

ANÁLISIS BIDIMENSIONAL CON GRANDES DEFORMACIONES Y CONTACTO USANDO EL MÉTODO DEL PUNTO MATERIAL LAGRANGIANO TOTAL

BIDIMENSIONAL ANALYSIS WITH LARGE DEFORMATIONS AND CONTACT USING THE TOTAL-LAGRANGIAN MATERIAL POINT METHOD

Carlos F. Estrada^a

^a*Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, Córdoba, Argentina, carlos.estrada@unc.edu.ar, <http://www.efn.unc.edu.ar/departamentos/estruct/>*

Palabras clave: Punto Material, problemas bidimensionales, grandes deformaciones, Lagrangiano total.

Resumen. En este trabajo se presenta el análisis de sólidos bidimensionales haciendo uso del Método del Punto Material (MPM) en una formulación Lagrangiana total (TLMPM). La principal ventaja de la formulación es evitar los problemas de inestabilidad numérica propio de la formulación original del MPM asociado al cruce de las partículas entre los elementos de la malla de fondo. El tipo de interpolación utilizada en la malla de fondo es bilineal. También en este trabajo se ha implementado una formulación que permite tratar problemas con contacto. Otro aspecto implementado es una cura para un eventual bloqueo volumétrico. La herramienta numérica se implementó naturalmente en un código explícito. Los resultados numéricos incluyen hiperelasticidad y plasticidad basada en la teoría de flujo J2.

Keywords: Discontinuous Galerkin, thin shells, free rotations, large strains.

Abstract. In this work, the analysis of two-dimensional solids is presented using the Material Point Method (MPM) in a total Lagrangian formulation (TLMPM). The main advantage of the formulation is to avoid the problems of numerical instability typical of the original MPM formulation associated with the crossing of the particles between the elements of the background mesh. The type of interpolation used in the background mesh is bilinear. Also in this work a formulation has been implemented that allows treating problems with contact. Another aspect implemented is a cure for an eventual volumetric locking. The numerical tool was naturally implemented in explicit code. Numerical results include hyperelasticity and plasticity based on the J2 flow theory.

1. INTRODUCCIÓN

El empleo del método del punto material (MPM de su acrónimo en inglés Material Point Method) ha sido utilizado para resolver problemas que involucran grandes deformaciones y contacto. En el MPM, el material está representado por un conjunto de puntos materiales llamados también partículas que representan al sólido, superpuestas a una malla de elementos finitos de fondo que sirve para resolver las ecuaciones de movimientos de las partículas o puntos materiales. El método en si tiene su origen en otros métodos basados en partículas (PIC de su acrónimo en inglés Particle-In-Cell) para aplicaciones en mecánica de los fluidos. Así [Sulsky et al. \(1994\)](#) trabajaron sobre diferentes modificaciones y adaptaciones pero con el objetivo de aplicar sus desarrollos a la mecánica del sólido computacional dando origen al MPM.

Dentro del MPM convencional existen diferentes aproximaciones. La mayoría de ellas están basadas en formulaciones Lagrangiana actualizada, de esta forma las interpolaciones y las derivadas se realizan en la configuración actual de la malla de fondo deformada. El hecho de utilizar una formulación actualizada y sumado a utilizar una malla de fondo de interpolación lineal (como habitualmente se utiliza en el MPM estándar), trae aparejado el movimiento de las partículas que pueden cruzar el dominio elemental donde inicialmente están ubicadas y recaer en una nueva celda o elemento. Ese proceso de cruzar el elemento, donde residen cada partícula, provoca inestabilidades numéricas, bajo orden de convergencia y fractura numérica que eventualmente pueden afectar la calidad de los resultados obtenidos. Así para mitigar estos problemas se han realizado modificaciones al MPM convencional. Una de estas opciones se conoce como el punto de material de interpolación generalizada (GIMP) desarrollado por [Bardhagen y Kober \(2004\)](#). Otra alternativa es el uso de B-spline MPM (BSMPM) presentado por [Steffen et al. \(2008\)](#). Una tercera opción es la interpolación en el dominio de partículas por convección (CPDI) desarrollado por [Sadeghirad y Brannon \(2011\)](#). Estas formulaciones disminuyen las inestabilidades propias del cruce de celda y aumentan el orden de convergencia. Pero solo CPDI suprime eficazmente la fractura numérica. Sin embargo, estos métodos aumentan la implementación del método y la complejidad computacional.

Como una nueva alternativa se ha propuesto el uso de Análisis Isogeométrico (IGA) dentro del contexto del MPM. En el trabajo de [Moutsanidis et al. \(2020b\)](#) pueden verse los detalles de la formulación propuesta. Básicamente se utiliza la idea de IGA basada en Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS), para construir una aproximación suave y precisa de orden superior para MPM. De esta forma se garantiza una representación continua del gradiente de deformación y, como resultado, se evita saltos en la tensión y otras variables cuando las partículas cruzan los límites de los elementos de la malla de fondo. Entre otras ventajas, se puede representar exactamente todas las secciones cónicas y las simetrías correspondientes en la solución numérica que eventualmente se pierden en el método MPM convencional.

