

EVALUACIÓN DE UN ELEMENTO DE LÁMINA TRIANGULAR CUADRÁTICO USANDO POLINOMIOS DE BEZIER.

ASSESSMENT OF QUADRATIC BEZIER TRIANGULAR SHELL FINITE ELEMENT

Fernando G. Flores^a

^a*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) UNC-CONICET, y Departamento de Estructuras, FCEFYN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Velez Sarsfield 1611, 5016 Córdoba, Argentina. fernando.flores@unc.edu.ar; <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu>*

Palabras clave: Elementos Finitos, Lámina triangular, Polinomios de Bezier,

Resumen:

En este trabajo se desarrolla y evalúa un elemento triangular cuadrático de lámina de Reissner utilizando polinomios de Bezier. La formulación incluye a) una novedosa aproximación de deformaciones impuestas para las componentes membranales, b) una aproximación clásica de deformaciones transversales de corte mixtas impuestas. El objetivo principal es mejorar el comportamiento membranal del triángulo en el plano tangente, y que el elemento pueda ser utilizado para la simulación de láminas delgadas libre de bloqueos debido a membrana y corte transversal. La utilización de polinomios de Bezier tiene por objetivo el uso de una matriz de masa de mayor consistencia y ver si mejora el comportamiento dinámico, tanto en el caso de integradores implícitos como explícitos. En particular si permite un incremento de tiempo crítico mayor en el segundo caso. Se presentan varios ejemplos en régimen no-lineal geométrico que muestran el comportamiento libre de bloqueo. Se presenta también un ejemplo en régimen elasto-plástico.

Keywords: Keywords: Finite Elements, Triangular Shell, Bezier polynomials.

Abstract: In this paper a shear deformable quadratic triangular shell element using Bezier polynomials is developed and assessed. The formulation includes: (a) a novel assumed natural strain approach for the membrane approximation (b) a classical mixed assumed strain for the transverse shear. The main targets are to improve the overall membrane behaviour of the triangle, and that the element can be used for the simulation of thin shells, free of numerical lockings due to membrane and transverse shear. The use of Bezier polynomials allows to consider mass matrices with a better consistency and to see if it effectively improves dynamic behavior, both in the case of implicit and explicit integrators. In particular if it leads to a larger critical incremental time for the latter case. Several examples are presented in a non-linear geometric regime that show the locking-free behavior. An example is also presented in elasto-plastic regime.

1. INTRODUCCIÓN

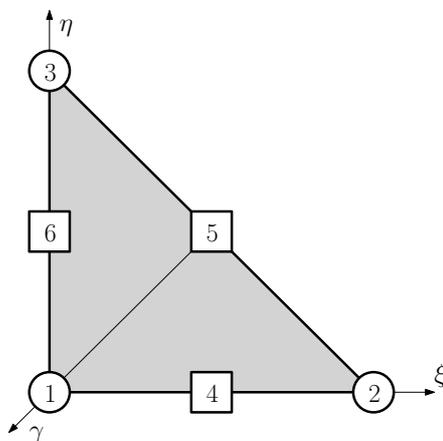
Para el modelado de láminas se usan habitualmente elementos triangulares o cuadriláteros. La ventaja de los elementos triangulares es que las mallas presentan elementos con mejor relación de aspecto para geometrías arbitrarias. La ventaja de los elementos cuadriláteros es que en general muestran una mayor isotropía y un mejor comportamiento para los elementos más sencillos (4 nudos contra 3 nudos). Por otro lado el uso de elementos lagrangeanos de mayor orden, que permiten modelar superficies curvas y no facetadas, si bien muestran una mejor convergencia en problemas elásticos, presentan algunas desventajas, i.e.: a) el comportamiento es más sensible a la posición de los nudos intermedios b) no siempre se comportan bien en modelos elastoplásticos con grandes deformaciones c) en problemas dinámicos la matriz de masa diagonalizada, usada en integración explícita y generalmente también en integradores implícitos, conduce a valores nulos en los vértices o negativos al usar la técnica de diagonalización de “suma de la fila”. La razón principal de esto último es que las funciones de forma asociadas con nudos vértices son negativas en parte del elemento. Una de las características de las funciones B-Spline es que además de ser una partición de la unidad son no negativas. Kadapa (2019) utilizó polinomios de Bezier sobre elemento cuadráticos (triángulo y tetraedros) en problemas de elasticidad. Esa idea es aquí aplicada sobre elementos triangulares cuadráticos de láminas flexibles al corte. Existen en la literatura distintos elementos triangulares cuadráticos para el análisis de láminas (Flores et al. (1995); Kim y Bathe (2009), etc) que utilizan técnicas de deformaciones naturales impuestas (ANS por su acrónimo en inglés) para aliviar el bloqueo por corte transversal y el bloqueo membranal.

