nodos utilizados para discretizar el dominio, también se da la cantidad de nodos sobre el contorno sólido, siendo que para los ejemplos 2D dicha cantidad es la existente en el plano x - y , por lo tanto para obtener la cantidad total de nodos es necesario tener en cuenta los elementos existentes en la dirección perpendicular al plano.

4.1 Flujo viscoso sobre una rampa en compresión con $M = 3,0$ y $Re = 16800$

En este primer ejemplo es analizado una rampa en compresión con 10° de inclinación con relación al plano horizontal en un flujo viscoso con $M = 3,0$ y número de Reynolds $Re = 16800$ basado en los valores de la corriente libre y la longitud de la placa plana. Este ejemplo presenta una región de separación y readherencia de la capa limite en la región de la esquina

(punto C de la Figura 1). El dominio y las condiciones de contorno se muestran en la Figura 1, siendo las dimensiones: $AB = 0,2$, $BC = 1,0$, $CD = 0,8$, $AF = DF = 0,59$ y $0,04$ en la dirección perpendicular al plano. Las condiciones de la corriente libre son: $V_\infty = (3,0; 0,0; 0,0)$, $\rho_\infty = 1,0$, $e_\infty = 6,2857$ y $p_\infty = 0,71428$ siendo impuestas en AF y FE, en AB se coloca la condición de simetría, en BCD se impone la condición de no deslizamiento para la velocidad y la energía interna (temperatura) de estagnación igual $u_\infty = 5,0$, finalmente, en DE las condiciones son libres.

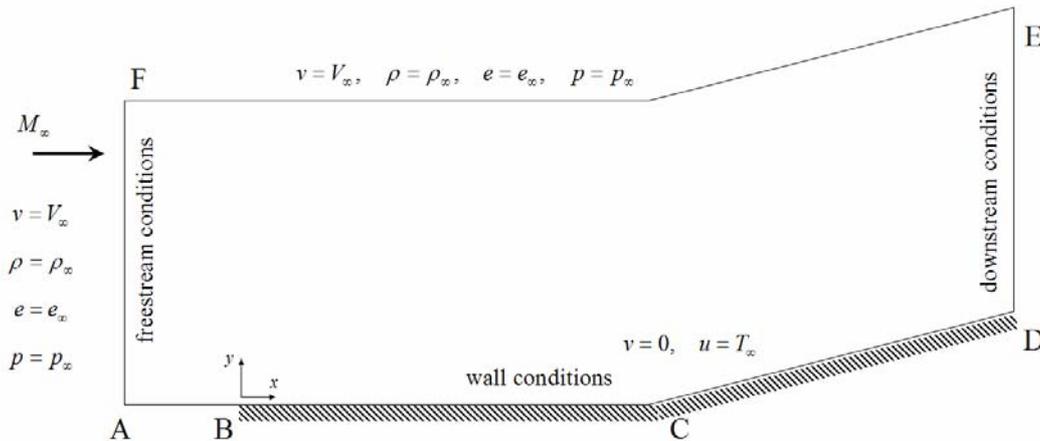


Figura 1: Geometría y condiciones de contorno para la rampa en compresión

Se emplea una malla estructurada con 60000 elementos y 18573 nodos, concentrando los elementos en la región de inicio de la placa plana (punto B), inicio de la rampa (punto C) y la región de la capa límite. Sobre la placa plana y rampa se tiene 141 nodos y en la dirección z fueron colocados 2 elementos. El incremento de tiempo adimensional máximo fue $0,5 \times 10^{-4}$, teniendo entre las aristas una longitud máxima y mínima de $4,89 \times 10^{-2}$ y $2,39 \times 10^{-3}$, respectivamente.

En la Figura 2, se muestra una comparación de la variación de presión para las posiciones sobre la placa $x = 0,5$ y $1,5$ para ambos esquemas con un valor del coeficiente de amortiguamiento ficticio igual a 0,8. Se puede apreciar claramente que el esquema de dos pasos (T3P2F) es levemente más difusivo que el esquema de un paso (T3F). El control de dicha difusión adicional es realizado por medio del coeficiente de amortecimiento ficticio (CAF) utilizado en la ecuación (15).

Se presentan el tiempo de procesamiento y memoria relativa para cada uno de los esquemas utilizado con su respectivo coeficiente de amortiguamiento ficticio (CAF) en la Tabla 1.

Programa	CAF	Tiempo	Memoria
T3F	0,8	1	1
T3P2F	0,6	1,339	0,814

Tabla 1: Tiempo y memoria relativa para el ejemplo de la rampa en compresión con $M = 3,0$ y $Re = 16800$.

La distribución del número de Mach y presión son mostrados en la Figura 3 y tienen una buena similitud con los resultados presentados por Shakib et al. (1991). En la Figura 4 y 5 son presentados la distribución del coeficiente de presión C_p y la distribución del coeficiente de fricción C_f , ambos comparados con los resultados numéricos de Carter (1972). La

distribución de presión muestra como la capa límite crece debido al gradiente de presión adverso originado por la rampa. La reducción de la presión total en la capa límite produce su separación e imposibilita superar el gradiente de presión adverso. Esta separación crea una región de recirculación que es evidente a través del coeficiente de fricción negativo.