Recientemente se ha presentado una formulación del MPM pero utilizando una configuración Lagrangiana total con la principal motivación de eliminar el problema de inestabilidad provocados por las partículas al cruzar las celdas y la fractura numérica. Esta nueva formulación puede verse en el trabajo de [Vaucorbeil et al. \(2020\)](#) quienes bautizaron esta nueva alternativa como TLMPM (de su acrónimo en inglés Total Lagrangian Material Point Method). En un segundo trabajo los mismos autores ([Vaucorbeil et al., 2021](#)) abordan el problema de contacto. Así resulta importante resaltar que inspirado en estas formulaciones se ha desarrollado el presente trabajo.

Un tema de importancia es que el MPM sufre de bloqueo volumétrico cuando el material se vuelve casi incompresible. Dicha rigidización del material es debido a la combinación de

una malla computacional de bajo orden de interpolación y al número de puntos materiales por elemento (generalmente cuatro por celda). Dicha cantidad de puntos por elemento son necesarios para reducir los errores de integración debido a una ubicación no óptima de los puntos de integración, problema que se asienta más en el MPM convencional. Existen diferentes trabajos que abordan este tema, entre ellos, Coombs et al. (2018), Moutsanidis et al. (2020a).

El contenido de este trabajo es el siguiente. En la Sección 2 se presentan los aspectos básicos del TLMPM. En la Sección 3 se presenta los modelos constitutivos y el cálculo de las deformaciones. En la sección 4 se describe el gradiente de deformaciones. El tratamiento del contacto entre los puntos materiales se introduce en la sección 5. Los resultados numéricos se presentan en la Sección 6. Finalmente en la Sección 7 se resumen las conclusiones del presente trabajo.

2. TLMPM

En la formulación TLMPM puede describirse en tres pasos (ver Fig. 1), a saber:

2.1. Paso 1: Mapeo desde las partículas a los nodos de la malla de fondo

En este primer paso correspondiente al tiempo t_n se calcula sobre los nodos de la malla la masa m_i , la velocidad $v_i^{t_n}$, la fuerza externa $f_i^{ext t_n}$ y la fuerza interna $f_i^{int t_n}$. Haciendo uso de las funciones de interpolación el mapeo se lleva a cabo de la siguiente forma:

$$m_I = \sum_p N_I(\mathbf{X}_p) m_p \tag{1}$$

$$\mathbf{v}_I^{t_n} = \sum_p N_I(\mathbf{X}_p) m_p v_p^{t_n} \tag{2}$$

$$\mathbf{f}_I^{ext t_n} = \sum_p N_I(\mathbf{X}_p) m_p \mathbf{b}_p^{t_n} + m_I \mathbf{b}_I^{t_n} \tag{3}$$

$$\mathbf{f}_I^{int t_n} = \sum_p -V_p^0 \mathbf{P}_p^{t_n} \nabla_0 N_I(\mathbf{X}_p) \tag{4}$$

donde N_I son las funciones de formas del nodo I evaluadas en la partícula \mathbf{X}_p . $b_p^{t_n}$ son las fuerzas másicas externas actuando en la partícula p y $b_I^{t_n}$ son fuerzas externas actuando en el nodo I . V_p^0 es el volumen inicial asociado a la partícula p y $\mathbf{P}_p^{t_n}$ es el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.

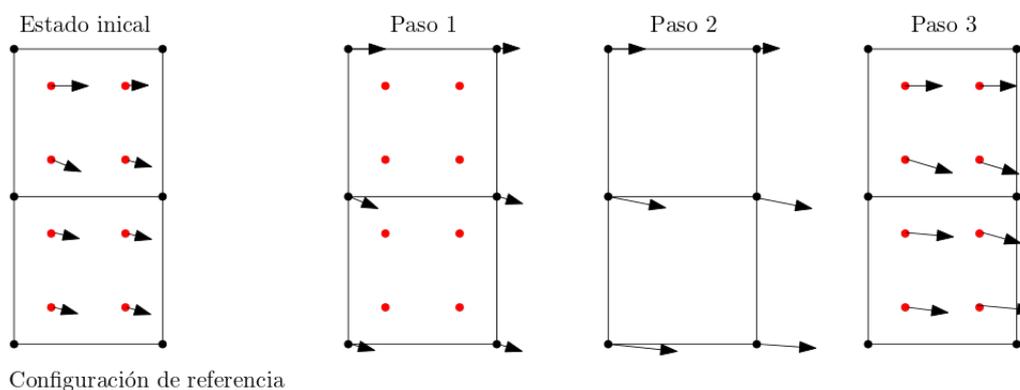


Figura 1: Esquema descriptivo del TLMPM

2.2. Paso 2: Se resuelven las ecuaciones de momentum en la malla

Transferidas las velocidades y las fuerzas a los nodos de la malla correspondiente al tiempo de cálculo t_n se procede a calcular la posición \mathbf{x}_p de la malla.