En la siguiente sección se describen los aspectos básicos de la formulación asociados con las funciones de interpolación de desplazamientos, deformaciones y puntos de muestreo de las mismas. En la sección 3 se evalúa el elemento a partir de 4 ejemplos. Finalmente se presentan algunas conclusiones.

2. FORMULACIÓN DEL ELEMENTO

2.1. Configuración

En cada elemento, con la numeración indicada en la Figura 1, las funciones de forma N^I locales son como se indica



$$\begin{aligned}
 N^1(\xi, \eta) &= \gamma^2 = (1 - \xi - \eta)^2 \\
 N^2(\xi, \eta) &= \xi^2 \\
 N^3(\xi, \eta) &= \eta^2 \\
 N^4(\xi, \eta) &= 2\xi\gamma = 2\xi(1 - \xi - \eta) \\
 N^5(\xi, \eta) &= 2\xi\eta \\
 N^6(\xi, \eta) &= 2\eta\gamma = 2\eta(1 - \xi - \eta)
 \end{aligned}$$

Figura 1: Elemento maestro y funciones de interpolación

Donde ξ , η y γ son las coordenadas de área indicadas en la figura.

La configuración queda definida por la posición de la superficie media y por el campo director

$$\varphi = \sum_{I=1}^6 N^I(\xi, \eta) \varphi^I \quad (1)$$

$$\tilde{t}_3 = \sum_{I=1}^6 N^I(\xi, \eta) t^I \quad t_3 = \frac{\tilde{t}_3}{\|\tilde{t}_3\|} \quad (2)$$

La posición de un punto arbitrario es

$$X(\xi) = \varphi(\xi, \eta) + \lambda \zeta t_3 \quad (3)$$

donde λ es el estiramiento en la dirección transversal, constante en el espesor obtenido a partir de una simple condición de volumen invariante y ζ es la distancia del punto a la superficie media. Esta condición sólo tiene influencia en grandes deformaciones elastoplásticas, ya que para la relación constitutiva elástica se adopta la hipótesis de tensión plana.

El campo director en la geometría original t_3^0 se completa con dos direcciones normales al mismo (t_1^0, t_2^0),

$$\Lambda^0 = [t_1^0 \quad t_2^0 \quad t_3^0] \quad (4)$$

que conforman una terna ortogonal. Por otro lado sobre la superficie media se define un sistema local con las siguientes características: Las direcciones g_1^0 y g_2^0 son ortogonales entre si y se encuentran sobre la superficie tangente a φ^0 . Como el campo director t_3^0 no es necesariamente normal al plano tangente, entonces las direcciones t_1^0 y t_2^0 no coinciden con g_1^0 y g_2^0 . Y aún en el caso de que coincidieran la definición puede ser diferente. La relevancia de la terna Λ es que en dicho sistema se definen los giros incrementales y las variaciones del campo director. Como éste es un vector de norma unitaria (pertenecer al grupo $SO(3)$) la variación del mismo se encuentra en el plano normal al mismo y puede escribirse

$$\delta t_3 = \delta t_{31} t_1 + \delta t_{32} t_2 = [t_1 \quad t_2] \begin{bmatrix} \delta t_{31} \\ \delta t_{32} \end{bmatrix} = \bar{\Lambda} \begin{bmatrix} \delta t_{31} \\ \delta t_{32} \end{bmatrix} \quad (5)$$

o puede ser escrito en función de las rotaciones alrededor de cada eje local

$$\begin{aligned} \delta t_3 &= \delta \theta \times t_3 = \delta \theta \times t_3 \\ &= (\delta T_1 t_1 + \delta T_2 t_2) \times t_3 = -t_2 \delta T_1 + t_1 \delta T_2 \end{aligned} \quad (6)$$