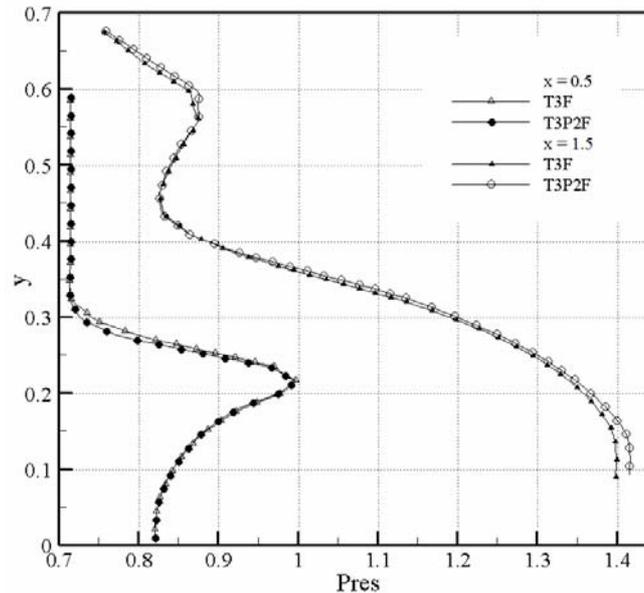


Figura 2: Distribución de la presión en $x = 0,5$ y $1,5$ para ambos esquemas con $CAF = 0.8$

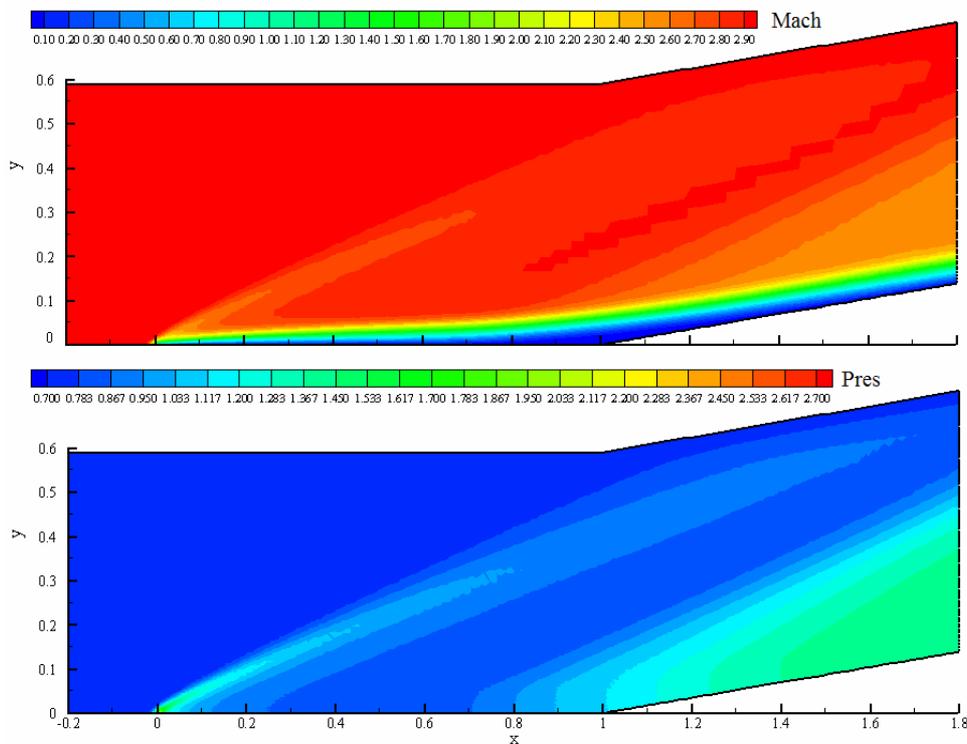


Figura 3: Distribución del número de Mach y presión para la rampa en compresión

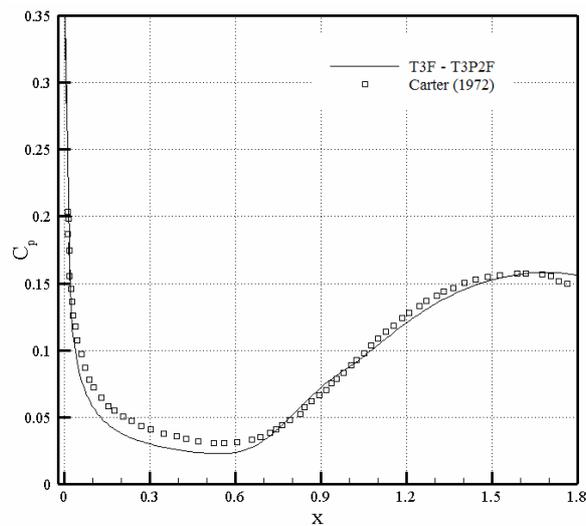


Figura 4: Distribución del coeficiente de presión para la rampa en compresión

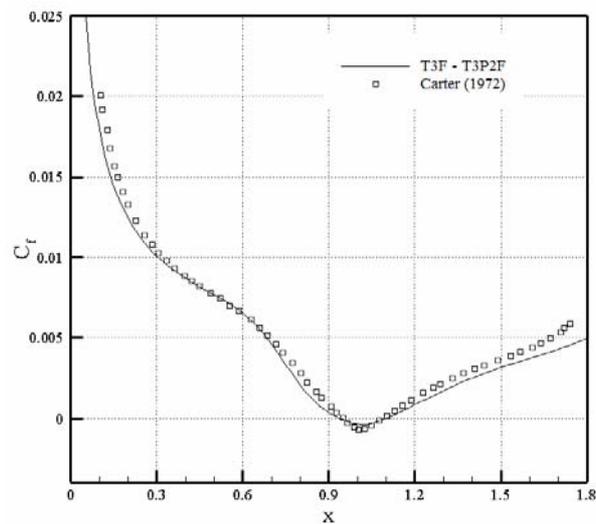


Figura 5: Distribución del coeficiente de fricción para la rampa en compresión

4.2 Flujo no viscoso sobre un perfil NACA 0012 con $M = 0,80$ e $\alpha = 0^\circ$

En este caso testamos un perfil NACA 0012 de cuerda unitaria en un flujo no viscoso con número de Mach $M = 0,80$ y ángulo de ataque $\alpha = 0^\circ$. En la Figura 6 se muestra esquemáticamente el dominio y condiciones de contorno (CC) utilizadas. El dominio tiene como dimensiones: $L_1 = 11$, $L_2 = 12$, $H = 20$ y $0,05$ en la dirección perpendicular, siendo que el borde de ataque del perfil está en las coordenadas $(L_1, H/2)$. Las condiciones de la corriente sin perturbar son $V_\infty = (0,8; 0,0; 0,0)$, $\rho_\infty = 1,0$, $e_\infty = 2,1057$ y fueron aplicadas en las aristas AB, CD y AD, en BC las CC para las variables son libres con excepción de la presión que es prescripta, siendo $p_\infty = 0,71428$.

