

## CAOS EN EVOLUCIÓN NO LINEAL DE ONDAS DE ALFVÉN USANDO UN MODELO RESISTIVO

Sergio A. Elaskar<sup>1</sup>, Gonzalo Sánchez-Arriaga<sup>2</sup> y Juan R. Sanmartín<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Aeronáutica. Universidad Nacional de Córdoba y CONICET.*

*e-mail:* [selaskar@efn.uncor.edu](mailto:selaskar@efn.uncor.edu)

<sup>2</sup>*Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos. Universidad Politécnica de Madrid, España.*

**Palabras claves:** ondas de Alfvén, DNLS, amarras espaciales, caos.

**Resumen.** Interacciones no lineales de ondas de Alfvén existen tanto para plasmas en el espacio como en laboratorios, con efectos que van desde calentamiento hasta conducción de corriente. Un ejemplo de emisión de ondas de Alfvén en ingeniería aeroespacial aparece en amarras espaciales. Estos dispositivos emiten ondas en estructuras denominadas “Alas de Alfvén”. La ecuación derivada no lineal de Schrödinger (DNLS) posee la capacidad de describir la propagación de ondas de Alfvén de amplitud finita circularmente polarizadas en un plasma frío. En esta investigación, dicha ecuación es truncada con el objetivo de explorar el acoplamiento coherente, débilmente no lineal y cúbico de tres ondas cerca de resonancia. De las tres ondas, una es linealmente inestable y las otras dos son amortiguadas. Por medio de la utilización de este modelo se genera un flujo 4D formado por tres amplitudes y una fase relativa. En trabajos anteriores se analizó la transición dura hacia caos en flujos 3D (Sanmartín, *et al. Physics of Plasmas*, 11(5): 2026-2035, 2004) y en flujos 4D con amortiguamiento de Landau (Elaskar, *et al. Mecánica Computacional*, 24: 2271-2288, 2005). Se presenta en este artículo un análisis teórico y numérico del comportamiento del sistema cuando la tasa de crecimiento de la onda inestable es muy próxima a cero y considerando amortiguamiento resistivo, es decir se satisface una relación cuadrática entre amortiguamientos y números de onda. Al igual que en los trabajos anteriores, se ha encontrado que sin importar cuán pequeña es la tasa de crecimiento de la onda inestable existe un dominio paramétrico, en el espacio de fase, donde aparecen oscilaciones caóticas que están ausentes para una tasa de crecimiento nula. Sin embargo diagramas de bifurcación y dominios de estabilidad presentan diferencias con respecto a lo estudiado anteriormente.

## 1 INTRODUCCIÓN

La interacción de una amarra espacial conductora con la ionosfera y con el campo magnético terrestre posee distintas aplicaciones entre las que cabe destacar la producción de potencia eléctrica y la obtención de una fuerza de empuje. Además, una amarra sin aislamiento eléctrico y sin corriente en sus extremos, podría servir como fuente generadora de electrones dando lugar a auroras artificiales (Sanmartín, *et al.* 2006). Independientemente de estas y otras aplicaciones, una amarra espacial electrodinámica, es una herramienta útil como fuente de excitación de ondas electromagnéticas (Dobrowolny, and E. Melchioni, 1993 y Drell, *et al.* 1965). Las ondas de Alfvén generadas por un cuerpo conductor en el seno de un plasma fue predicho por Drell *et al.* (1965) y fueron observadas por primera vez en la magnetosfera de Júpiter (Acuna and Ness, 1981). El satélite Io, en su movimiento alrededor de Júpiter, era el responsable de la generación de tales ondas y las observaciones confirmaron la existencia de Alas de Alfvén ligadas al satélite. La estructura del campo electromagnético o de las Alas de Alfvén que se generan cuando una amarra espacial se mueve sumergida en un plasma es posible abordarla diferenciando aquellas regiones cercanas al cuerpo (campo próximo) de las alejadas (campo lejano). Para una amarra espacial electrodinámica el campo lejano se puede estudiar mediante un análisis lineal (Sanmartín and Estes, 1997). En las proximidades de la amarra (campo próximo) tienen lugar una serie de fenómenos que obligan a realizar un análisis más detallado ya que se espera que las ondas tengan mayor intensidad y que los efectos no lineales cobren importancia. En estas circunstancias, una alternativa para analizar la evolución de los campos es por medio de la ecuación “Derivative Non-linear Schrödinger Equation - DNLS” que describe la propagación paralela o casi paralela de ondas de Alfvén circularmente polarizadas (Rogister, 1971). Esta ecuación ha tenido éxito en la comprensión de la propagación de ondas Alfvén debido a que distintas simulaciones numéricas y observaciones en el entorno espacial, han podido ser explicadas como soluciones de la DNLS.

Además cabe acotar que las ondas de Alfvén son un rasgo característico en plasmas magnetizados. Se han observado ondas de Alfvén de larga amplitud acompañando al viento solar (Smith, *et al.* 1995), además se cree que son responsables del calentamiento turbulento de las coronas estelares (Pettini, *et al.* 1985), de emisiones de radio coherentes (Lakhina and Buti, 1988) y de fenómenos relacionados con la generación de viento estelar y de chorros extragalácticos (Jatenco-Pereira, 1995). También se tiene constancia de la existencia de pulsos magnéticos solitarios en el entorno de los cometas (Tsurutani, *et al.* 1990) y de fenómenos de intermitencia turbulenta (Marsch and Liu, 1993 y Bruno, *et al.* 2001).

## 2 ECUACIÓN DNLS

La ecuación DNLS describe la propagación paralela o casi paralela a un campo magnético no perturbado de ondas de Alfvén de amplitud finita circularmente polarizadas. Dicha ecuación puede ser obtenida desde las ecuaciones de la magnetogasdinámica considerando plasma neutro, compuesto por dos fluidos, despreciando la inercia de los electrones y la corriente de desplazamiento (Mjølhus, 1976).

Si se acepta que el campo magnético sin perturbar  $B_0$  posee la dirección del eje  $z$ , la DNLS puede ser expresada de la siguiente forma (Rogister, 1971; Mjølhus, 1976; Passot and Sulem, 2003):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \pm \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi \frac{|\phi|^2}{4} \right) + \hat{\gamma} \phi = 0, \quad (1)$$

$\phi$ ,  $t$ ,  $z$  representan variables y campos en forma adimensional

$$\phi \equiv \frac{B_x \pm i B_y}{B_0}, \quad \omega_{ci} t \rightarrow t, \quad \frac{\omega_{ci}}{V_A} z \rightarrow z, \quad (2)$$

$\omega_{ci}$  es la frecuencia de ciclotrón iónica,  $V_A$  es la velocidad de Alfvén. El signo superior en la Ec.(1) corresponde a ondas polarizadas a la izquierda (LH), mientras que el inferior a ondas polarizadas a la derecha (RH) propagándose en la dirección del eje  $z$ . En la Ec.(1) siguiendo a Russell and Ott (1981) se ha introducido un operador lineal  $\hat{\gamma}$  de amortiguamiento o crecimiento. La Ec.(1) es derivada bajo las siguientes relaciones para las cantidades perturbadas,  $v_z/V_A \sim \Delta n/n_0 \sim (B_x/B_0)^2 \sim (B_y/B_0)^2$ , siendo  $n$  y  $v_z$  la densidad del plasma y la velocidad en la dirección del eje  $z$ .

La ecuación DNLS pertenece a la llamada teoría de solitones y engloba a las ecuaciones “Korteweg-de Vries – KdV”, “Modified Korteweg-de Vries – MKdV” y “Non-linear Schrodinger Equation – NLS” como casos límites. Ha sido analizada mediante tres técnicas: búsqueda de soluciones exactas (Mjolhus and Hada, 1997), integración numérica (Splanger, *et al.* 1985; Dawson and Fontan, 1988) y reducción a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta última técnica se ha llevado a cabo de dos maneras distintas: suponiendo ondas viajeras estacionarias (Hada, *et al.* 1990) y mediante un número finito de modos (Sanmartín, *et al.* 2004 y Elaskar, *et al.* 2005).