En (1-2) los φ^I y t_3^I son los puntos de control de la superficie media y del campo director. Los 3 primeros puntos de control coinciden con los vértices, en tanto que los otros coinciden con la mitad de los lados sólo en el caso de lados rectos y puntos a las mitad de los mismos. En el caso de lados curvos, con las coordenadas paramétricas correspondientes a la mitad de cada lado, e indicando con $\bar{\varphi}$ las coordenadas del centro del lado (similarmente para el director), la posición del punto de control resulta

$$\varphi^I = 2 \left[\bar{\varphi}^I - \frac{1}{4} (\varphi^J + \varphi^K) \right] \quad I = 4, 6 \quad (7)$$

donde J y K son los nudos extremos del lado, e inversamente

$$\bar{\varphi}^I = \frac{1}{4} (2\varphi^I + \varphi^J + \varphi^K) \quad I = 4, 6 \quad (8)$$

La expresión 7 permite imponer condiciones de contorno esenciales en los puntos de control de mitad de lado a partir de desplazamientos conocidos en los nudos de la malla

$$\mathbf{u}^I = 2 \left[\bar{\mathbf{u}}^I - \frac{1}{4} (\mathbf{u}^J + \mathbf{u}^K) \right] \quad (9)$$

en tanto que la expresión 8 permite conocer las coordenadas del punto medio del lado a partir de los puntos de control en la geometría deformada. Esto es necesario por ejemplo para establecer condiciones de contacto en el contorno.

2.2. Medidas de deformación

Las medidas de deformación se obtienen evaluando el tensor métrico (Tensor derecho de Cauchy-Green) a partir del gradiente de la deformación

$$\mathbf{F} = [\varphi_{,1} \quad \varphi_{,2} \quad \lambda \mathbf{t}_3] + \zeta \lambda [\mathbf{t}_{3'1} \quad \mathbf{t}_{3'2} \quad \mathbf{0}] \quad (10)$$

despreciando términos asociado a ζ^2 se distingue

- El tensor métrico sobre la superficie media (primera forma fundamental)

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ 2a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{,1} \cdot \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \cdot \varphi_{,2} \\ 2\varphi_{,1} \cdot \varphi_{,2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

- Los ángulos de corte transversal

$$\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \varphi_{,1} \cdot \mathbf{t}_3 \\ \varphi_{,2} \cdot \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

- El tensor de curvaturas (segunda forma fundamental)

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ 2b_{12} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \varphi_{,1} \cdot \mathbf{t}_{3'1} \\ \varphi_{,2} \cdot \mathbf{t}_{3'2} \\ \varphi_{,1} \cdot \mathbf{t}_{3'2} + \varphi_{,2} \cdot \mathbf{t}_{3'1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Estas medidas de deformación valuadas en la geometría original y la deformada permiten definir una primera aproximación al tensor de deformaciones de Green-Lagrange. Para aliviar el bloqueo numérico las dos primeras (11 y 12) se aproximan usando la técnica ANS, en tanto que para las curvaturas se utiliza la forma estándar en desplazamiento.

2.3. Comportamiento membranal

El comportamiento membranal (subíndice m) se formula evaluando la primera forma fundamental sobre la superficie media. Para evitar el bloqueo membranal es necesaria una aproximación ANS. Teniendo en cuenta que en el plano son 12 grados de libertad, menos 3 posibles movimientos de cuerpo rígido conduce a 9 valores de deformación, es decir 3 valores por cada componente de deformación. Esto permite una variación lineal para cada componente en cada dirección paramétrica (el autor no ha encontrado en la literatura otras aproximaciones)

$$\bar{\mathbf{a}}_m = \begin{bmatrix} \bar{a}_{\xi\xi} \\ \bar{a}_{\eta\eta} \\ \bar{a}_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & & & & & & \\ & & & 1 & \xi & \eta & & & \\ & & & & & & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_m(\xi, \eta) \boldsymbol{\beta}_m \quad (14)$$

La opción propuesta es: en el espacio paramétrico dividir el triángulo en cuatro subtriángulos uniendo los puntos medios de los lados, y a la mitad de cada lado de cada subtriángulo evaluar la deformación longitudinal tangente al mismo (ver Figura 2.a). Luego hay 3 deformaciones para cada uno de los 4 subtriángulos y 3 son comunes en los lados internos, lo que conduce a un total de 9 deformaciones.