$$\bar{\mathbf{v}}_I^{t_{n+1}} = \mathbf{v}_I^{t_n} + \frac{\Delta t^{t_n}}{m_I} (\mathbf{f}_i^{ext t_n} + \mathbf{f}_i^{int t_n}) \quad (5)$$

donde Δt^{t_n} es el incremento de tiempo para el tiempo t_n . Las velocidades se adaptan teniendo en cuenta las condiciones de Dirichlet, esto es

$$\bar{\mathbf{v}}_I^{t_{n+1}} = \mathbf{0} \quad (6)$$

2.3. Paso 3: se adaptan las velocidades y posiciones de las partículas

En este paso se mapean las velocidades de la malla a las partículas. Para el tiempo t_{n+1} se obtiene

$$\bar{\mathbf{v}}_p^{t_{n+1}} = \sum_I N_I(\mathbf{X}_p) \bar{\mathbf{v}}_I^{t_{n+1}} \quad (7)$$

donde también pueden obtenerse las aceleraciones

$$\bar{\mathbf{a}}_p^{t_{n+1}} = \sum_I N_I(\mathbf{X}_p) \frac{(\bar{\mathbf{v}}_I^{t_{n+1}} - \mathbf{v}_i^{t_n})}{\Delta t^{t_n}} \quad (8)$$

luego la posición de la partícula es

$$\mathbf{x}_p^{t_{n+1}} = \mathbf{x}_p^{t_n} + \Delta t^{t_n} \bar{\mathbf{v}}_p^{t_{n+1}} \quad (9)$$

Las cantidades anteriores que están con tilde indican que son temporarias. De esta forma las velocidades definitivas se obtienen como

$$\mathbf{v}_p^{t_{n+1}} = (1 - \beta) \bar{\mathbf{v}}_p^{t_{n+1}} + \beta (\mathbf{v}_p^{t_n} + \Delta t^{t_n} \bar{\mathbf{a}}_p^{t_{n+1}}) \quad (10)$$

En este trabajo se adoptó $\beta = 1$

3. MODELO CONSTITUTIVO

Uno de los modelos constitutivos implementados es para representar materiales Neo-Hookeano expresado en términos del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. Así

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} + p J \mathbf{C}^{-1} \quad (11)$$

aceptando el caso de un material incompresible el potencial hiperelástico se expresa como

$$\Psi(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \mu (tr \mathbf{C} - 3) \quad (12)$$

donde \mathbf{C} es el tensor derecho de Cauchy-Green y μ el módulo de corte. Luego las tensiones se expresan como

$$\mathbf{S} = \mu J^{-\frac{2}{3}} \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} (tr \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \right] - p J \mathbf{C}^{-1} \quad (13)$$

Para el material elasto-plástico se utiliza la descomposición multiplicativa del gradiente de deformación \mathbf{F} , en sus partes elásticas \mathbf{F}^e y parte plástica \mathbf{F}^p

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (14)$$

donde la parte plástica está asociada a un flujo isócoro, luego $\det(\mathbf{F}^p) = 1$ y $\det(\mathbf{F}^e) = J$. Siguiendo el modelo elasto-plástico de [Crisfield \(1997\)](#) y los detalles presentado en [Castelló \(2005\)](#), a partir de la Ec. (14) se obtiene la parte elástica de prueba del gradiente de deformación

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{p-1} \quad (15)$$

Luego se determina el tensor de deformaciones logarítmicas en la configuración intermedia

$$\bar{\mathbf{E}}_{ln}^e = \ln(\mathbf{U}^e) = \ln\left[(\mathbf{F}^{eT}\mathbf{F}^e)^{1/2}\right] \quad (16)$$

para poder obtener el tensor de tensiones elástico de prueba en sus componentes volumétricas y desviadoras

$$\begin{aligned} \mathbf{o}^m &= K \text{tr}(\bar{\mathbf{E}}_{ln}^e) \mathbf{1} \\ \bar{\mathbf{o}} &= 2\mu \text{dev}(\bar{\mathbf{E}}_{ln}^e) \end{aligned} \quad (17)$$

Luego se debe verificar si la tensión elástica de prueba cumple con el criterio de fluencia en la configuración intermedia, luego

$$\bar{f} = O_e(\bar{\mathbf{o}}) - \sigma_0(e^p) \leq 0 \quad (18)$$

Si se cumple la Ec. (18) entonces $\mathbf{O} = \mathbf{o}^m + \bar{\mathbf{o}}$ en caso contrario es necesario realizar un retorno radial a la superficie de fluencia para luego actualizar las variables internas

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{p^{n+1}} &= \mathbf{e}^{p^n} + \Delta\gamma \\ \mathbf{F}^{p-1n+1} &= \mathbf{F}^{p-1n} \exp(-\Delta\gamma \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (19)$$

donde $\Delta\gamma$ es el incremento del parámetro de consistencia y \mathbf{A} el tensor de dirección de flujo plástico. Finalmente se actualiz el tensor de tensiones logarítmicas

$$\mathbf{O}^{n+1} = \mathbf{o}^m + \bar{\mathbf{o}}^{n+1} \quad (20)$$

Como las ecuaciones de equilibrio se plantean en una formulación Lagrangiana total entonces se utiliza en este trabajo el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. Obtenemos dicho tensor en la configuración intermedia

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{F}^{e-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{e-T} \quad (21)$$

donde el tensor logarítmico y el tensor de Kirchhoff se relacionan a través de $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{R}^T$. Finalmente se calcula el segundo tensor de Piola-Kirchhoff en la configuración de referencia

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{p-1} \cdot \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{F}^{p-T} \quad (22)$$