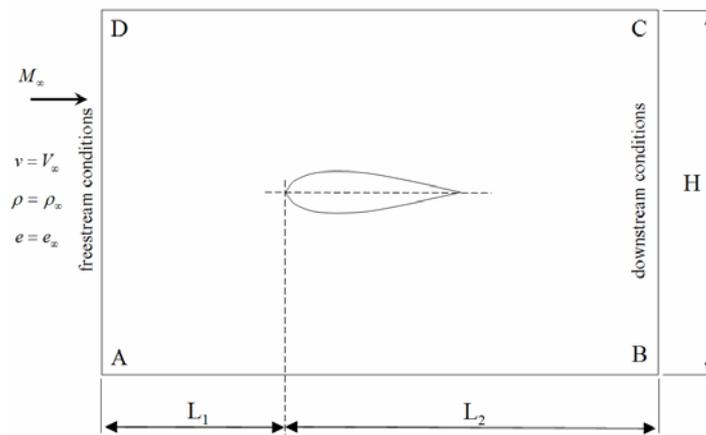


Figura 6: Geometría y condiciones de contorno para el perfil

Se emplea una malla estructurada de 80000 elementos e 32760 nodos, siendo que en la superficie del perfil tenemos 200 nodos (2D). El incremento de tiempo adimensional máximo usado es $0,1 \times 10^{-3}$. El tiempo de procesamiento y memoria para cada uno de los esquemas utilizado con el coeficiente de amortiguamiento ficticio (CAF) son dados en la Tabla 2 y tiene los siguientes valores:

Programa	CAF	Tiempo	Memoria
T3F	1,0	1	1
T3P2F	0,8	1,579	0,779

Tabla 2: Tiempo y memoria relativa para el ejemplo del perfil NACA 0012 con $M = 0,80$ y $\alpha = 0^\circ$.

La distribución de densidad obtenida por ambos esquemas es comparada en la Figura 7, notándose que la diferencia entre los mismos es prácticamente nula. El coeficiente de presión C_p a lo largo del perfil obtenido con el programa T3F es presentado en la Figura 8 conjuntamente con los resultados numéricos obtenidos por Hafez (1995).

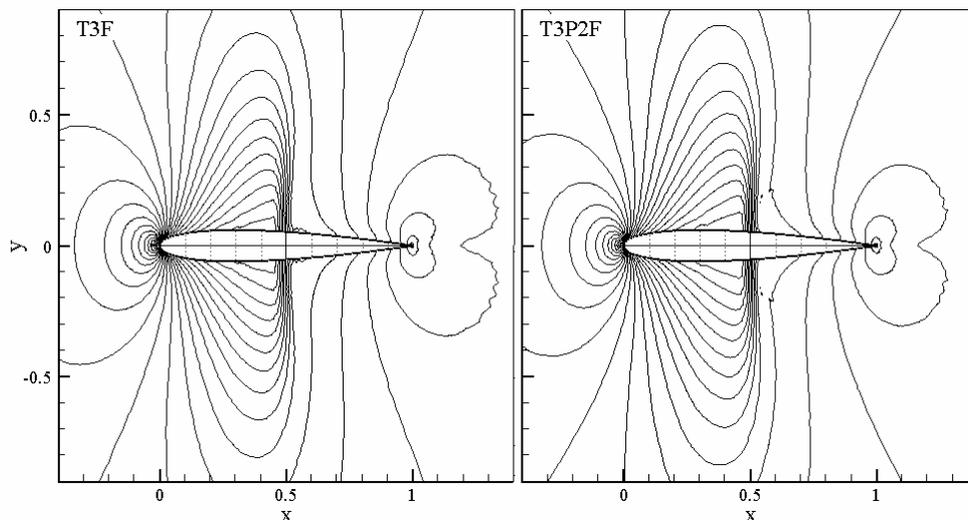


Figura 7: Distribución de la densidad para ambos esquemas

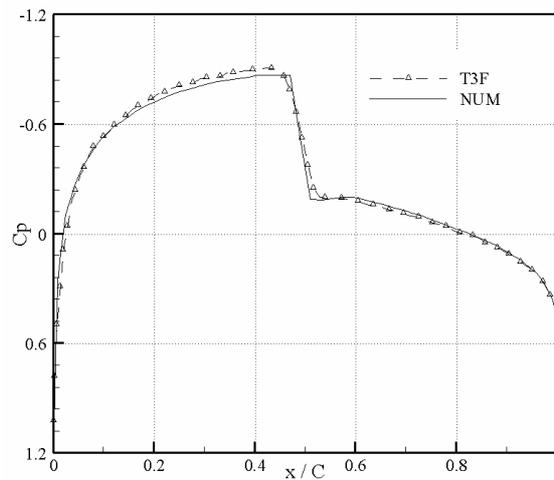


Figura 8: Distribución del coeficiente de presión para el perfil con $M = 0,80$ y $\alpha = 0^\circ$