### 3 TRUNCAMIENTO MEDIANTE TRES ONDAS DE LA ECUACIÓN DNLS

Debido a que el orden del sistema de ecuaciones diferenciales resultante depende directamente del número de modos elegidos para hacer el truncamiento, interesa seleccionar el mínimo número de ondas que reproduce de manera fiel las soluciones y observaciones. Estudios numéricos que realizan la integración de la DNLS completa (Ghosh and Papadopoulos, 1987 y Nariyuki and Hada, 2005) sugieren que existen tres modos dominantes cuyos números de onda cumplen la condición de resonancia:

$$2k_1 = k_2 + k_3 \quad (3)$$

Con la finalidad de estudiar interacciones no lineales, se considera, en este trabajo, que una solución aproximada de la Ec.(1) consiste de tres ondas viajeras satisfaciendo la condición de resonancia dada por la Ec.(3)

$$\phi = 2 \sum_{j=1}^{j=3} a_j(t) \exp[i\psi_j(t)] \times \exp[i(k_j z - \omega_j t)], \quad (4)$$

siendo  $a_j$ ,  $\psi_j$  números reales. Números de ondas y frecuencias están relacionados por la expresión de dispersión lineal (sin pérdidas) para ondas de Alfvén circularmente polarizadas:

$$\omega_j = k_j \mp k_j^2 / 2 \quad (5)$$

Introduciendo la Ec.(3) en Ec.(1) y considerando solamente las componentes de  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ , es decir que se acepta que las otras componentes se amortiguan rápidamente y no poseen influencia para tiempos largos (Russell and Ott, 1981), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (Elaskar, *et al.* 2005).

$$\dot{a}_1 = \Gamma a_1 - r a_1 a_2^2 \sin \beta, \quad (6a)$$

$$\dot{a}_2 = -\gamma_2 a_2 + r a_1^2 a_2 \sin \beta, \quad (6b)$$

$$\dot{r} = -(\gamma_3 - \gamma_2) r + (1 - r^2) a_1^2 \sin \beta \quad (6c)$$

$$\dot{\beta} = \nu - 2a_1^2 \left( \bar{V} - \frac{1+r^2}{2r} \cos \beta \right) - 2r a_2^2 c \cos \beta + \frac{a_2^2}{2\bar{V}} \left( \kappa + \frac{r^2}{\kappa} \right), \quad (6d)$$

siendo

$$\bar{V} \equiv \frac{1+\kappa}{2\sqrt{\kappa}} > 1, \quad \kappa \equiv k_2/k_3 < 1, \quad (7a)$$

$$\beta \equiv \pi + \nu t + \psi_2 + \psi_3 - 2\psi_1 \quad (7b)$$

$$\gamma_1 \equiv -\Gamma < 0, \quad \gamma_2 < \gamma_3 \quad (7c)$$

Se ha introducido una nueva variable  $r \equiv a_3/a_2$  en reemplazo de la amplitud  $a_3$ . Es importante notar que la diferencia de frecuencias  $\nu = 2\omega_1 - \omega_2 - \omega_3$  es positiva y negativa para LH y RH polarización respectivamente. En forma dimensional se tiene que:

$$\nu \approx \pm \frac{(V_A k_l)^2}{\omega_{ci}} \left( \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2} \right)^2, \quad (9)$$

$\omega_{ci}$  es la frecuencia de ciclotrón iónica. El signo positivo corresponde a LH y el negativo a RH polarizaciones. En este trabajo se analiza solamente ondas polarizadas a la izquierda, por lo tanto corresponde a  $\nu$  positivos.

El sistema de ecuaciones (6), desde el punto de vista de sistemas dinámicos, posee cuatro parámetros de control independientes  $\Gamma, \kappa, \nu, \delta = \gamma_2/\gamma_3$ , sin embargo es posible reducir el número de parámetros mediante el uso de modelos de amortiguamiento. En esta investigación se utiliza amortiguamiento resistivo, que establece la siguiente relación (Akhiezer, 1975):

$$\gamma \sim \frac{k^2 V_A^2}{2\omega_{ci} \omega_{ce} \tau_e} \quad (10)$$

donde  $\tau_e$  es el tiempo de colisión de Braginskii y  $\omega_{ce}$  es la frecuencia de ciclotrón electrónica. Por lo tanto, debe satisfacerse la siguiente relación:  $\delta = \gamma_2/\gamma_3 = \kappa^2 < 1$ . La utilización de amortiguamiento de Landau ya ha sido analizada en el trabajo de Elaskar, *et al.* (2005).

#### 4 ATRACTOR PARA $\Gamma \rightarrow 0^+$

La divergencia del flujo del sistema de ecuaciones (6) es:

$$\frac{\partial}{\partial a_1^2} \frac{d a_1^2}{dt} + \frac{\partial}{\partial a_2^2} \frac{d a_2^2}{dt} + \frac{\partial}{\partial a_3^2} \frac{d a_3^2}{dt} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{d \beta}{dt} = 2(\Gamma - \gamma_2 - \gamma_3) \quad (11)$$

De la última ecuación se destaca que la divergencia del flujo presenta únicamente dependencia de parámetros de control del sistema, no siendo función de ninguna variable del espacio de fases. En adelante sólo se analizarán los casos en los que el sistema es disipativo, es decir se verifica que:

$$(\delta + 1 - \bar{\Gamma}) > 0; \quad \bar{\Gamma} = \Gamma / \gamma_3; \quad \delta = \gamma_2 / \gamma_3 \quad (12)$$

Considerando amortiguamiento resistivo y  $\bar{\Gamma} \neq 0$ , los puntos fijos de las Ecs.(6) quedan definidos por:

$$r_p = \kappa; \quad a_{1p}^2 = \frac{\gamma_2}{\kappa \sin \beta_p}; \quad a_{2p}^2 = \frac{\Gamma}{\kappa \sin \beta_p}; \quad (13a)$$

$$\bar{v} \sin \beta_p = \alpha - \lambda \cos \beta_p \quad (13b)$$

con  $\alpha = 2\bar{V}\kappa - \bar{\Gamma}/\bar{V}$ ;  $\lambda = 1 + \kappa^2 - 2\bar{\Gamma}$ ;  $\bar{v} = v/\gamma_3$ .

La Ec.(13b) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\sin \beta^* \sin \beta_p + \cos \beta^* \cos \beta_p = \frac{\alpha}{\Delta}; \quad \sin \beta^* = \frac{\bar{v}}{\Delta}; \quad \Delta^2 = (\bar{v})^2 + \lambda^2. \quad (14)$$

Esta última ecuación posee dos soluciones:

$$\cos(\beta_p - \beta^*) = \frac{\alpha}{\Delta} \quad \text{y} \quad \cos(\beta^* - \beta_p) = \frac{\alpha}{\Delta},$$

la primera solución corresponde al punto fijo P y la segunda al punto fijo P\*.

Para que existan los puntos fijos P y P\*, es decir para encontrar soluciones en las Ecs.(13), se deben satisfacer dos requisitos:

$$1 - \sin \beta_p > 0$$

$$2 - |\alpha| \leq \sqrt{(\bar{v})^2 + \lambda^2}$$

Para valores de  $\bar{\Gamma} \rightarrow 0^+$ , caso de interés en este trabajo, se verifica que el punto fijo P existe en el intervalo  $\kappa \in (0, 1]$  considerando un amplio rango de valores de  $\bar{v} > 0$ . Sin embargo el punto fijo P\* solamente está definido para valores de  $\kappa$  próximos a 1. En función de ello se analizará el comportamiento del sistema en torno al punto fijo P.