4. CÁLCULO DEL GRADIENTE DE DEFORMACIONES

Una vez calculada las velocidades sobre las partículas se procede a recalculas las velocidades sobre los nodos de la la malla de fondo correspondiente al tiempo t_{n+1} luego

$$\mathbf{v}_I^{t_{n+1}} = \frac{1}{m_I} \sum_p N_I(\mathbf{X}_p) m_p \mathbf{v}_p^{t_{n+1}} \quad (23)$$

De esta forma se puede obtener el gradiente de deformaciones

$$\mathbf{F}_p^{t_{n+1}} = \mathbf{F}_p^{t_n} + \Delta t \dot{\mathbf{F}}_p^{t_{n+1}} \quad (24)$$

con

$$\dot{\mathbf{F}}_p^{t_{n+1}} = \sum_I \mathbf{v}_I^{t_{n+1}} \otimes \nabla_0 N_i(\mathbf{X}_p) \quad (25)$$

A los fines de evitar el bloqueo volumétrico en aquellos casos donde el material se encuentre cerca de la incompresibilidad se propone modificar el gradiente de deformaciones de una manera similar a la propuesta por [Coombs et al. \(2018\)](#). Para ello la parte volumétrica y desviadora del gradiente se calculan en distintas posiciones. Así

$$\bar{\mathbf{F}}_p = (\det(\mathbf{F}_p^0))^{\frac{1}{3}} (\det(\mathbf{F}_p))^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}_p \quad (26)$$

donde \mathbf{F}_p^0 se calcula en el centro geométrico del sistema de partículas de una celda. Luego $\bar{\mathbf{F}}_p$ es el gradiente modificado que se utiliza en la formulación presentada en este trabajo.

5. FORMULACIÓN DEL CONTACTO ENTRE PARTÍCULAS

Para poder tratar problemas de contacto seguiremos la formulación desarrollada en [Vaucorbeil et al. \(2021\)](#). Así la condición de no-penetración al final del paso del tiempo $t_n + \Delta t^{t_n}$ es cero y se expresa como

$$\delta^{t_n + \Delta t^{t_n}} = r_p - r_q - \left\| \mathbf{x}_q^{t_n + \Delta t^{t_n}} - \mathbf{x}_p^{t_n + \Delta t^{t_n}} \right\| = 0 \quad (27)$$

donde r_p y r_q es el radio de la partícula p y q , respectivamente. Expresando la posición de la partícula p y q de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p^{t_n + \Delta t^{t_n}} &= \mathbf{x}_p^{t_n} + (\Delta t^{t_n})^2 \frac{\mathbf{f}_{pq}}{m_p} \\ \mathbf{x}_q^{t_n + \Delta t^{t_n}} &= \mathbf{x}_q^{t_n} + (\Delta t^{t_n})^2 \frac{\mathbf{f}_{qp}}{m_q} \end{aligned} \quad (28)$$

y reemplazando Ec. (28) en Ec. (27) y resolviendo se obtienen las fuerzas de contacto en cada partícula

$$\mathbf{f}_{pq} = -\mathbf{f}_{qp} = \frac{1}{(\Delta t^{t_n})^2} \frac{m_p + m_q}{m_p m_q} \left(1 - \frac{r_p + r_q}{\|\mathbf{x}_{pq}^{t_n}\|} \right) \mathbf{x}_{pq}^{t_n} \quad (29)$$

Para el caso que se considere fricción es necesario agregar a la Ec. (29) el siguiente término

$$\mathbf{f}_{pq}^\mu = -\mathbf{f}_{qp}^\mu = \frac{\mu}{(\Delta t^{t_n})^2} \frac{m_p + m_q}{m_p m_q} \left(1 - \frac{r_p + r_q}{\|\mathbf{x}_{pq}^{t_n}\|} \right) \|\mathbf{x}_{pq}^{t_n}\| \frac{\mathbf{v}_{pq}^{t_n \mu}}{\|\mathbf{v}_{pq}^{t_n \mu}\|} \quad (30)$$

donde μ es el coeficiente de fricción y la velocidad tangencial se expresa como

$$\mathbf{v}_{pq}^{t_n \mu} = \mathbf{v}_{pq}^{t_n} - \frac{(\mathbf{x}_{pq}^{t_n} \cdot \mathbf{v}_{pq}^{t_n}) \mathbf{x}_{pq}^{t_n}}{\|\mathbf{x}_{pq}^{t_n}\|^2} \quad (31)$$

y

$$\mathbf{v}_{pq}^{t_n} = \mathbf{v}_q^{t_n} - \mathbf{v}_p^{t_n} \quad (32)$$

6. RESULTADOS NUMÉRICOS

En los siguientes ejemplos numéricos se muestran algunas aplicaciones del TLMPM para problemas no lineales. En todo los ejemplos se utiliza como malla de fondo elementos cuadriláteros con interpolación lineal. Los ejemplos fueron obtenidos a través de un código explícito desarrollado por el autor.

6.1. Colisión de dos anillos

Este ejemplo consiste en la colisión de dos anillos formados por un material Neo-Hookeano bajo un estado plano de deformación (ver Fig. 2). Este ejemplo es habitualmente utilizado para evaluar la posible fractura numérica propio de los métodos que utilizan partículas. También será empleado en este caso en particular para mostrar la eficacia del algoritmo de contacto. Los anillos se someten a una velocidad inicial de $v_o = 30 \text{ m/s}$. El material Neo-Hookeano tiene un módulo volumétrico $K = 121,7 \text{ MPa}$ un módulo de corte $G = 26,1 \text{ MPa}$ y una densidad $\rho = 1010 \times 10^{-12} \text{ Kg/mm}^3$. La geometría de cada anillo se ha discretizado con 2204 partículas con una partícula por celda o elemento.