4.3 Flujo viscoso sobre un ala recta con $M = 0,90$ - $Re = 1000$ y $\alpha = 1^\circ$

El primer ejemplo tridimensional consiste en un ala recta con un perfil NACA 0012 de cuerda unitaria y semienvergadura $b = 1.5 C$ en un flujo transónico ($M = 0,90$) con ángulo de ataque $\alpha = 1^\circ$. Teniendo en cuenta la Figura 9, definimos las dimensiones: $L_1 = 10$, $L_2 = 12,5$, $L_3 = 10$ y $H = 20$, siendo que el borde de ataque del perfil raíz está en las coordenadas $(L_1, H/2, 0)$. Las condiciones de la corriente libre sin perturbar son $V_\infty = (0,8998; 0,0157; 0,0)$, $\rho_\infty = 1,0$, $e_\infty = 2,1907$ y se aplican en los planos ABCD, ABEF, CDGH y BCFG, sobre el ala es impuesta la condición de no deslizamiento para la velocidad; en el plano ADEH se impone condiciones de simetría y en EFGH las CC para las variables son libres con excepción de la presión que es prescripta, siendo $p_\infty = 0,71428$.

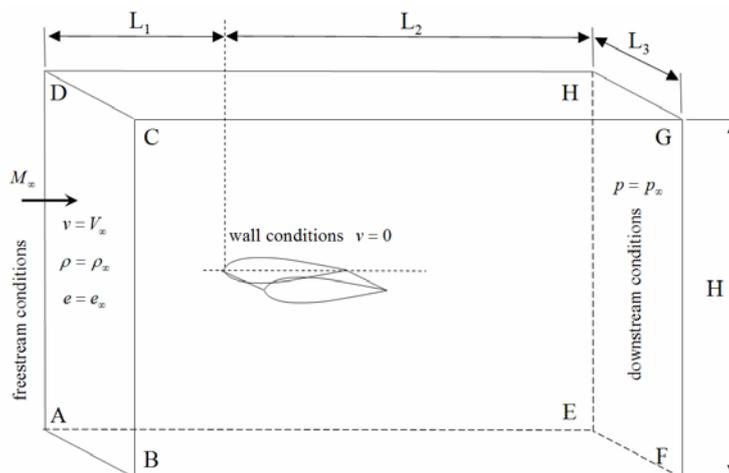


Figura 9: Geometría y condiciones de contorno para el ala

Se emplea una malla no estructurada de 134224 elementos e 26768 nodos, siendo que en la superficie del ala tenemos 7432 nodos. El incremento de tiempo adimensional máximo empleado fue $0,1 \times 10^{-3}$, teniendo entre las aristas una longitud máxima y mínima de 2,12 y $2,58 \times 10^{-3}$, respectivamente. En la Tabla 3, se presentan el tiempo de procesamiento y

memoria para cada uno de los esquemas utilizado con su respectivo coeficiente de amortiguamiento ficticio (CAF).

Programa	CAF	Tiempo [min.]	Memoria [MB]
T3F	1,0	1	1
T3P2F	1,0	1,544	0,858

Tabla 3: Tiempo y memoria relativa para el ejemplo del ala con $M = 0,90$; $Re = 1000$ y $\alpha = 1^\circ$.

La distribución del número de Mach para ambos esquemas y la distribución de presión empleando el programa T3F son mostradas en las Figuras 10 y 11. Como se puede apreciar existe una buena concordancia de los resultados para ambos esquemas. Se debe resaltar que no existe onda de choque para este caso, por lo tanto la discretización utilizada es adecuada, debido a que no se pretende analizar en detalles la capa límite.

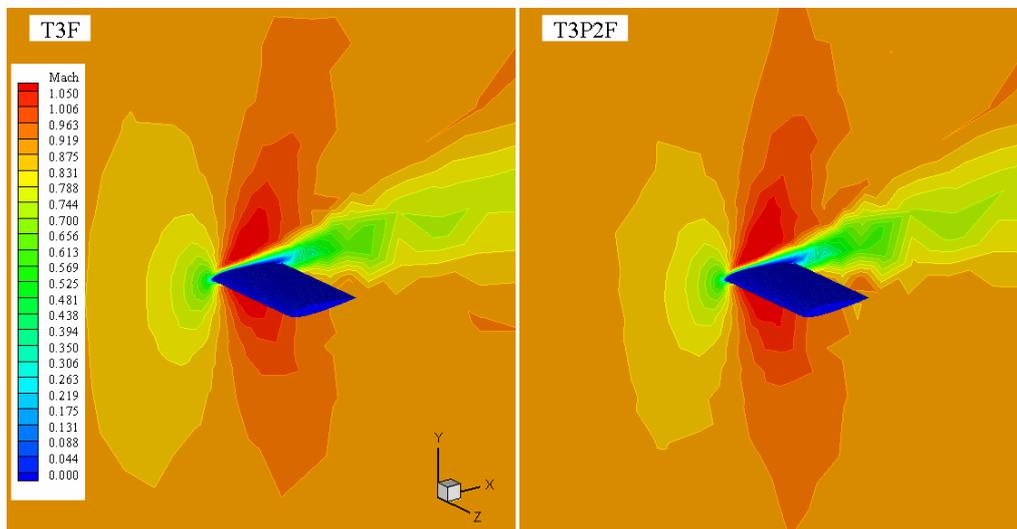


Figura 10: Distribución del número de Mach para ambos esquemas

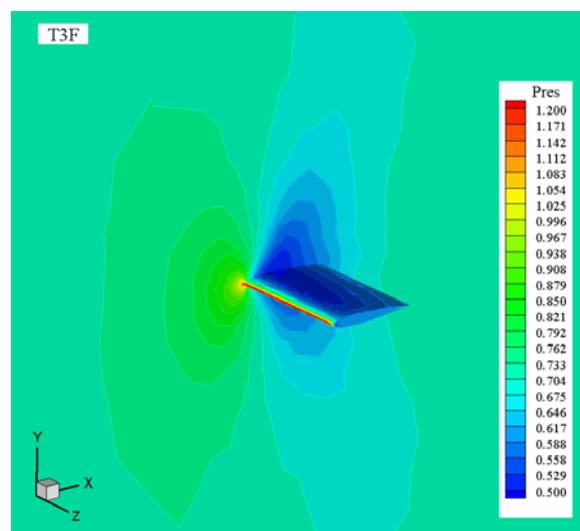


Figura 11: Distribución de la presión para el ala con $M = 0,90$; $Re = 1000$ y $\alpha = 1^\circ$