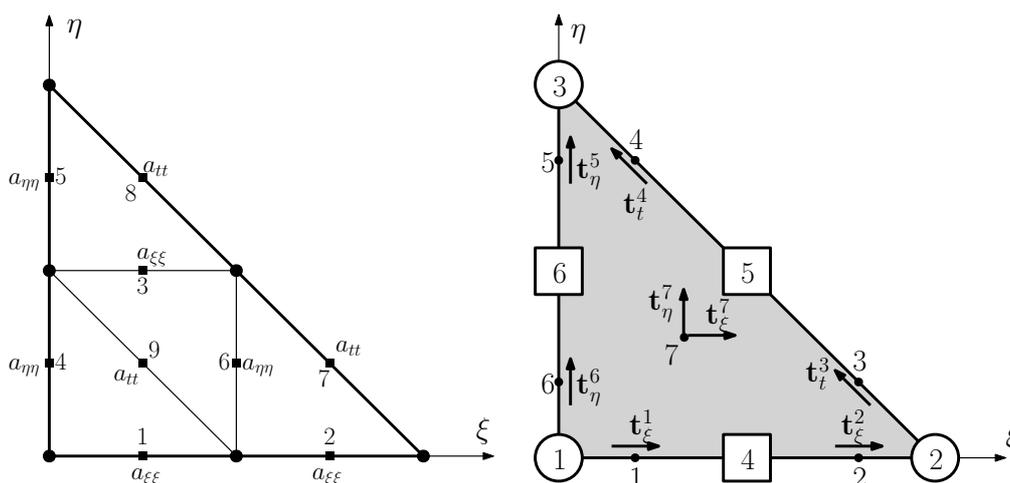


Figura 2: Puntos para la evaluación de las deformaciones (a) membranales (b) de corte

2.4. Formulación del corte transversal

Para aliviar el bloqueo debido al corte transversal, siguiendo a la mayoría de la literatura, se utiliza una interpolación en coordenadas naturales de componentes mixtas del tensor. En la referencia Oñate et al. (1992) se propone una metodología general para elementos de lámina de Reissner-Mindlin que particularizada para el triángulo de seis nudos conduce a una variación lineal de la deformación de corte transversal a lo largo de cada lado. Estas componentes se escriben en términos de las deformaciones de corte transversales tangentes a cada lado (dos por lado), ver Figure 2.b. En el presente trabajo se adopta una extensión de dicha aproximación (Lee y Bathe (2004)) que incluye adicionalmente la evaluación de ambas componentes en el centro del elemento con lo cual la aproximación se escribe

$$\bar{\mathbf{a}}_s = \begin{bmatrix} \bar{a}_{\xi 3} \\ \bar{a}_{\eta 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & -\eta^2 \\ -\xi^2 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_s(\xi, \eta) \boldsymbol{\beta}_s \quad (15)$$

2.5. Modelos constitutivos

El elemento puede utilizarse con modelos elásticos isótropos u ortótropos. En este último caso puede además incluirse la teoría refinada de ZigZag (Flores (2014)) para láminas tipo “sandwich”. En el caso isótropo puede considerarse un comportamiento elastoplástico, el que se puede abordar usando una aproximación en esfuerzos integrados en el espesor (Simo y Kennedy (1992)) o dividiendo en capas e integrando la ecuación constitutiva en cada una de ellas.

3. EJEMPLOS

El elemento, denominado TSh en lo sucesivo, pasa correctamente la prueba de la parcela, tanto membranal como flexional. No presenta bloqueo por corte ni bloqueo membranal.