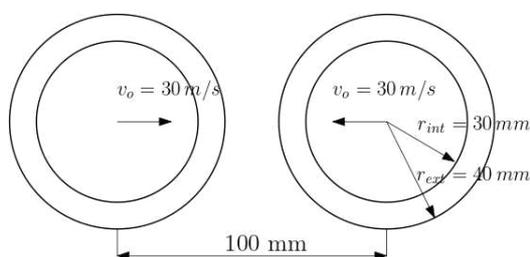


Figura 2: Impacto de dos anillos elásticos. Geometría

En la Fig. 3 se muestra, para distintos instantes de tiempo, diferentes configuraciones durante el impacto de los anillos. En la Fig. 4 se muestra la conservación de la energía total E_t , cinemática E_k y de deformación E_s .

6.2. Barra de Taylor

Este ejemplo analiza el impacto de una barra cilíndrica contra una pared rígida que provoca sobre el material grandes deformaciones elasto-plásticas y cambios importantes en su geometría final. La simulación consiste en una barra sometida a una velocidad inicial $v_o = 227 \text{ m/s}$. El radio original es $r = 3,2 \text{ mm}$ y su longitud inicial $l = 32,4 \text{ mm}$. La barra está fabricada de cobre con un módulo de Young $E = 117 \text{ GPa}$, un módulo de Poisson $\nu = 0,35$ y una densidad $\rho = 8970 \text{ Kg/m}^3$. El comportamiento del material es un von Mises con endurecimiento isótropo lineal, con una tensión de fluencia $\sigma_y = 400 \text{ MPa}$ y un módulo de endurecimiento $A' = 100 \text{ MPa}$. La geometría se ha discretizado con 2592 partículas con cuatro partículas por celda. Se ha utilizado celdas de $0,4 \text{ mm} \times 0,4 \text{ mm}$.

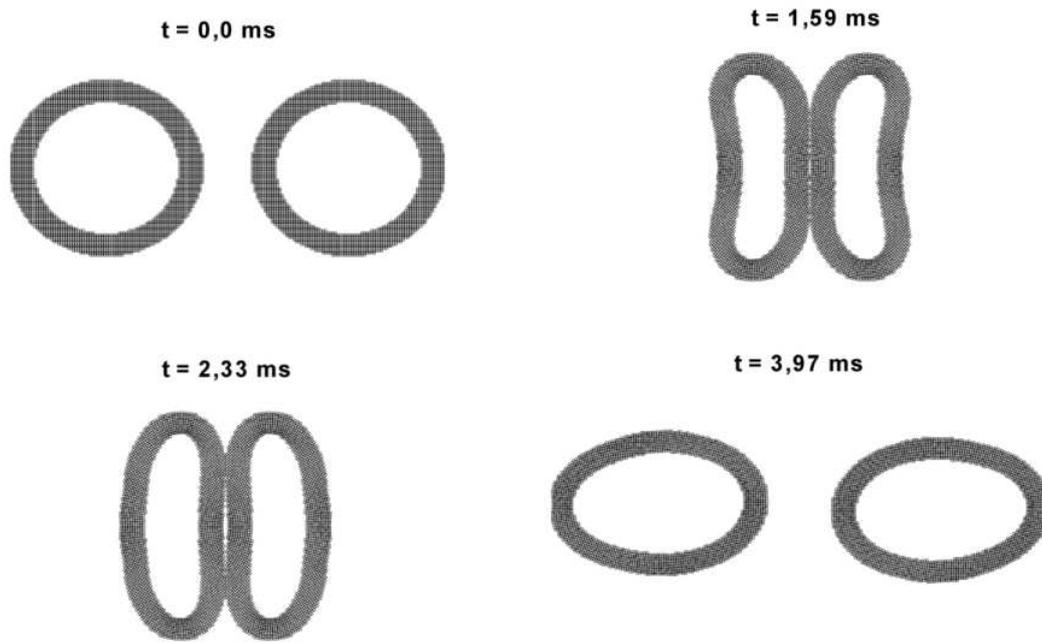


Figura 3: Impacto de dos anillos elásticos para distintos tiempo de deformación.

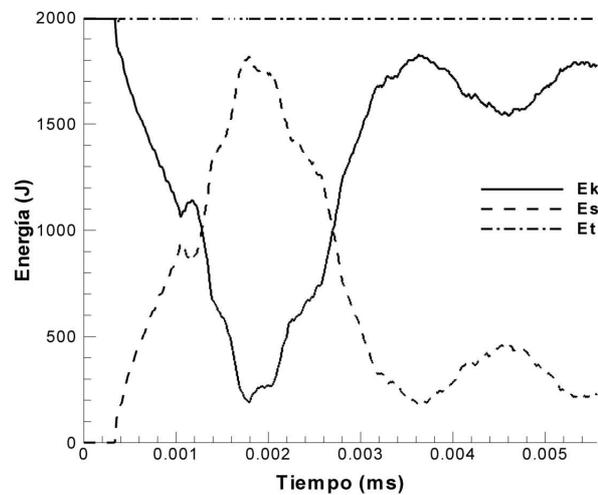


Figura 4: Evolución de la energía cinética E_k , de deformación E_s y total E_t .

