

## ESTUDIO NUMÉRICO DE SENSORES PIEZOELÉCTRICOS APLICADOS A LA GENERACIÓN DE ONDAS GUIADAS EN BARRA DE SECCIÓN RECTANGULAR

### NUMERICAL STUDY OF PIEZOELECTRIC SENSORS APPLIED TO GENERATION OF GUIDED WAVES IN RECTANGULAR SECTION BARS

Javier L. Idzi<sup>a</sup>, Marcos E. Amado<sup>a</sup>, Gonzalo A. Díaz<sup>a</sup>, Franco Trabucco<sup>a</sup>, Eduardo B. Groth<sup>b</sup> y Boris N. Rojo Tanzi<sup>c</sup>

<sup>a</sup>*UIDET Ingeniería Aplicada en Mecánica y Electromecánica (IAME), Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata. Calle 48 y 116, La Plata, Argentina*

<sup>b</sup>*Laboratório de Metalurgia Física (LAMEF), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, BRASIL*

<sup>c</sup>*Grupo de Mecânica Aplicada (GMAp), Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, BRASIL*

**Palabras clave:** Ondas guiadas, Transductores, Curvas de dispersión, Elementos finitos.

**Resumen.** La inspección por medio de ondas guiadas es una alternativa viable al momento de evaluar la integridad de tuberías, recipientes sometidos a presión y otras estructuras relacionadas con la industria química, la industria del petróleo y gas, etc. Para la realización de las inspecciones por ondas guiadas es necesario poder generar los modos de propagación de onda que son particulares para la geometría de la estructura en estudio. Lo cual solamente es posible a través del desarrollo de transductores específicos para el análisis de dichas geometrías. Los modelos de elementos finitos permiten analizar y evaluar la influencia de las diversas ondas producidas por el transductor. En este trabajo se presenta un método capaz de ensayar sensores de ondas guiadas que utilizan tecnología piezoeléctrica para generar ondas mecánicas. Se modelan cerámicas piezoeléctricas de distintas polarizaciones acopladas a una guía de ondas se sección transversal rectangular y los resultados son analizados a través de la doble transformada de Fourier.

**Keywords:** Guided waves, Transducers, Dispersion curves, Finite Elements.

**Abstract.** Guided wave inspection is a viable alternative when evaluating the integrity of pipelines, pressure vessels and other structures related to the chemical industry, the oil and gas industry, etc. To carry out the guided wave inspections, it is necessary to be able to generate the wave propagation modes that are particular to the geometry of the structure under study. Which is only possible through the development of specific transducers for the analysis of these geometries. Finite element models allow you to analyze and evaluate the influence of the various waves produced by the transducer. This work presents a method capable of testing guided wave sensors that use piezoelectric technology to generate mechanical waves. Piezoelectric ceramics of different polarizations coupled to a rectangular cross-section waveguide are modeled and the results are analyzed through the double Fourier transform.

## 1. INTRODUCCIÓN

La utilización de técnicas de detección de daño basadas en propagación de ondas en sólidos, ha crecido en las últimas décadas gracias a la disponibilidad de instrumentos cada vez más sensibles y precisos.

El estudio de la propagación de una guía de onda con geometría específica utilizando las curvas de dispersión permite entender qué frecuencias pueden propagar en que forma modal sobre la guía de ondas.

Asociar la técnica de ultrasonido con la propagación de ondas guiadas tiene una buena relación costo-beneficio debido a la simplicidad y rapidez de inspección. Esta metodología permite localizar daños en estructuras inaccesibles debido a estar sumergidas, enterradas o aisladas. Esto es porque cuando se aplica una excitación que se propagara como una onda guiada sólo se requiere una pequeña área de acceso (Rose, 2014). En este caso, es posible, con un mismo sensor emisor/receptor obtener información de defectos localizados a distancias considerables (20 m a 30 m), en estructuras de acero con difícil acceso. Es cierto que este tipo de metodología no permite un diagnóstico preciso de la magnitud y tipo de daño identificado, pero permite realizar una localización de potenciales regiones críticas donde deberá ser realizada una intervención con otras técnicas de Ensayo No Destructivo (END).