3.1. Semi-esfera incompleta con cargas puntuales entrantes y salientes

Este es un ejemplo muy utilizado para evaluar el bloqueo membranal. En la Figura 3.a se muestra la geometría discretizada (un cuarto del total debido a las simetrías) $R = 10$, $h = 0,04$, ángulo superior 18° , $E = 6,825 \times 10^5$ y $\nu = 0,3$. La Figura 3.b muestra el promedio de los desplazamientos de los puntos cargados normalizado respecto al valor 0.094 en función del número de elementos por lado. Allí se observan las buenas propiedades de convergencia y la comparación de la aproximación en deformaciones impuestas (ANS) para la membrana con una aproximación estándar en desplazamientos (Despl.), lo que permite ver la cura del bloqueo membranal. La Figura 3.c muestra los desplazamientos de los puntos cargados en el rango no lineal para dos mallas distintas y se compara con los resultados provistos por Sze et al. (2004) y por Simo et al. (1990). La malla 16×16 muestra una excelente concordancia con los resultados provistos por Simo y es ligeramente más rígida que los provistos por Sze. La malla más gruesa (8×8) si bien es ligeramente rígida muestra las características principales del modelo

3.2. Viga torsionada

En la Figura 4 se ve la geometría de una cinta torsionada 90° con ancho $b = 1,1$, Longitud $L = 12$, módulo de Young $E = 2,9 \times 10^7$ y relación de Poisson $\nu = 0,3$. Este ejemplo permite observar el comportamiento del elemento cuando su geometría es alabeada. En la Tabla 1 se indican los valores normalizados del desplazamiento del centro del borde cargado, con dos espesores h distintos y su comparación con elementos de sólido-lámina hexaédricos (Mostafa et al. (2013); Schwarze y Reese (2009); Cardoso et al. (2008); Alves de Sousa et al. (2005) y un elemento de lámina cuadrilátero Simo et al. (1989). Notar que 2 divisiones por lado implican un elemento TSh. Los resultados en régimen lineal son excelentes tanto para el caso delgado como para el caso grueso. En la Figura 4.b se ve la geometría deformada final para el caso delgado en comportamiento no lineal, en tanto que la Figura 4.c compara las 3 componentes de

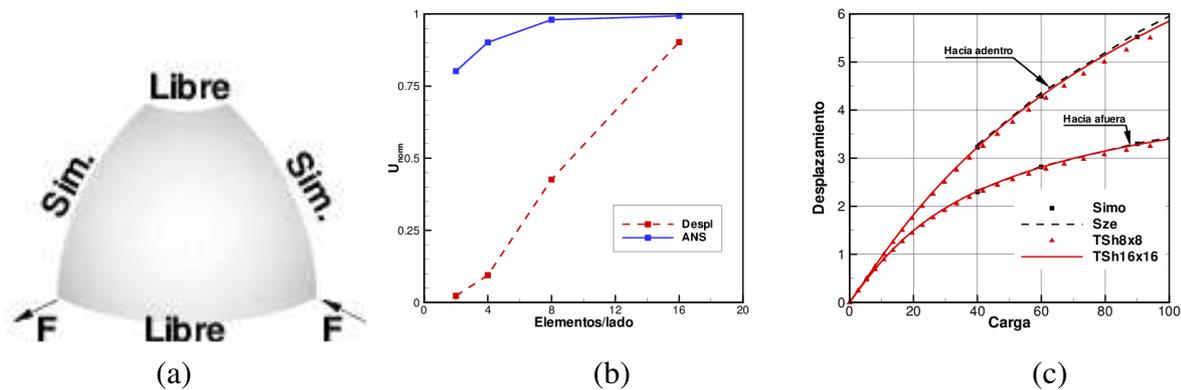


Figura 3: Semiesfera incompleta con cargas puntuales. (a) geometría y carga; (b) convergencia en el caso lineal; (c) desplazamientos no-lineales

desplazamiento del centro del borde libre con resultados de referencia usando **ABAQUS** (2006). Puede verse que para la malla más fina los resultados muestran una excelente concordancia en tanto que la malla más gruesa es apenas un poco flexible.