La estabilidad del punto fijo P es determinada por los valores propios de la matriz jacobiana M:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{\delta\bar{\Gamma}} & -\sqrt{\delta/\kappa\sin\beta_p}\frac{\bar{\Gamma}}{\kappa} & -\sqrt{\delta/\kappa\sin\beta_p}\frac{\bar{\Gamma}}{\tan\beta_p} \\ 2\sqrt{\delta\bar{\Gamma}} & 0 & \sqrt{\bar{\Gamma}/\kappa\sin\beta_p}\frac{\delta}{\kappa} & \sqrt{\bar{\Gamma}/\kappa\sin\beta_p}\frac{\delta}{\tan\beta_p} \\ 2(1-\kappa^2)\sqrt{\delta\sin\beta_p/\kappa} & 0 & -\delta-1 & \frac{(1-\kappa^2)\delta}{\kappa\tan\beta_p} \\ \frac{-2\sqrt{\delta/\kappa\sin\beta_p}}{\left[\frac{1+\kappa}{\delta} - \frac{(1+\kappa^2)\cos\beta_p}{\kappa}\right]^{-1}} & \frac{\sqrt{\bar{\Gamma}/\kappa\sin\beta_p}}{\left[\frac{2\kappa^{1.5}}{1+\kappa} - 4\kappa\cos\beta_p\right]^{-1}} & \frac{\delta/\kappa\tan\beta_p}{\left[1-\frac{1}{\kappa^2}\right]^{-1}} + \frac{\bar{\Gamma}/\kappa\sin\beta_p}{\left[\frac{2\sqrt{\kappa}}{1+\kappa} - 2\cos\beta_p\right]^{-1}} & 2\bar{\Gamma} - \delta - 1 \end{bmatrix}$$

Debido a la dificultad para hallar una expresión analítica de los valores propios de la matriz jacobiana M, se ha discretizado el espacio de parámetros de control  $(\bar{v}; \bar{\Gamma}; \kappa)$ , con la condición que  $\bar{\Gamma} \rightarrow 0^+$ . En la Figura 1 se muestran los resultados de este análisis, allí se indica la estabilidad del punto fijo P en función de  $\kappa$  y para diferentes valores de  $v/\gamma_3$  considerando  $\bar{\Gamma} = 0.001$ . En el eje de ordenadas está representada la parte real con menor valor absoluto de los cuatro valores propios. Se observa de la figura que el punto P pierde su estabilidad para  $\bar{v} \approx 1.5$  y  $\kappa > 0.8$ . Por tal motivo se estudiará el comportamiento del sistema para dichos valores en el espacio paramétrico  $(\bar{v}; \bar{\Gamma}; \kappa)$ .

El espacio de estado es 4D:  $(a_1; a_2; r; \beta)$ , por lo tanto para simplificar el análisis se investigará la evolución de los máximos valores que adquiere  $a_2$  en función de  $\kappa$  y de  $v/\gamma_3$  para cada tipo de atractor (punto fijo, ciclo límite, atractor caótico, etc.). La Figura 2a indica el valor de  $a_2$  máximo en función de  $\kappa$ . Para  $\kappa$  aproximadamente menor que 0.8,  $a_2$  máximo está determinado por las coordenadas del punto fijo P, para valores de  $\kappa$  menores a 0.8 el punto fijo P es estable. Luego aparece una bifurcación de supercrítica de Hopf (Nayfeh and Balachandran, 1995) generando un atractor ciclo límite, este comportamiento se mantiene con ciclos límites cada vez más grandes ( $a_2$  máximo se incrementa) hasta llegar a  $\kappa$  cerca de 0.9996 donde aparece una bifurcación discontinua ("cyclic fold bifurcation") y posteriormente una cascada de Feigenbaum hasta alcanzar caos (ver Figura 2b).

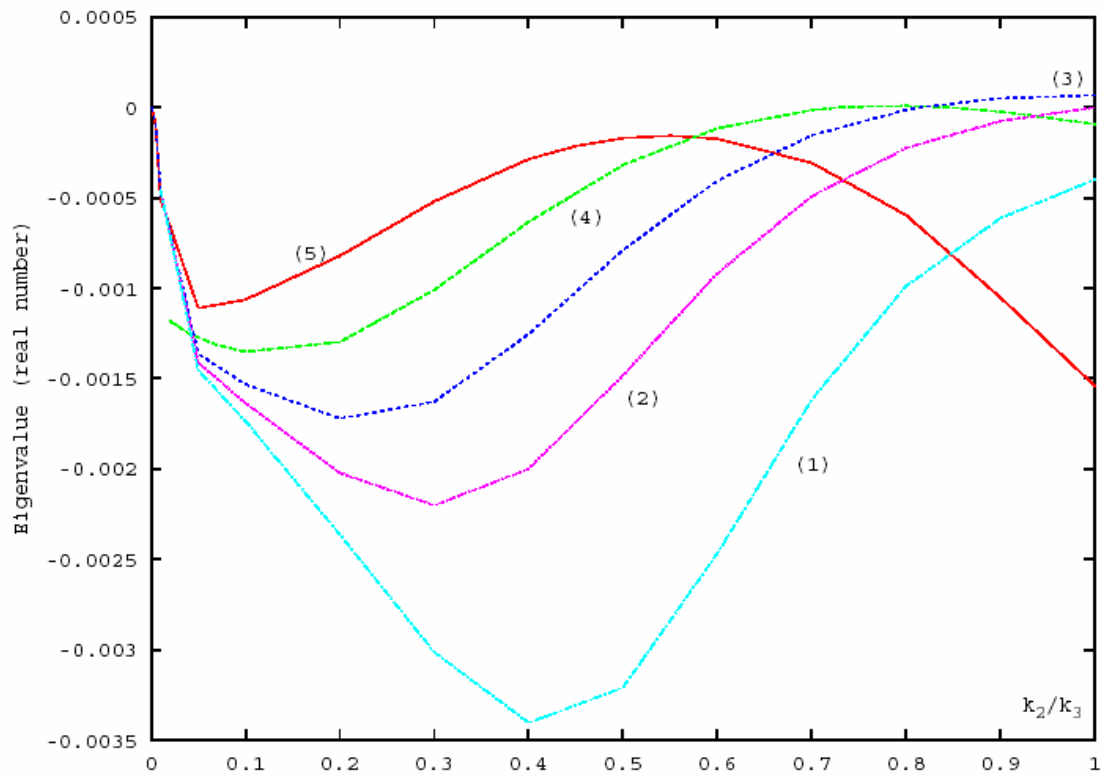


Figura 1. Estabilidad para  $\bar{\Gamma} = 0.001$ . (1)  $\nu = 3$ , (2)  $\nu = 2$ , (3)  $\nu = 1.5$ , (4)  $\nu = 1$ , (5)  $\nu = 0.5$ .