Puede verse en la Fig. 5 a, la geometría inicial axil simétrica y la configuración deformada final. En la Fig. 5 b se muestra las deformaciones plásticas efectivas. Para la densidad de puntos mostrados se alcanza una deformación plástica efectiva máxima de 3,09 y un radio final de 6,61 mm. En la Tabla 1 se muestra como los resultados mejoran notoriamente cuando se utiliza la modificación del gradiente de deformaciones \bar{F} reduciendo los efectos del bloqueo volumétrico.

6.3. Acortamiento de un tocho cilíndrico

Este caso consiste en la compresión de un tocho cilíndrico entre dos placas rígidas hasta reducir su longitud en un 40 % de la longitud inicial. El cilindro tiene una longitud de 30 mm

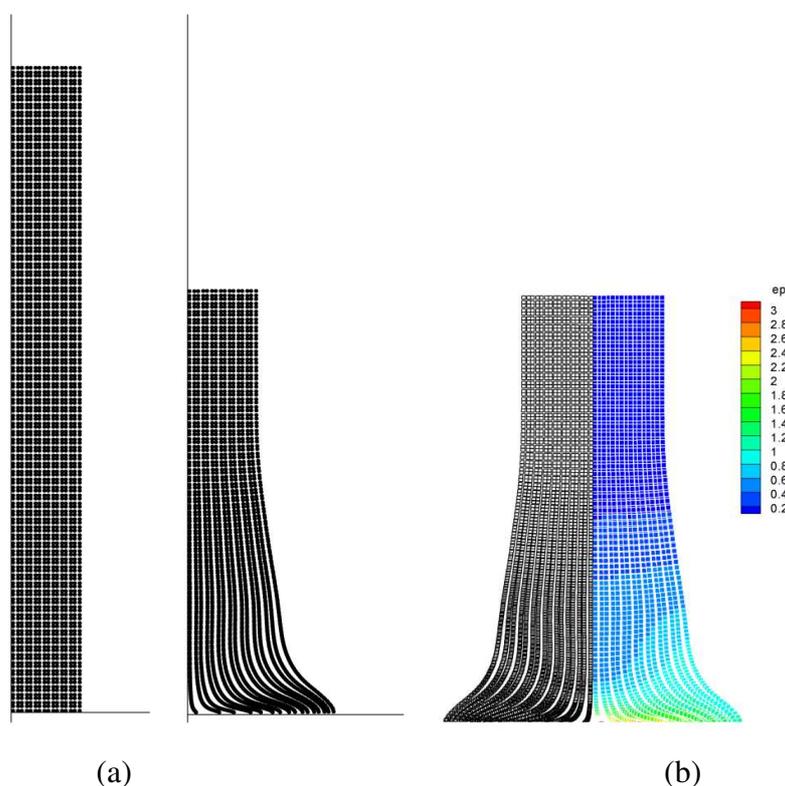


Figura 5: Impacto de una barra cilíndrica a) Barra original y deformada b) Distribución de deformaciones plásticas efectivas.

	2592 part.	5184 part.	10368 part.
C^o	5,84	6,13	6,27
C^o, \bar{F}_p	6,61	6,80	6,90

Tabla 1: Radios de la barra deformada (en mm) para diferentes mallas con y sin cura por bloqueo volumétrico.

y un radio inicial de 10 mm . Las placas rígidas se consideran perfectamente rugosas tomando un coeficiente de fricción $\mu = 1,0$. Se utiliza un modelo axilsimétrico y se modela un cuarto de la geometría. el material se considera constituido por un módulo de Young $E = 200 \times 10^3\text{ GPa}$, un coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ y una densidad $\rho = 7833 \times 10^{-12}\text{ Kg/m}^3$. Se asume endurecimiento isotrópico, con una tensión d fluencia $\sigma_y = 700\text{ MPa}$ y un módulo de endurecimiento $A' = 0,3\text{ GPa}$. En este caso se ha utilizado para discretizar el tocho 2400 partículas con cuatro por celdas. Las celdas son de $0,5\text{ mm} \times 0,5\text{ mm}$.

En la Fig. 6 se muestra la geometría axilsimétrica inicial y la deformada. En la Fig 7 a se muestra el campo de deformaciones plásticas efectivas. El valor máximo de deformación plastica efectiva es de 1,69 y el radio final del tocho deformado es de $16,6\text{ mm}$. En la Fig. 7 b se muestra la carga de compresión del cabezal rígido versus su desplazamiento. Se alcanza un valor máximo de carga de 871 KN .

6.4. Impacto de un disco sobre un blanco de aluminio

Este ejemplo se simula el impacto a altas velocidades de un disco de acero sobre un blanco de aluminio con el fin de mostrar un problema que involucra contacto no elástico y grandes deformaciones. Los datos se basan en el ejemplo numérico presentado en Sulsky et al. (1995).