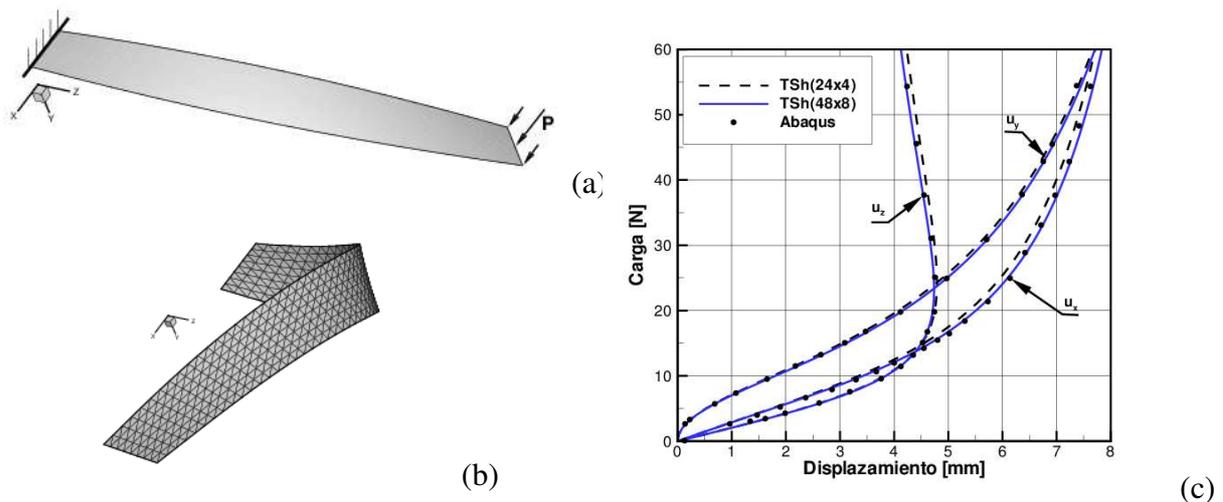


Figura 4: Viga torsionada con carga normal. (a) geometría y carga; (b) deformada final no-lineal (c) componentes cartesianas de desplazamiento del centro del borde cargado

3.3. Panel cilíndrico con carga puntual

En la Figura 5.b se muestra la geometría de un panel cilíndrico ($R = 2540mm$, $L = 508mm$, $\theta = 0.1rad$) donde se consideran dos espesores posibles, grueso $t = 12,7mm$ y delgado $t = 6,35mm$. Las propiedades del material son: $E = 3,10275 \times 10^9$ y $\nu = 0,3$. La malla utilizada incluye 4 elementos (8 divisiones) por lado y se compara con un elemento triangular de lámina clásica (Flores y Oñate (2007)), con un elemento de sólido-lámina (Flores (2016)) y con los provistos por Sze et al. (2004). Los resultados son excelentes para ambos espesores y la convergencia es muy buena. En el caso delgado, el punto A es el central y el punto B está sobre el borde libre en la línea de simetría.

Divisiones	$h = 0,05$ (ref: 0,343)				$h = 0,32$ (ref: $1,754 \times 10^{-3}$)			
por lado	MSF13	Sch09	Simo89	TSh	MSF13	Car08	Alv05	Tsh
6×1	0,953	0,942	0,951	—	0,946	—	—	—
12×2	0,988	0,983	0,986	0,9957	0,987	1,022	0,935	0,9947
24×4	0,995	0,955	0,997	0,9983	0,995	1,006	0,979	1,0006
48×8	1,000	0,999	1,000	1,0008	0,999	1,002	0,992	1,0015

Tabla 1: Cinta torsionada. Valores normalizados del desplazamiento u_x del centro del borde cargado