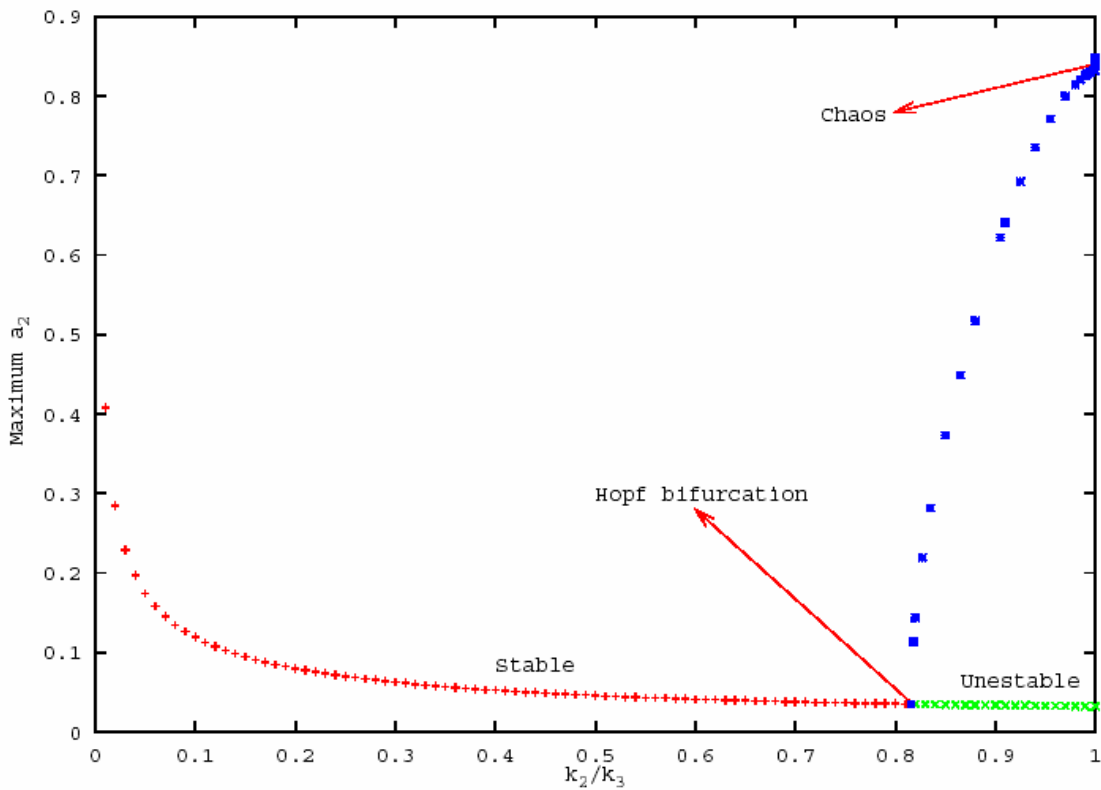


Figura 2a.  $\bar{\Gamma} = 0.001$ . Máximo  $a_2$  en función de  $\kappa$  para  $\nu/\gamma_3$ .

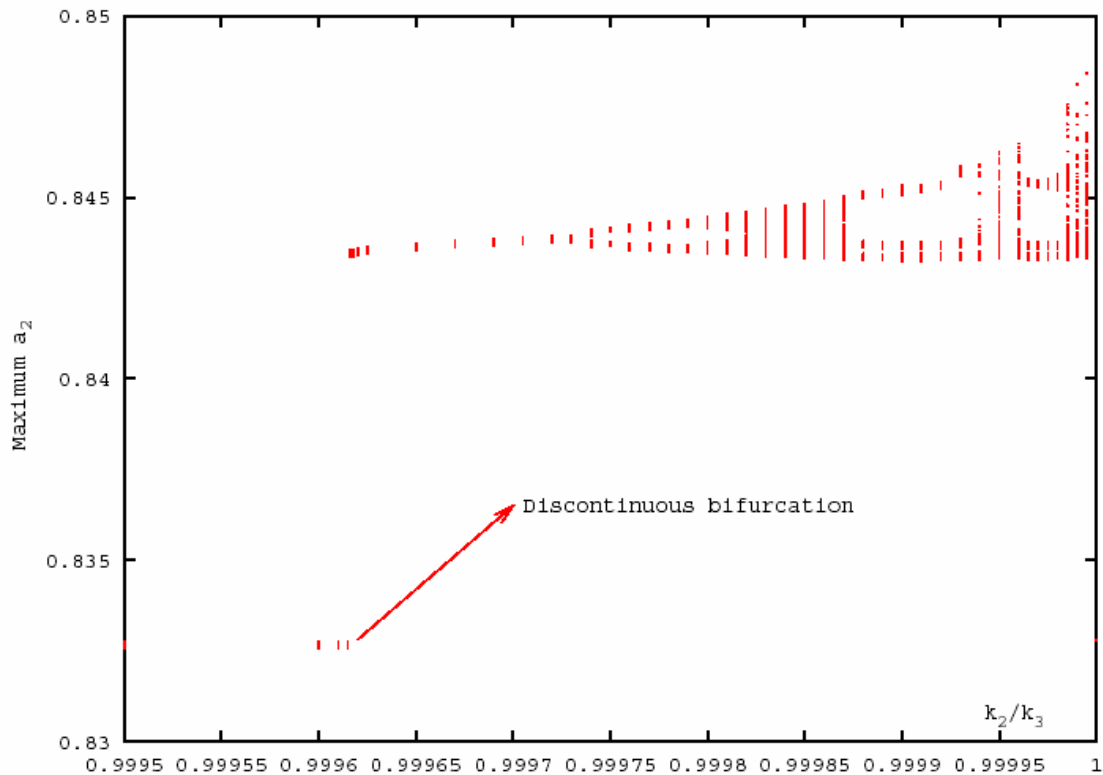


Figura 2b.  $\bar{\Gamma} = 0.001$ . Máximo  $a_2$  en función de  $\kappa$  para  $v/\gamma_3$ .

En las Figuras 2a y 2b, de los tres parámetros de control del sistema, se han mantenido constantes dos de ellos:  $\Gamma/\gamma_3$ ,  $v/\gamma_3$  mientras se ha variado  $\kappa$ . Ahora se analiza que sucede cuando varía  $v/\gamma_3$  y se mantienen constantes  $\kappa$  y  $\Gamma/\gamma_3$ . Para ello se considera que  $\Gamma/\gamma_3 = 0.001$  y que  $\kappa = 0.9995$ , de forma tal de encontrar comportamiento caótico. Los resultados de este análisis están presentados en las Figuras 3a y 3b. En la Figura 3a se representa la evolución de  $a_2$  máximo en función de  $v/\gamma_3$ . Se destaca que el punto fijo P se torna inestable para  $v/\gamma_3$  aproximadamente igual a 1.2 apareciendo allí una bifurcación de supercrítica de Hopf y un atractor ciclo límite. A medida que  $v/\gamma_3$  se incrementa, el tamaño de los ciclos límites también aumenta ( $a_2$  máximo crece) hasta  $\bar{v} \approx 1.4$  donde aparece una bifurcación discontinua (“cyclic fold bifurcation”) y luego se genera comportamiento caótico. La evolución caótica finaliza para  $\bar{v} \approx 2$ . La Figura 3b muestra el comportamiento caótico para  $\Gamma/\gamma_3 = 0.001$ ,  $\kappa = 0.99995$  y  $v/\gamma_3$  tomando valores alrededor de 1.62.

En los párrafos previos, se ha estudiado la evolución dinámica del sistema de ecuaciones (6) hasta alcanzar comportamiento caótico. Sin embargo no se ha puesto atención en la visualización, en el espacio de estado, de los distintos atractores. Con la finalidad de determinar las trayectorias y los atractores se ha utilizado un esquema de integración numérica Runge-Kutta de 4<sup>to</sup> orden (Shanks, 1966). Se destaca que para  $\bar{\Gamma} \rightarrow 0^+$  se posee dos escalas de tiempo muy diferentes durante la integración de las Ecs.(6) generando lo que se denomina un “problema stiff” (Sanmartín, *et al.* 2004). Las Figuras 4a y 4b, muestran la proyección del atractor caótico cuadrimensional  $(a_1, a_2, r, \beta)$  sobre los espacios tridimensionales  $(\beta, r, a_1)$  y  $(\beta, a_2, a_1)$  respectivamente. En ambas gráficas también está indicada la proyección del punto fijo P. La Figura 4c presenta la proyección del atractor



caótico en el plano  $(\beta, a_1)$ , en esta gráfica se destaca claramente la existencia de órbitas periódicas. Se deduce de las tres figuras que  $a_1$  se incrementa “subiendo” por medio de órbitas periódicas en las cuales  $a_2$  se mantiene prácticamente igual a cero, para posteriormente alejarse del espacio  $a_2 = 0$ , alcanzar el máximo valor de  $a_2$ , luego el máximo valor de  $a_1$  para descender nuevamente por el espacio  $a_2 = 0$ . Mientras que la trayectoria se encuentra en el espacio  $a_2 = 0$  se verifica que la variable  $r$  es distinta de cero y cuando la trayectoria sale fuera del espacio  $a_2 = 0$  se tiene que  $r \rightarrow 0$ .