4.4 Flujo no viscoso sobre un cuerpo formado por un conjunto esfera-cilindro-cono

Un cuerpo con una geometría similar a la representada por un vehículo espacial genérico en flujo no viscoso con un ángulo de ataque de 10° es analizada en este ítem, dicho cuerpo fue estudiado experimental y numéricamente por Houtman et al. (1995). Las CC aplicadas al dominio son iguales a las impuestas en el caso de la rampa en compresión (ítem 4.1), con la salvedad de que la velocidad de la corriente libre es $V_\infty = (2,9051; 0,5122; 0, 0)$.

Se emplea una malla no estructurada, que esta formada por 187101 elementos y 35986 nodos, siendo que 7586 nodos están sobre la superficie del vehículo. Fue usado un incremento de tiempo adimensional máximo de $0,2 \times 10^{-4}$, teniendo entre las aristas una longitud máxima y mínima de $1,57 \times 10^{-1}$ y $1,07 \times 10^{-3}$, respectivamente. El tiempo de procesamiento y memoria para cada uno de los esquemas utilizado con su respectivo coeficiente de amortiguamiento ficticio (CAF) están dados en la Tabla 4.

Programa	CAF	Tiempo	Memoria
T3F	1,1	1	1
T3P2F	0,9	1,280	0,862

Tabla 4: Tiempo y memoria relativa para el ejemplo del cuerpo con $M = 2,95$ y $\alpha = 10^\circ$.

En la Figura 12 se muestra la variación de la densidad en el plano de simetría x - y para ambos programas. La distribución de la presión con el programa T3P2F es presentada en la Figura 13. De estas figuras se puede ver que los principales fenómenos del flujo (ondas de choque y expansión) son eficientemente capturadas con la malla utilizada, a pesar de que un método de refinamiento adaptativo mejoraría notablemente los resultados.

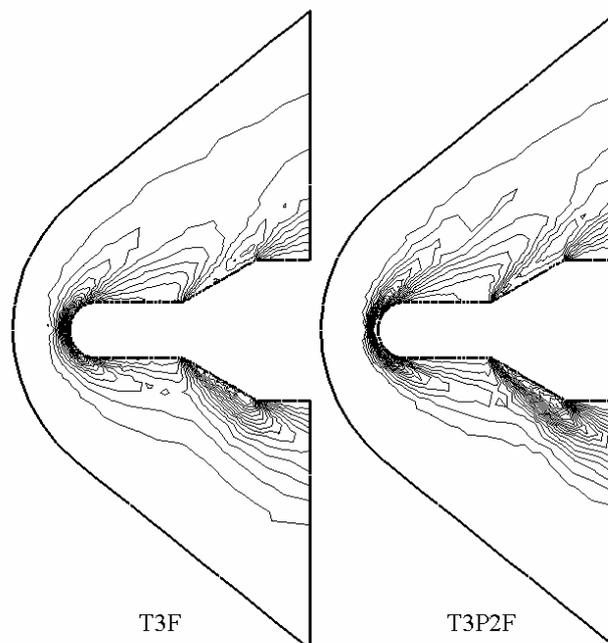


Figura 12: Variación de la densidad para ambos esquemas

Una comparación de la variación de las relaciones de presión p/p_∞ sobre el cuerpo en el plano de simetría x - y entre los resultados experimentales de Houtman et al. (1995) y los

obtenidos numéricamente con el programa T3P2F son presentados en la Figura 14. Puede observarse que existe una buena correlación para la región superior (sup) del cuerpo, tanto en la posición de las ondas como su intensidad. En la región inferior (inf) existe una discrepancia entre los resultados experimentales y los numéricos en la zona de intersección cilindro-cono ($x/L \approx 0,5$), esto es debido a los fuertes efectos viscosos existentes en la región, los cuales no pueden ser capturados con la ecuación de Euler. Los resultados numéricos muestran la existencia de una onda de choque la cual es inexistente en los resultados experimentales debido a la separación de la camada límite. Los resultados numéricos (no mostrados en este trabajo) obtenidos por Houtman et al. (1995) con una malla de $64 \times 48 \times 32$ hexaedros presentan una buena concordancia con los obtenidos en este trabajo.

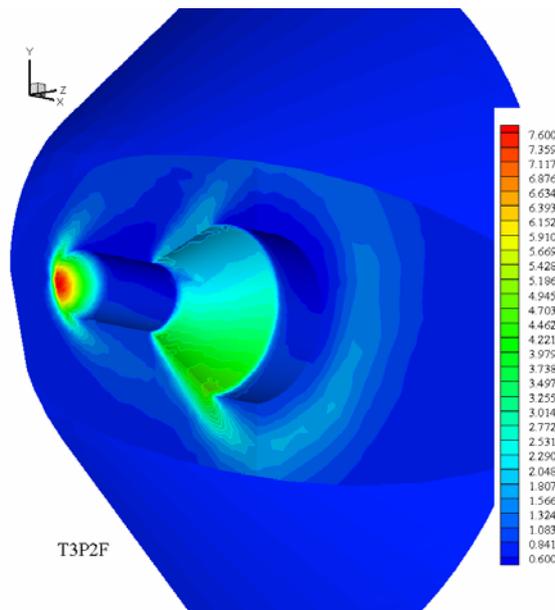


Figura 13: Distribución de la presión sobre el cuerpo esfera-cilindro-cono con $M = 2,95$ y $\alpha = 10^\circ$