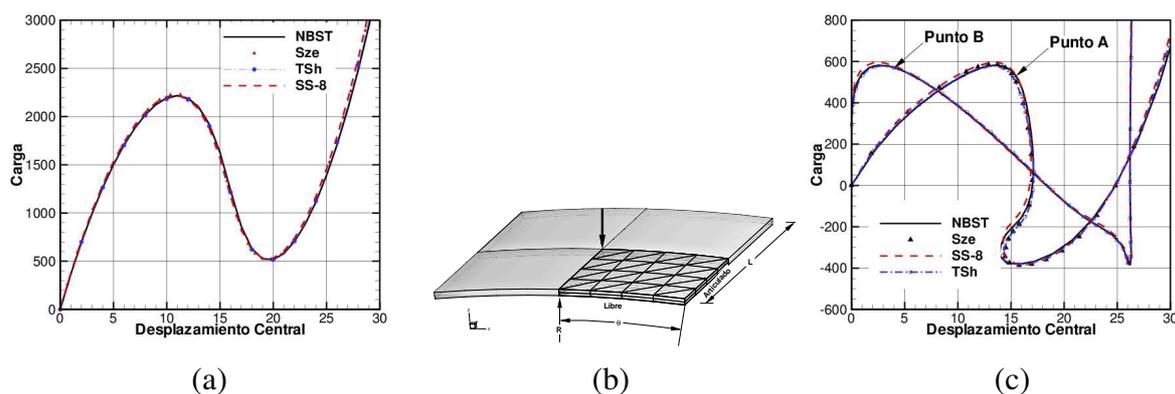


Figura 5: Panel articulado-libre bajo carga puntual. (a) caso grueso; (b) geometría y malla; (c) caso delgado

3.4. Casquete esférico con carga impulsiva

Este ejemplo es muy usado para evaluar elementos de lámina en régimen dinámico elasto-plástico. En la Figura 6.b se muestra la geometría y las propiedades del material. La carga es una presión normal externa que se aplica en forma impulsiva y se estudia el primer mili segundo. Se ha considerado un cuarto de la geometría la que se ha discretizado con una malla relativamente fina que incluye 722 elementos. En la Figura 6.a se muestra el desplazamiento del ápice (superficie media) en la dirección vertical para el caso del material supuesto elástico, en tanto que la Figura 6.c muestra el desplazamiento del mismo punto pero para el caso de que el material sea elastoplástico (plasticidad J2). Como solución de comparación se utiliza una obtenida con elementos de sólido axilsimétrico (Sax) de 4 nudos con 4 puntos de integración para las tensiones de corte y un promediado de la deformación volumétrica (Q1P0 en la jerga del MEF), con una malla de 4 elementos en el espesor (8 puntos de integración en dicha dirección) y 100 elementos en el meridiano. En el caso elástico se muestran soluciones utilizando matriz de masa diagonalizada e integradores implícito y explícito. Puede observarse que las diferencias entre ambos integradores son mínimas y que concuerdan muy bien con la solución de referencia. En el caso elastoplástico se ha considerado sólo el integrador explícito y se ha comparado además con el elemento NBST (Flores y Oñate (2007)). Los resultados obtenidos con el presente elemento tienen una muy buena correlación con la solución de referencia.

El otro aspecto que interesa estudiar es el valor del tiempo crítico ya que el tiempo de simulación es inversamente proporcional al mismo. En este ejemplo se ha obtenido que el tiempo crítico es superior en casi un 65 % al correspondiente a usar una aproximación con polinomios lagrangeanos, lo que implica una reducción del tiempo de simulación total que ronda el 30 %.