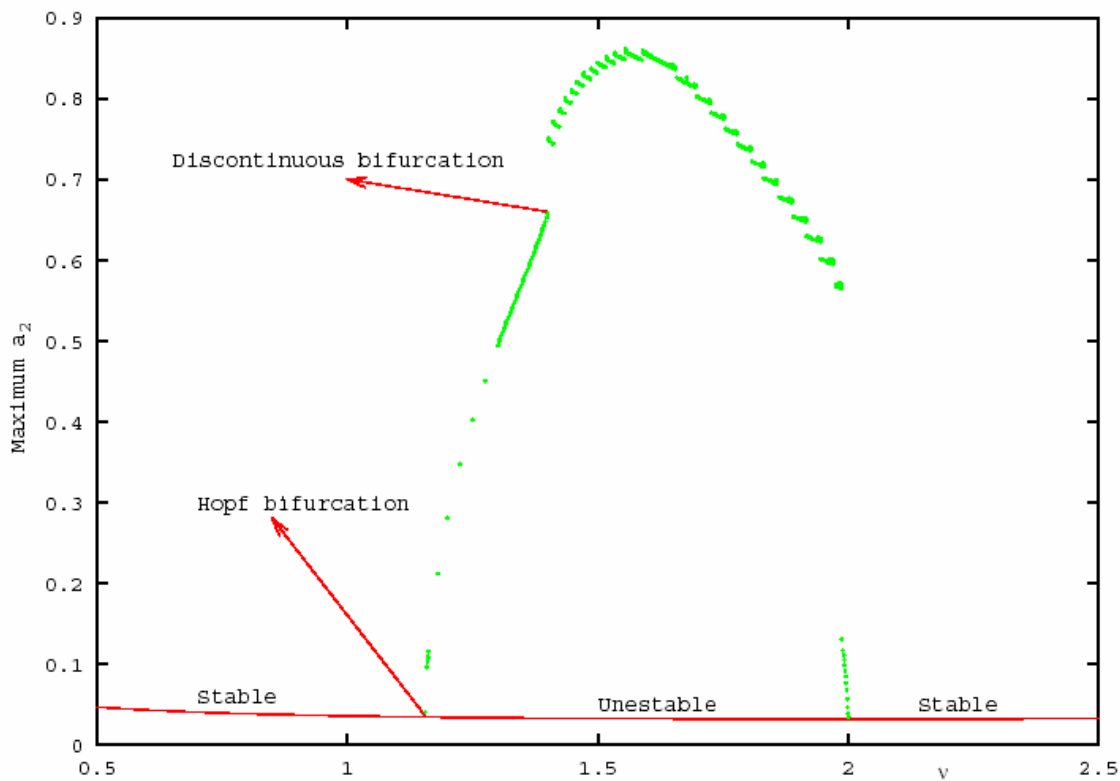


Figura 3a.  $\bar{\Gamma} = 0.001$ . Máximo  $a_2$  en función de  $\bar{\nu}$  para  $\kappa = 0.99995$ .

En las Figuras 5 y 6 se indica una comparación entre atractores para diferentes valores de los parámetros de control en las Ecs.(6). La Figura 5 es la proyección sobre el plano  $(\beta, a_1)$  de dos atractores, uno corresponde a  $\bar{\Gamma} = 0.001 - \kappa = 0.99995 - \bar{\nu} = 1.5$  y el otro a  $\bar{\Gamma} = 0.001 - \kappa = 0.9 - \bar{\nu} = 1.5$ . Además, la Figura 6 muestra la proyección sobre el espacio  $(\beta, r, a_1)$  de tres atractores, el primero para:  $\bar{\Gamma} = 0.001 - \kappa = 0.99995 - \bar{\nu} = 1.5$ ; el segundo para  $\bar{\Gamma} = 0.001 - \kappa = 0.9 - \bar{\nu} = 1.5$  y el tercero con los siguientes valores para los parámetros de control  $\bar{\Gamma} = 0.001, \kappa = 0.99 - \bar{\nu} = 1.5$ .

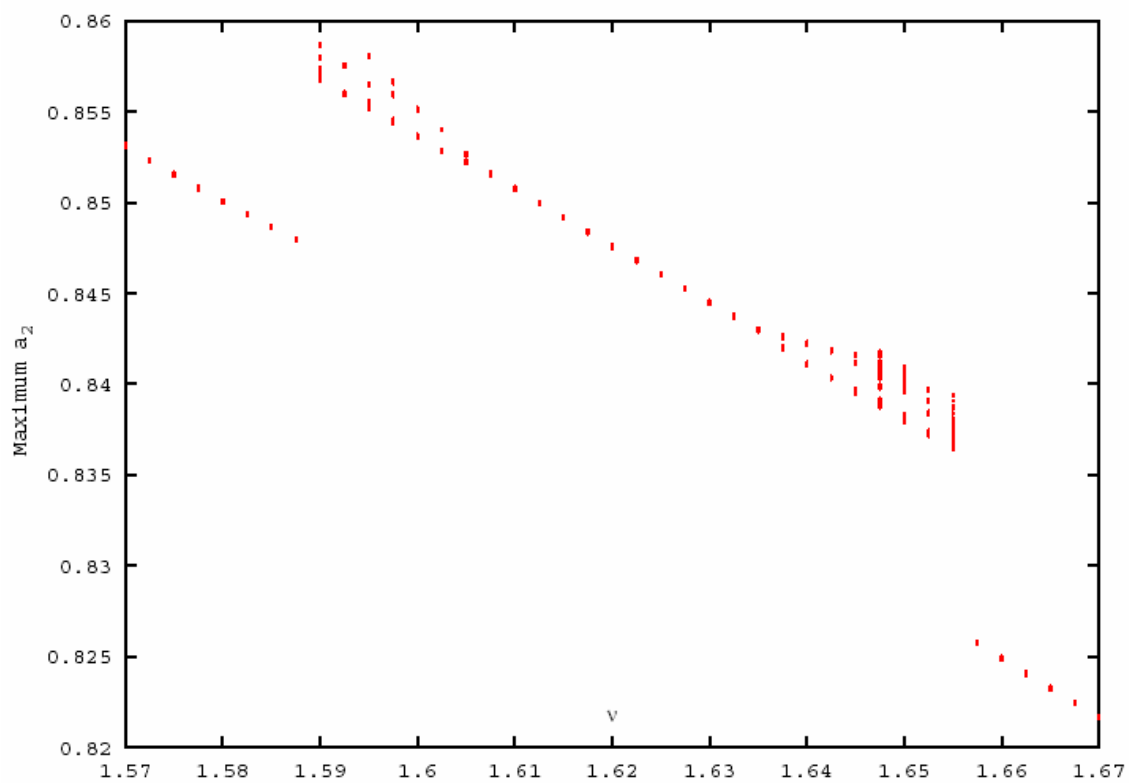


Figura 3b.  $\bar{\Gamma} = 0.001$ . Máximo  $a_2$  en función de  $\bar{v}$  para  $\kappa = 0.99995$ .