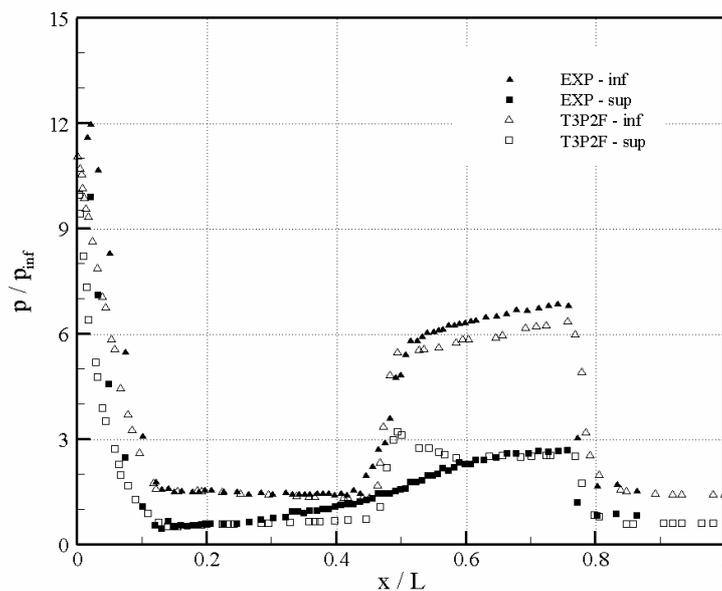


Figura 14: Distribución de la relación p/p_∞ para el cuerpo esfera-cilindro-cono con $M = 2,95$ y $\alpha = 10^\circ$

4.5 Flujo viscoso sobre una placa plana con $M = 3,0$ y $Re = 1000$

En este último caso es analizado el clásico ejemplo viscoso de una placa plana infinitamente delgada a cero ángulo de ataque en un flujo supersónico con $M = 3,0$ y número de Reynolds, $Re = 1000$. En la Figura 15 se muestra el dominio y las condiciones de contorno, siendo las dimensiones: $AB = 0,2$, $BC = 1,2$ y $AD = CE = 0,8$. Las condiciones de la corriente libre son: $V_\infty = (3,0, 0,0, 0,0)$, $\rho_\infty = 1,0$, $e_\infty = 6,2857$ y $p_\infty = 0,71428$ siendo impuestas en AD y DE, en AB se coloca condiciones de simetría, en BC se impone la condición de no deslizamiento para la velocidad y la energía interna (temperatura) de estagnación $u_\infty = 5,0$, finalmente, en CE las condiciones son libres.

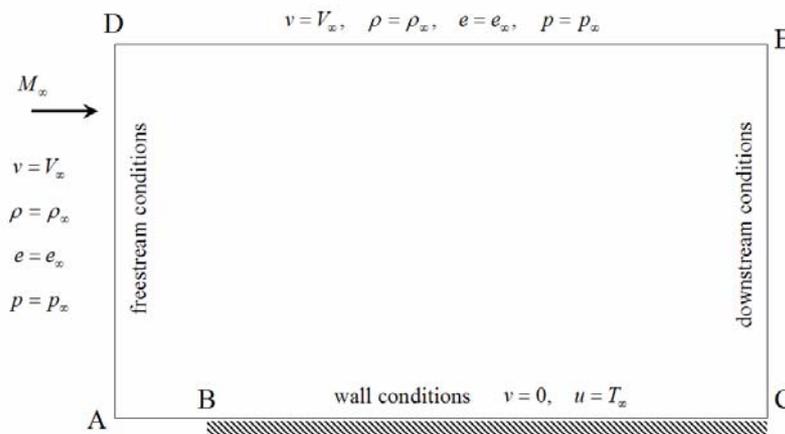


Figura 15: Geometría y condiciones de contorno para la placa plana

Se emplea una malla estructurada con 43200 elementos y 13377 nodos, concentrando los elementos en la región de inicio de la placa y de la capa límite, debido a que la interacción onda de choque / capa límite es importante. Sobre la placa plana se tiene 81 nodos y en la dirección z fueron colocados 2 elementos. El incremento de tiempo adimensional máximo usado fue $0,6 \times 10^{-4}$, teniendo entre las aristas una longitud máxima y mínima de $0,587 \times 10^{-1}$ y $0,267 \times 10^{-2}$, respectivamente.

En la Tabla 5, se presentan el tiempo de procesamiento y memoria para cada uno de los esquemas utilizado con el respectivo coeficiente de amortiguamiento ficticio.

Programa	CAF	Tiempo	Memoria
T3F	0,8	1	1
T3P2F	0,6	1,369	0,816

Tabla 5: Tiempo y memoria relativa para el ejemplo de la placa plana con $M = 3,0$ y $Re = 1000$.

La distribución del número de Mach y energía interna (temperatura) son mostrados en la Figura 16. En la Figura 17 se presenta la distribución de las relaciones de presiones p/p_∞ y la distribución del coeficiente de fricción, C_f , a lo largo de la placa y su comparación con los resultados numéricos presentados por Carter (1972). De ambas figuras puede concluirse que existe una buena concordancia con los resultados experimentales y se debe resaltar que no existe diferencia en los resultados obtenidos con ambos esquemas.