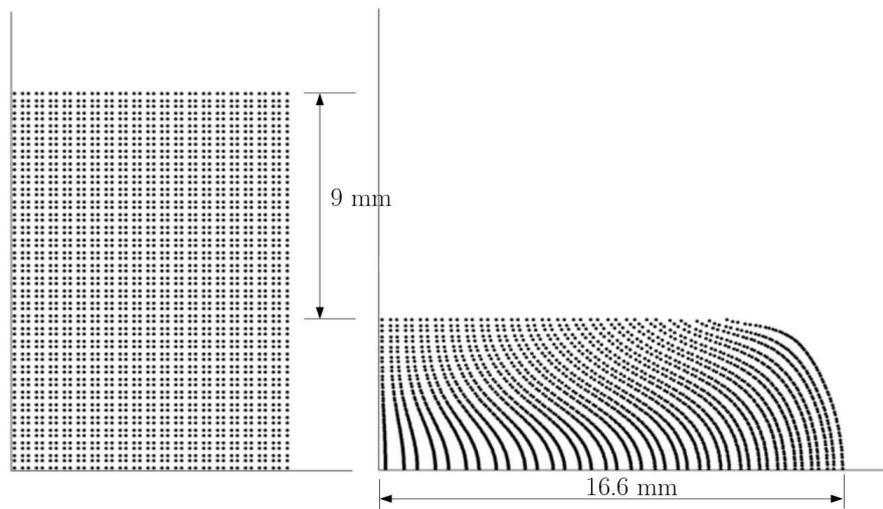


Figura 6: Acortamiento de un tocho cilíndrico. Geometría original y deformada

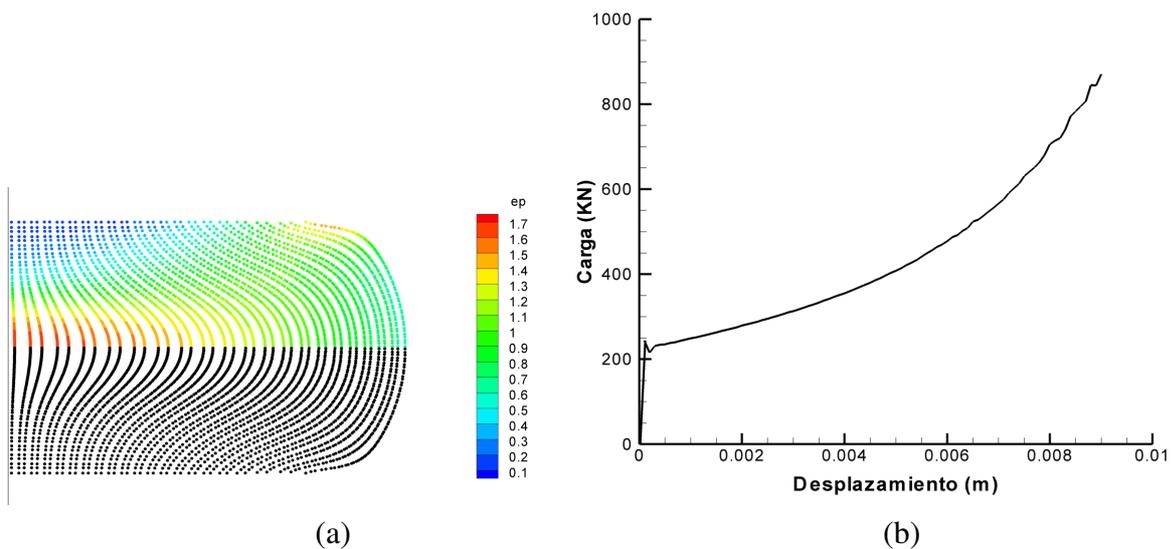


Figura 7: Acortamiento de un tocho cilíndrico. a) Geometría final deformada y distribución de deformaciones plásticas efectivas. b) Carga vs. desplazamientos.

Así bajo un estado plano de deformaciones (ver [Vaucorbeil et al. \(2021\)](#)) se considera el disco formado por un material elástico lineal y el blanco se considera de aluminio con un material del tipo von Mises plástico con endurecimiento lineal (ver Fig. 8). La simulación se corre en $60 \mu s$ para lograr una convergencia aceptable. En la Fig. 9 a se muestra la geometría final y el cráter provocado por el proyectil. Se utilizaron para el blanco 15000 partículas con cuatro por celdas. La malla es de $0,8 \text{ mm} \times 0,8 \text{ mm}$. En la Fig. 9 b se muestra la curva de la profundidad del cráter versus el tiempo. Se aprecia que la profundidad ronda en los $13,9 \text{ mm}$ aproximadamente

7. CONCLUSIONES

Se ha llevado a cabo un análisis bidimensional sobre sólidos utilizando una formulación basada en el MPM en configuración Lagrangiana total. Se analizaron diferentes problemas donde se incluyó problemas de contacto y grandes deformaciones. Se han utilizado diferentes materia-