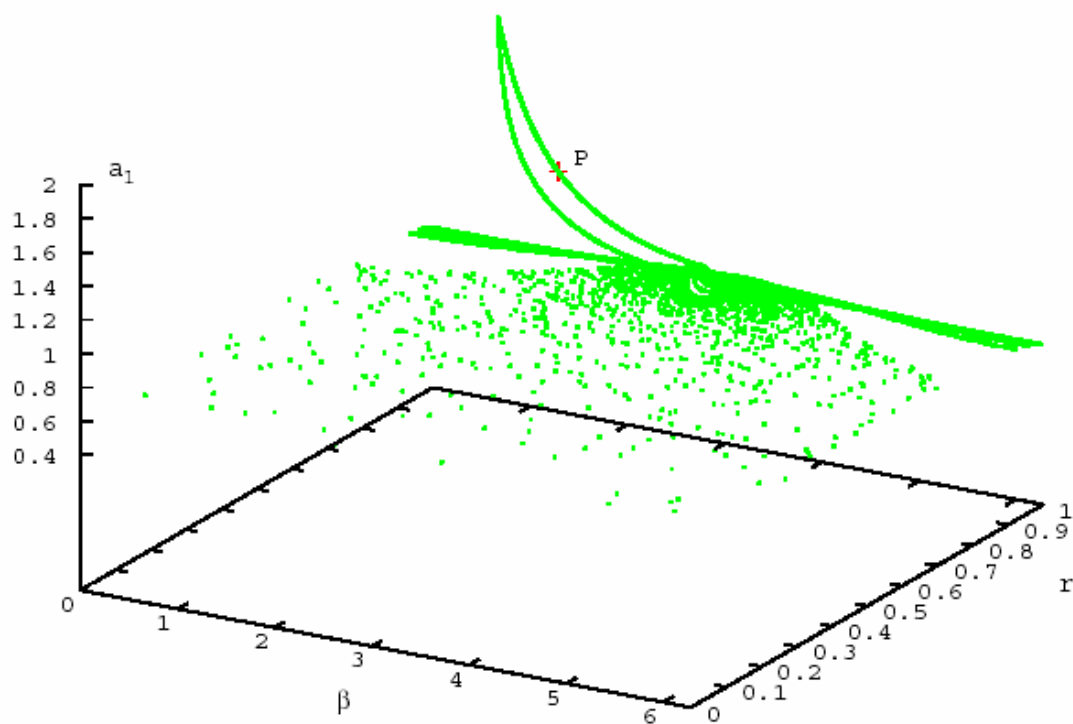


Figura 4a. Proyección en el espacio  $(\beta, r, a_1)$  del atractor caótico correspondiente a  $\bar{\Gamma} = 0.001$ ,  $\kappa = 0.99995$  y  $\bar{v} = 1.5$ .

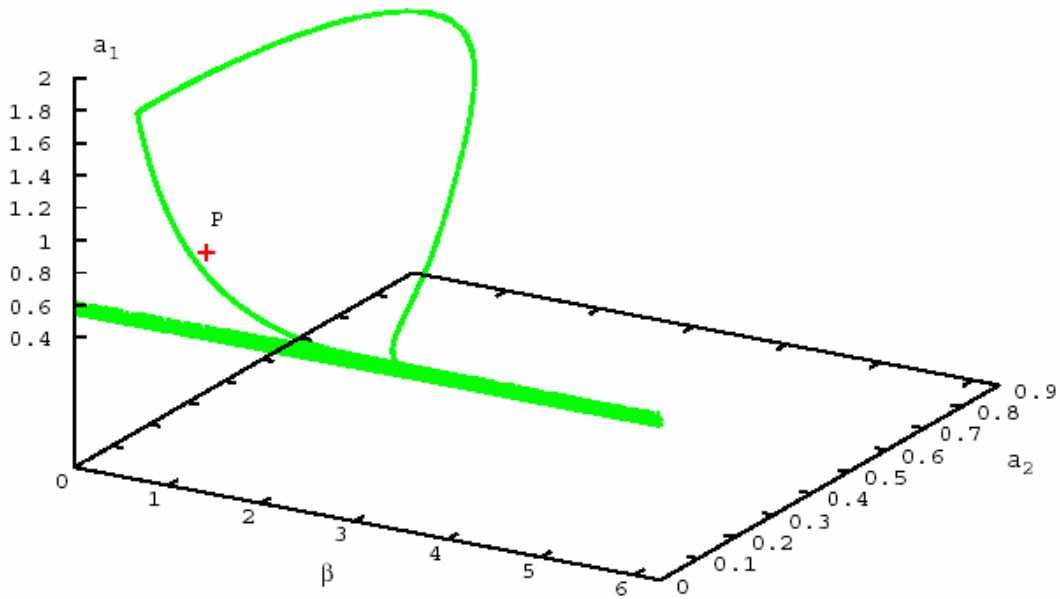


Figura 4b. Proyección en el espacio  $(\beta, a_2, a_1)$  del atractor caótico correspondiente a  $\bar{\Gamma} = 0.001$ ,  $\kappa = 0.99995$  y  $\bar{\nu} = 1.5$ .

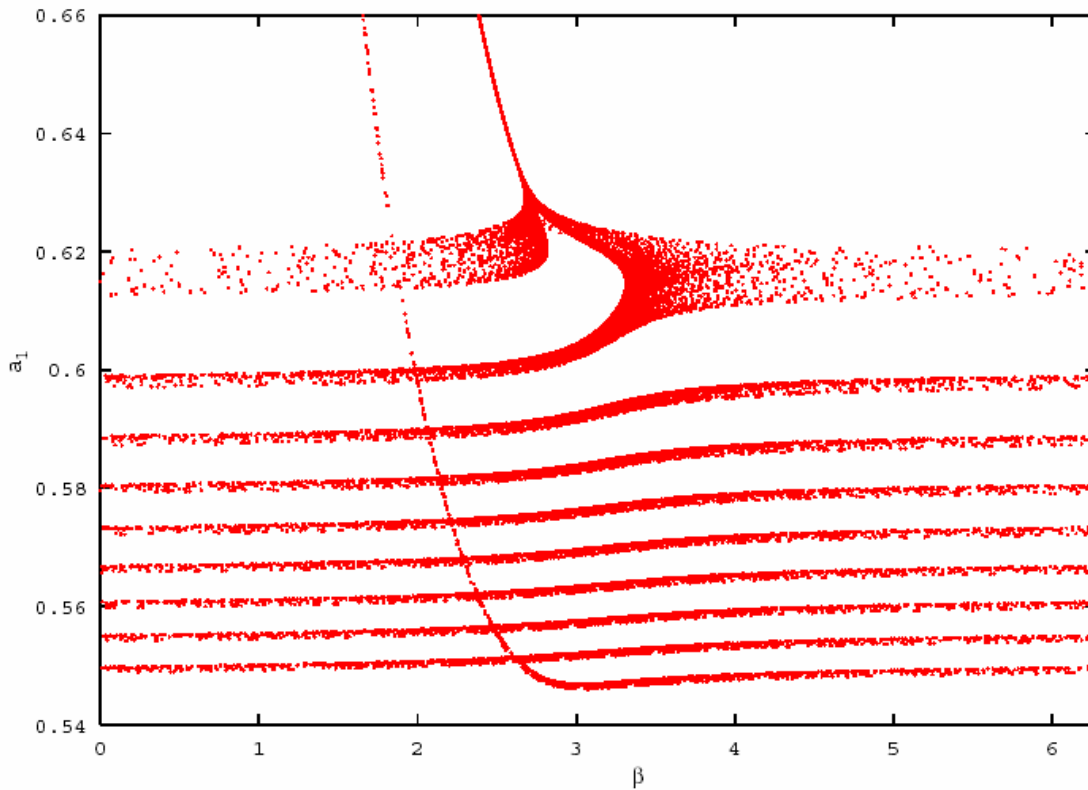


Figura 4c. Proyección en el espacio  $(\beta, a_1)$  del atractor caótico correspondiente a  $\bar{\Gamma} = 0.001$ ,  $\kappa = 0.99995$  y  $\bar{\nu} = 1.5$ .