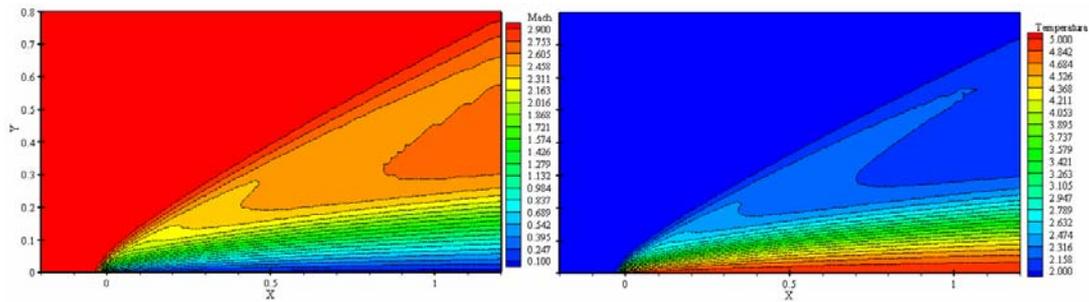


Figura 16: Distribución del número de Mach y temperatura para la placa plana

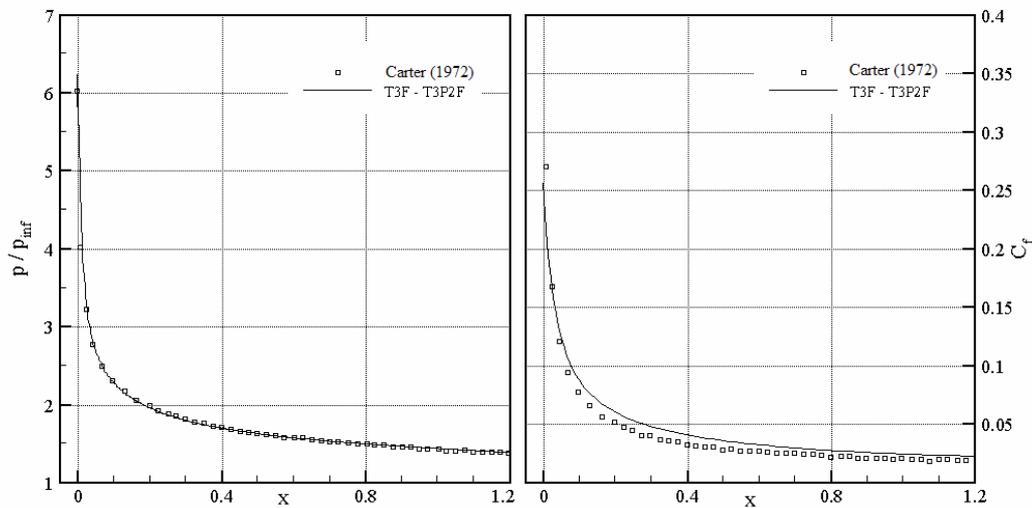


Figura 17: Distribución de la relación p/p_∞ y coeficiente de fricción para la placa plana

5 ANALISIS DE LOS RESULTADOS

Como se pudo ver a través de los diferentes ejemplos mostrados, no existe diferencia con relación a los resultados obtenidos ya sea con el método de T-G de un paso (T3F) o el método de dos pasos (T3P2F). De la comparación con los resultados presentados por otros autores se concluye que existe una buena concordancia.

Debe tenerse en cuenta que el esquema de dos pasos resulta ligeramente mas difusivo que el esquema de un paso, por lo tanto, siempre debe reducirse el coeficiente de amortecimiento ficticio (CAF) cuando se utiliza el esquema T3P2F.

En la Figura 18 puede verse la variación relativamente del tiempo de procesamiento y memoria ocupada en el esquema de dos pasos (T3P2F) con relación al esquema de un paso (T3F). Se nota que el esquema de dos pasos (T3P2F) siempre ocupa entre un 15 - 20 % menos de memoria que el esquema de un paso (T3F). Esto es justificable debido a que en el esquema de un paso los incrementos de las variables de campo deben resolverse iterativamente y por lo tanto existen vectores (dimensionados por el número de nodos) que en el caso del esquema de dos pasos no son necesarios. Por el contrario, en el caso del tiempo de procesamiento, el esquema de dos pasos siempre demanda entre un 30 - 60 % mas de tiempo que el esquema T3F. Este incremento en el tiempo de procesamiento es originado por el tipo de esquema utilizado, en el caso de esquema T3P2F siempre son realizados dos pasos para el incremento de tiempo y en el esquema T3F solamente utilizamos un paso, el cual es obtenido

con un bajo número de iteraciones.

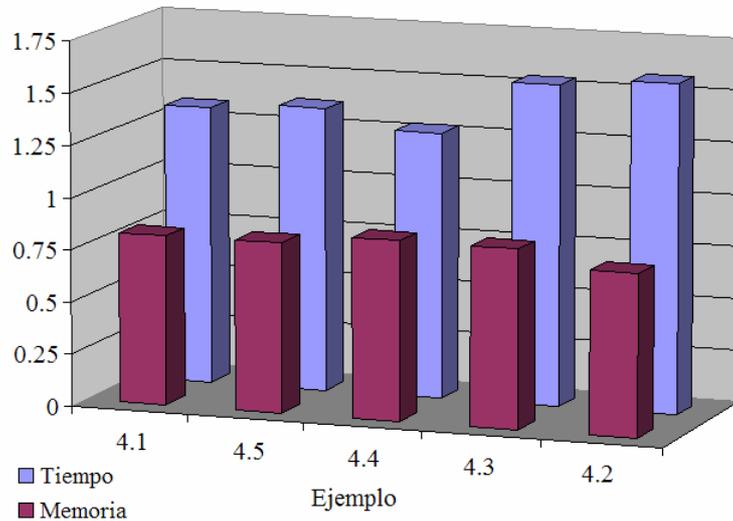


Figura 18: Variación relativa del tiempo de procesamiento y memoria de T3P2F con relación a T3F

La variación relativa de la tasa de convergencia y mínimo residuo (logaritmo) del esquema de dos pasos (T3P2F) con relación al esquema de un paso (T3F) es mostrado en la Figura 19. Estos valores fueron obtenidos de las curvas de variación del residuo para el último tiempo adimensional computado.