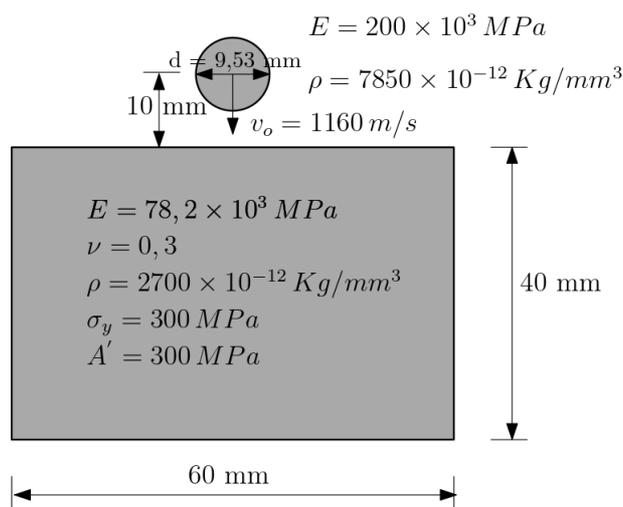


Figura 8: Impacto de un disco de acero sobre un blanco de aluminio. Geometría

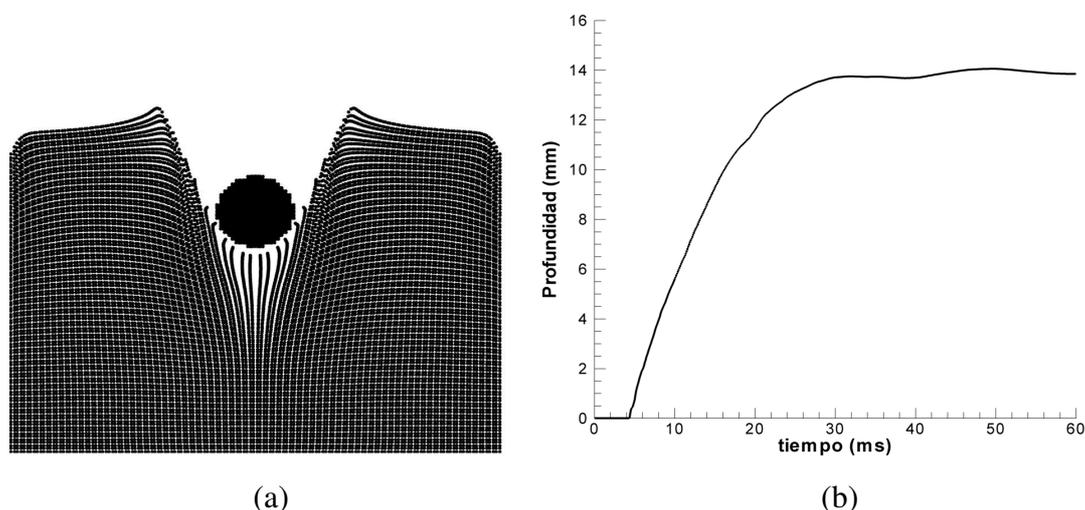


Figura 9: Impacto de un disco a) Geometría final deformada b) convergencia de la profundidad del impacto.

les como hiperelásticos y materiales con plasticidad de von Mises para grandes deformaciones. Por lo general la grilla de elementos cuadriláteros y la discretización de la geometría a través de partículas es sencilla. No se requiere de un tratamiento especial de las mallas o un proceso de remallados cuando se involucran geometrías finales con excesivas deformaciones. Para poder obtener resultados numéricos aceptables se requieren de cantidades grandes de partículas (en general se utilizan cuatro por elemento o celda). Los problemas de contacto entre dos o más cuerpos necesitan de un tratamiento especial y es un campo de interés para futuros desarrollos.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo financiero de la Universidad Nacional de Córdoba (a través de SeCyT).

REFERENCIAS

Bardenhagen S. y Kober E. The generalized interpolation material point method. *Computer Modeling in Engineering Sciences*, 5, 2004.

- Castelló W. *Análisis bidimensional de sólidos con grandes deformaciones usando un elemento triangular con deformaciones impuestas*. Tesis de Maestría. Córdoba-UNC, 2005.
- Coombs W., Charlton T., Cortis M., y Augarde C. Overcoming volumetric locking in material point methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 333:1–21, 2018.
- Crisfield M. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Advanced Topics, volume II*. Jhon Wiley Sons, Ltd., 1997.
- Moutsanidis G., Koester J., Tupek M., y Chen J. Treatment of near-incompressibility in mesh-free and immersed-particle methods. 7:309–327, 2020a.
- Moutsanidis G., Long C., y Bazilevs Y. Iga-mpm: The isogeometric material point method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 372:113346, 2020b.
- Sadeghirad A. y Brannon R. A convected particle domain interpolation technique to extend applicability of the material point method for problems involving massive deformations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86:1435–1456, 2011.
- Steffen M., Kirby R., y Berzins M. Analysis and reduction of quadrature errors in the material point method (mpm). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76:922–948, 2008.
- Sulsky D., Chenb Z., y Schreyer H. A particle method for history-dependent materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 118:179–196, 1994.
- Sulsky D., Zhou S.J., y Schreyer H. Application of a particle-in-cell method to solid mechanics. *Computer Physics Communications*, 87:236–252, 1995.
- Vaucorbeil A., Nguyen P.V., y Hutchinson C.R. A total-lagrangian material point method for solid mechanics problems involving large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 360:112783, 2020.
- Vaucorbeil A., Nguyen P.V., y Hutchinson C.R. Modelling contacts with a total lagrangian material point method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 373:113503, 2021.