En la Figura 5 se destaca que el ciclo límite para  $\bar{\Gamma} = 0.001$  -  $\kappa = 0.9$  -  $\bar{\nu} = 1.5$  carece de órbitas periódicas, mientras que cuando los parámetros de control adquieren los valores de  $\bar{\Gamma} = 0.001$  -  $\kappa = 0.99995$  -  $\bar{\nu} = 1.5$  aparece un atractor caótico con órbitas periódicas. En la Figura 6 puede observarse que para el atractor  $\bar{\Gamma} = 0.001$  -  $\kappa = 0.99$  -  $\bar{\nu} = 1.5$  (trazo de color azul) aparecen órbitas en el espacio  $a_2 = 0$  con  $r$  distinto de cero que están ausentes para el ciclo límite  $\bar{\Gamma} = 0.001$  -  $\kappa = 0.9$  -  $\bar{\nu} = 1.5$ . Dichas órbitas van disminuyendo su amplitud en  $\beta$  a medida que  $a_1$  crece y mientras  $a_2$  permanece prácticamente igual a cero. En la Figura 6 también es posible inferir la existencia de evolución hacia comportamiento caótico mediante el mecanismo de duplicación de período a medida que el parámetro de control  $\kappa$  se incrementa.

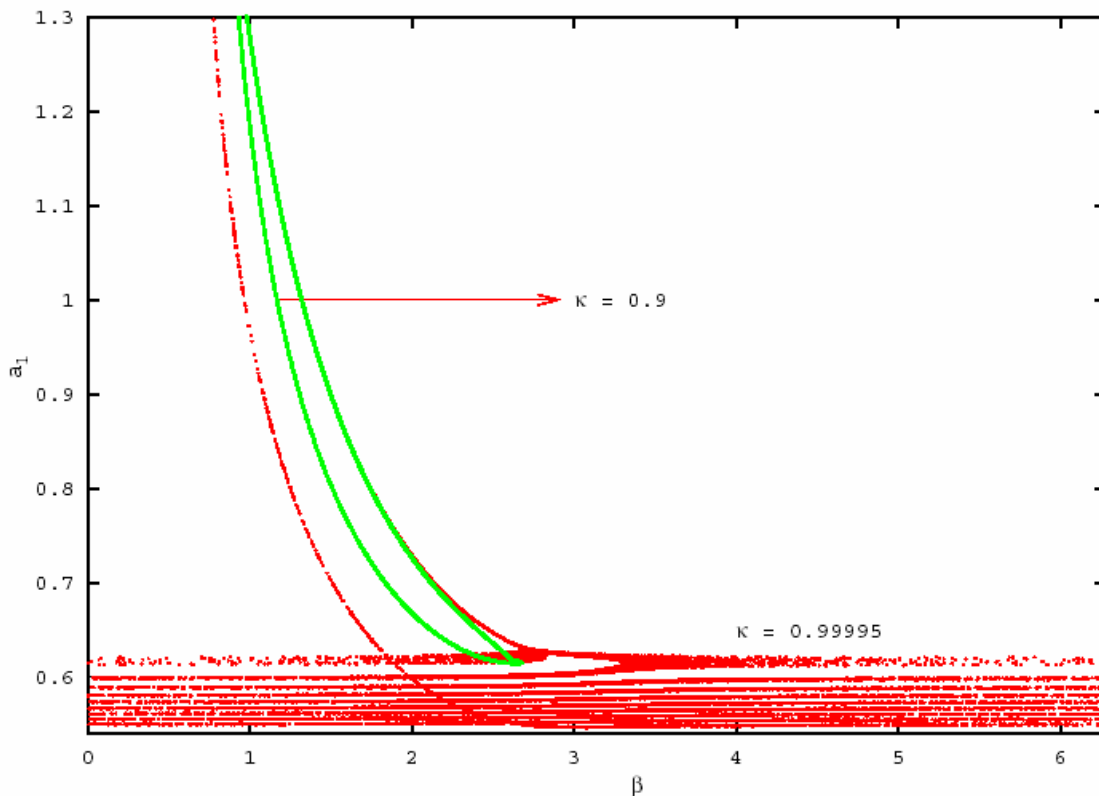


Figura 5. Proyección en el espacio  $(\beta, a_1)$  del atractor caótico correspondiente a  $\bar{\Gamma} = 0.001$ ,  $\kappa = 0.99995$  y  $\bar{\nu} = 1.5$  (rojo) y del ciclo límite para  $\bar{\Gamma} = 0.001$ ,  $\kappa = 0.9$  y  $\bar{\nu} = 1.5$  (verde).

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha truncado la ecuación DNLS, que describe la propagación e interacción de ondas de Alfvén circularmente polarizadas de amplitud finita, con la finalidad de explorar la dinámica débilmente no lineal mediante acoplamiento cúbico y coherente de tres ondas cerca de resonancia. Una de las ondas es linealmente inestable ( $\Gamma \geq 0$ ) y las otras dos son amortiguadas ( $\gamma_2 < 0$  y  $\gamma_3 < 0$ ). Se ha utilizado un modelo de tres ondas completo, considerado amortiguamiento resistivo y polarización a la izquierda. Se obtiene un flujo 4D para las amplitudes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $r = a_3/a_2$  y para la fase relativa  $\beta$ .

En forma similar a lo encontrado cuando se consideró amortiguamiento de Landau (Elaskar, *et al.* 2005) existe un dominio dentro del espacio paramétrico  $(\bar{\nu}; \bar{\Gamma}; \kappa)$  en el cual el comportamiento es caótico.

La evolución hacia caos posee diferentes caminos dependiendo de que parámetro de control varíe. En el caso de que se modifique  $\kappa = k_2/k_3$  se encuentra que aparece en primer lugar una bifurcación supercrítica de Hopf, luego una bifurcación discontinua “cyclic fold” y posteriormente una cascada de duplicación del periodo hasta llegar a comportamiento caótico. Si el parámetro de control que varía es  $\bar{\nu}$  se produce una bifurcación supercrítica de Hopf y luego una bifurcación discontinua “cyclic fold” para entonces aparecer comportamiento caótico. La situación es totalmente diferente si se analiza el comportamiento del sistema cuando se altera  $\bar{\Gamma}$ , aquí se genera el fenómeno de transición dura hacia caos, debido a que para  $\bar{\Gamma} = 0$  hay solamente puntos fijos (Elaskar, *et al.* 2005) y para  $\bar{\Gamma} \rightarrow 0^+$  aparece caos en forma abrupta.

Finalmente se destaca que las amarras espaciales electrodinámicas presentan una serie de aplicaciones prometedoras que posiblemente puedan ser empleadas en futuras misiones espaciales. Una de ellas es la de excitar ondas de baja frecuencia en plasmas magnetizados, lo cual puede ser utilizado para investigar la propagación de ondas de Alfvén en el entorno espacial.