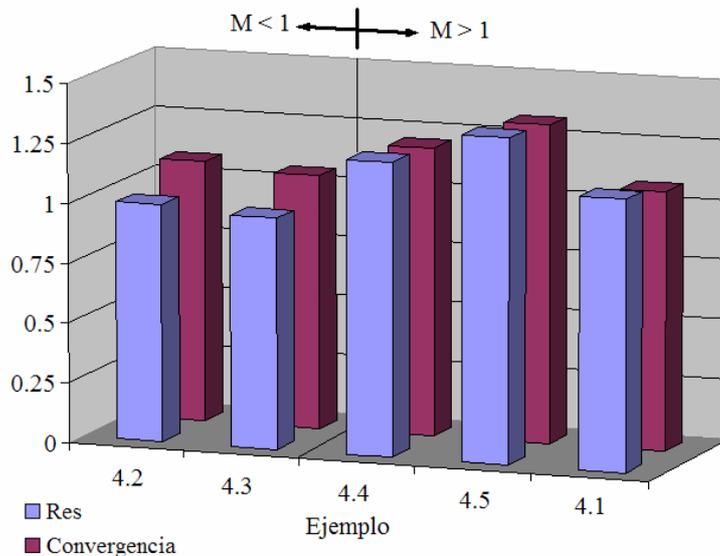


Figura 19: Variación relativa del valor mínimo del residuo y tasa de convergencia de T3P2F con relación a T3F

Para mostrar la influencia de estos parámetros hacemos la separación de los mismos en función del tipo de régimen del flujo. Los dos primeros casos corresponden a ejemplos donde el régimen es transónico (perfil y ala) y el resto de los casos es para régimen supersónico. Se

puede notar que en el caso de régimen transónico el mínimo valor de residuo alcanzado y la tasa de convergencia son prácticamente los mismos independientemente del tipo de esquema usado (T3F o T3P2F), o sea, la variación relativa es aproximadamente igual a uno. Cuando el régimen es supersónico se puede apreciar que con el uso del esquema de dos pasos logramos reducir el mínimo residuo en comparación con el obtenido con el esquema de un paso entre un 10 – 35 %. También la tasa de convergencia mejora, entre un 10 – 30 %, con el esquema T3P2F en comparación con el esquema T3F para el régimen supersónico.

Finalmente, se puede concluir que el esquema de un paso (T3F) presenta un mejor desempeño en términos de tiempo de procesamiento para cualquiera de los flujos estudiados. Con relación a la cantidad de memoria ocupada el esquema de dos pasos (T3P2F) presenta muy buenas características.

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un estudio comparativo de dos esquemas explícitos para la solución de un flujo viscoso/inviscido compresible tridimensional de fluidos newtonianos. Las limitaciones actuales en la dinámica de los fluidos computacionales básicamente están dadas por las limitaciones de memoria y velocidad de procesamiento, por lo tanto, estos parámetros conjuntamente con la robustez y precisión definen el suceso o no de un esquema computacional.

A través de los diversos ejemplos analizados se puede concluir que ambos esquemas reproducen adecuadamente los fenómenos existentes en el flujo, presentando resultados similares y tienen buena concordancia con los resultados numéricos presentados por otros autores. El esquema de Taylor-Galerkin de un paso tiene mejor rendimiento en el tiempo de procesamiento con relación al esquema de dos pasos. En lo que respecta a la memoria ocupada, el esquema de Taylor-Galerkin de dos pasos ocupa menos memoria que el esquema de un paso. En términos generales se puede concluir que el esquema de Taylor-Galerkin de un paso tiene mejor desempeño, debido a que posee un excelente tiempo de procesamiento con una ocupación de memoria aceptable.

REFERENCIAS

- J.D. Anderson. *Fundamentals of aerodynamics*. McGraw-Hill, 1991.
- J. Argyris, I.S. Doltsinis y H. Friz. Studies on computational reentry aerodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 81:257–289, 1990.
- J.E. Carter. *Numerical solutions of the Navier-Stokes equations for the supersonic laminar flow over a two-dimensional compression corner*. Technical Report TR-385, NASA, 1972.
- J. Donea. A Taylor-Galerkin method for convective transport problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:101–119, 1984.
- M. Hafez. Finite element/finite volume solutions of full potential, Euler and Navier-Stokes equations for compressible and incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20:713–741, 1995.
- E.M. Houtman, W.J. Bannink y B.H. Timmerman. *Experimental and computational study of a blunt-cylinder-flare model in high-supersonic flow*. Report LR-796, Delft University of Technology, 1995.
- T.J.R. Hughes y T.E. Tezduyar. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45:217–284, 1984.
- R. Löhner, K. Morgan y O.C. Zienkiewicz. An adaptive finite element procedure for compressible high speed flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,

- 51:441–465, 1985.
- R. Löhner. *Applied CFD techniques. An introduction based on finite element methods*. John Wiley & Sons, 2001.
- M. Kawahara y H. Hirano. A finite element method for high Reynolds number viscous fluid flow using two step explicit scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3: 137–163, 1983.
- F. Shakib, T.J.R. Hughes y Z. Johan. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: X. The compressible Euler and Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89:141–219, 1991.
- K.T. Yoon, S.Y. Moon, S.A. Garcia, G.W. Heard y T.J. Chung. Flowfield-dependent mixed explicit-implicit methods for high and low speed and compressible and incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151:75–104, 1998.