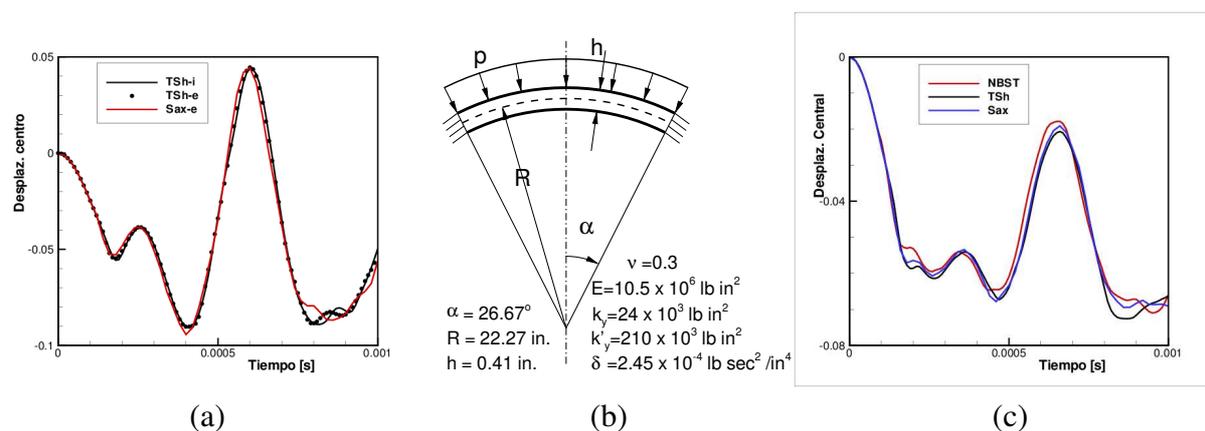


Figura 6: Cierre esférico bajo carga impulsiva

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha modificado un elemento triangular cuadrático de lámina de Reissner. Se han utilizado polinomios cuadráticos de Bezier en lugar de los habituales polinomios de Lagrange, se han considerado nuevos puntos de muestreo para la aproximación en deformaciones impuestas de las componentes membranales y se ha adoptado una versión cuadrática incompleta para las deformaciones impuestas de corte transversal. El elemento obtenido pasa la prueba de la parcela y no presenta bloqueos numéricos debido a membrana ni corte transversal y presenta las siguientes características:

- Es un elemento robusto
- Tiene buenas propiedades de convergencia
- La matriz de masa tiene mayor consistencia y permite incrementos de tiempo mas de un 60 % superiores a la versión anterior

Finalmente, debe mencionarse que uno de los objetivos era ver si el elemento resultaba adecuado para embutición de láminas con grandes deformaciones elastoplásticas. Si bien el elemento puede utilizarse en modelos con grandes deformaciones, al igual que la versión original (Flores et al. (1995)) su comportamiento no es en general óptimo para problemas con contacto y no resulta robusto para ese tipo de problemas.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo financiero de CONICET y de la SeCyT-UNC.

REFERENCIAS

- ABAQUS. *User's Manual, version 6.6.2*. Dassault Systemes Simulia Corp, 2006.
- Alves de Sousa R., Cardoso R., Fontes Valente R., Yoon Y., Gracio J., y Natal Jorge R. A new one-point quadrature enhanced assumed strain (eas) solid-shell element with multiple integration points along thickness: part 1 geometrically linear applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62:952–977, 2005.
- Cardoso R., Yoon J., Mahardika M., Choudhry S., Alves de Sousa R., y Fontes Valente R. Enhanced assumed strain (EAS) and assumed natural strain (ANS) methods for one-point quadrature solid-shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75:156–187, 2008.

- Flores F. Implementation of the refined zigzag theory in shell elements with large displacements and rotations. *Composite Structures*, 118:560–570, 2014.
- Flores F. A simple reduced integration hexahedral solid-shell element for large strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 303:260–287, 2016.
- Flores F. y Oñate E. A rotation-free shell triangle for the analysis of kinked and branching shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:1521–1551, 2007.
- Flores F., Oñate E., y Zárata F. New assumed strain triangles for non linear shell analysis. *Computational Mechanics*, 17:107–114, 1995.
- Kadapa C. Novel quadratic bezier triangular and tetrahedral elements using existing mesh generators: Applications to linear nearly incompressible elastostatics and implicit and explicit elastodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 117:543–572, 2019.
- Kim D. y Bathe K. A triangular six-node shell element. *Computers and Structures*, 87:1451–1460, 2009.
- Lee P. y Bathe K. Development of mitc isotropic triangular shell finite elements. *Computers and Structures*, 87:945–962, 2004.
- Mostafa M., Sivaselvan M., y Felippa C. A solid-shell corotational element based on ANDES, ANS and EAS for geometrically nonlinear structural analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 95:145–180, 2013.
- Oñate E., Zienkiewicz O., Suárez B., y Taylor R. A methodology for deriving shear constrained Reissner-Mindlin plate elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:345–367, 1992.
- Schwarze M. y Reese S. A reduced integration solid-shell finite element based on the EAS and the ANS concept. geometrically linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80:1322–1355, 2009.
- Simo J., Fox D., y Rifai M. On a stress resultant geometrically exact shell model. part II: The linear theory, computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73:53–92, 1989.
- Simo J., Fox D., y Rifai M. On a stress resultant geometrically exact shell model. part III: Computational aspects of the non-linear theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79:21–70, 1990.
- Simo J. y Kennedy J. On a stress resultant geometrically exact shell model. part V: Nonlinear plasticity: formulation and integration algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 96:133–171, 1992.
- Sze K., Liu X., y Lo S. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40:1551–1569, 2004.