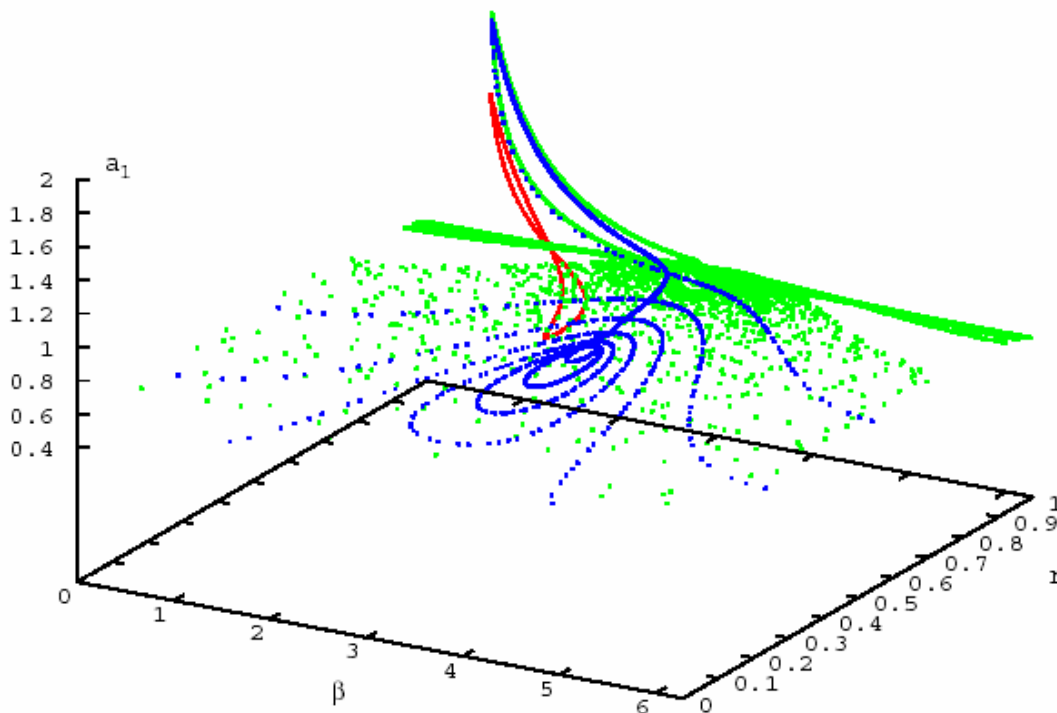


Figura 6. Proyección en el espacio  $(\beta, r, a_1)$  de los atractores correspondientes a  $\bar{\Gamma} = 0.001$ ,  $\bar{\nu} = 1.5$  y  $\kappa = 0.99995$  (verde);  $\bar{\Gamma} = 0.001$ ,  $\bar{\nu} = 1.5$ ,  $\kappa = 0.99$  (azul);  $\bar{\Gamma} = 0.001$ ,  $\bar{\nu} = 1.5$ ,  $\kappa = 0.9$  y  $\bar{\nu} = 1.5$  (rojo).

## **Agradecimientos**

Esta investigación ha recibido apoyo del Ministerio de Ciencia y Tecnología de España mediante el Proyecto ESP2004-01511; de CONICET mediante el proyecto PIP No 5692; de FONCYT con el Proyecto PICTO2005-UNRC 30339-162 y de la Universidad Nacional de Córdoba por medio de un Proyecto SECYT.

## **REFERENCIAS**

- J. Sanmartín, O. López-Rebollal, E. del Río and S. Elaskar. Hard transition to chaotic dynamics in Alfvén wave-fronts. *Physics of Plasmas*, 11(5): 2026-2035, 2004.
- S. Elaskar, G. Sanchez-Arriaga and J. Sanmartín. Fully three wave model to study the hard transition to chaotic dynamics in Alfvén wave fronts. *Mecánica Computacional*, 24: 2271-2288, 2005.
- J. Sanmartín, R. Estes, E. Lorenzini and S. Elaskar. The Efficiency of ED-Tether Thrusters. *Journal of Spacecraft and Rocket, AIAA*. 43(3): 659-666, 2005.
- M. Dobrowolny and E. Melchioni. Electrodynamic aspects of the thrust tethered satellite mission. *J. Geophys. Res.*, 98(13): 761 (1993)
- S. Drell, H. Foley and M. Ruderman. Drag and propulsion of large satellites in the ionosphere: An Alfvén propulsion engine in space. *J. Geophys. Res.*, 70: 3131, 1965.
- M. Acuna and F. Ness. Standing Alfvén wave current system at Io: Voyager I Observations. *J. Geophys. Res.*, 86: 8513, 1981.
- J. Sanmartín and R. Estes: Alfvén wave far field from steady-current tethers. *J. Geophys. Res.*, 102-A7(14): 625, 1997.
- A. Rogister. Parallel Propagation of Nonlinear Low-Frequency Waves in High- $\beta$  Plasma. *The Physics of Fluids*, 14(12): 2733-2739, 1971.
- E. J. Smith, A. Balogh, M. Neugebauer and D. McComas. Ulysses Observations of Alfvén waves in the Southern and Northern Hemispheres. *Geophys Res. Lett.*, 22: 3381, 1995.
- M. Pettini, L. Nocera and A. Vulpiani. Compressible MHD Turbulence: An Efficient Mechanism to Heat Stellar Coronae. *Chaos in Astrophysics*. Eds. J. Buchler *et al.*, Dordrecht-Reidel, 1985.
- G. Lakhina and B. Buti. Coherent Radiation Mechanism for Cometary Kilometric Radiation. *Astrophysics Journal*, 327: 1020, 1988.
- V. Jatenco-Pereira. Alfvén Waves in Astrophysical Plasmas. *Physica Scripta*. 60:113, 1995.
- B. Tsurutani, E. Smith, H. Marsumoto, A. Brinca and N. Omid. Highly nonlinear Magnetic Pulses at Comet Giacobini-Zinner. *Geophysical Research Letter*, 17: 757, 1990.
- E. Marsch and S. Liu. Structure Functions and Intermittency of Velocity Fluctuations in the Inner Solar Wind. *Ann. Geophys.*, 11:227, 1993.
- R. Bruno, V. Carbone, P. Veltri, E. Pietropaolo, B. Bavassano. Identifying intermittency events in the solar wind. *Planetary and Space Science*. 49: 1201-1210, 2001.
- E. Mjølhus. On the modulational instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field. *J. Plasma Phys.* 16: 321-334, 1976.

- A. Rogister. Parallel Propagation of Nonlinear Low-Frequency Waves in High- $\beta$  Plasma. *Phys. Fluids*, 14: 2733-2739, 1971.
- T. Passot and P. Sulem, Long-Alfvén-wave trains in collisionless plasmas. I. Kinetic theory. *Phys. Plasmas* 10:3887-3905, 2003.
- D. Russell and E. Ott. Chaotic (strange) and periodic behaviour in instability saturation by the oscillating two stream instability, *Phys. Fluids*, 24: 1976-1988, 1981.
- E. Mjølhus and T. Hada, *Nonlinear Waves and Chaos in Space Plasmas*, edited by T. Hada and H. Matsumoto (Terrapub, Tokio), 121-169, 1997.
- S. Splanger, J. Sheerin and G. Payne. A numerical study of nonlinear Alfvén waves and solitons. *Phys Fluids*, 28: 104-109, 1985.
- S. Dawson and C. Fontan. Soliton decay of nonlinear Alfvén waves: Numerical studies. *Phys. Fluids*, 31(1): 83-89, 1988.
- T. Hada, C. Kennek, B. Buti and E. Mjølhus. Chaos in driven Alfvén systems. *Phys. Fluids* B2(11): 2581-2590, 1990.
- S. Ghosh and K. Papadopoulos. The onset of Alfvénic turbulence. *Phys. Fluids*, 30: 1371-1387, 1987.
- Y. Nariyuki and T. Hada. Self-generation of phase coherence in parallel Alfvén turbulence. *Earth Planets Space*, 57: 9-12, 2005.
- A. Akhiezer, I. Akhiezer, R. Polovin, A. Sitenko and K. Stepanov. *Plasma Electrodynamics*. Vol 1. Pergamon, New York, 1975.
- A. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied nonlinear dynamics: analytical, computational and experimental methods*. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- E. Shanks, *Math. Comp.* 20: 21-38, 1966.