Los patrones de las curvas dependen de la sección geométrica, debido fundamentalmente a la interacciones de las mismas, con las fronteras del cuerpo. Estos patrones pueden ser analizados con las curvas de dispersión. Para transmitir y recibir ondas elásticas frecuentemente son utilizados dispositivos, conocidos como transductores piezoeléctricos. Los cuales permiten evaluar grandes longitudes de una guía de ondas.

La propagación de ondas guiadas empleadas en END ha sido utilizada en la inspección de largas estructuras (Cawley y Alleyne, 1996), sin embargo, en los procesos de END la transmisión y los transductores deben usarse para generar y detectar modos de onda, este paso del proceso puede llevar mucho tiempo, tener alto costo económico y, a veces, no ser reproducible. Las ondas guiadas se utilizan ampliamente en el monitoreo de integridad estructural de diversos componentes considerando su facilidad de generación y medición con elementos piezoeléctricos que resultan rentables por ser pequeños, ligeros y eficientes (Giurgiutiu et al., 2008). Durante la inspección generalmente se requiere la generación de un modo único y cuidadosamente seleccionado para simplificar la señal de respuesta y optimizar la sensibilidad a tipos de daño específicos (Serey et al., 2017). Para ciertas geometrías particulares bidimensionales se han estudiado las guías de ondas, impulsadas por la aplicación de END en tuberías y rieles, las barras rectangulares, sin embargo, rara vez se han estudiado, debido a la falta de aplicaciones. Las soluciones se redujeron a un pequeño número de modos, y ninguna solución analítica general fue proporcionada. Más recientemente, el uso del método de elementos finitos (FEM) para calcular las curvas de dispersión en guías de ondas hicieron posible estudiar cualquier sección transversal.

Se han realizado estudios donde se investigaron metodologías para la generación de ondas guiadas en la inspección de diversas estructuras, (Serey et al., 2019) desarrolló una metodología para la generación de un solo modo en una guía bidimensional de ondas por medio de la identificación modal a través de la transformada de *Fourier*.

Durante el desarrollo del transductor, es ventajoso tener un método de modelado eficiente que prediga con precisión la excitación de cada modo de propagación. Para geometrías simples, puede ser posible derivar soluciones analíticas; sin embargo, para una sección transversal compleja es necesario recurrir a soluciones numéricas. Una solución numérica de uso común

implica emplear un modelo de elementos finitos, para predecir la respuesta del guía de ondas excitado por transductores piezoeléctricos. Sin embargo, estos modelos normalmente requieren una gran cantidad de grados de libertad, haciendo simulaciones computacionalmente costosas. Además, la respuesta de los modos individuales de propagación de ondas es difícil de extraer de estas simulaciones. Los modos de propagación en guías de ondas de sección transversal arbitraria pero constante se puede modelar utilizando el método de Elementos Finitos Semi-Analítico (SAFE).

En este contexto, se presenta en este trabajo el análisis a través de elementos finitos de una barra de sección rectangular excitada con un transductor piezoeléctrico comercial. Lo cual permite evaluar la influencia de las ondas producidas por el transductor en la guía de ondas con la utilización de la doble transformada de *Fourier*.

## 2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La propagación de ondas es un tema que ya viene siendo estudiado desde mucho tiempo atrás. En 600 a. C. Pitágoras ya estudió los armónicos de uno tono. Entre los muchos trabajos que se destacan en este campo de ingeniería se puede mencionar *The Theory of Sound* (Strutt, 1887), *Acoustic Fields and Wave Theory* (Auld, 1973), y más recientemente *Ultrasonic guided waves* (Rose, 2014). Estos son algunos ejemplos de las grandes referencias que hay en el campo de la acústica. La propagación de ondas en medios sólidos se puede dividir de acuerdo con las características geometrías del medio de propagación, en un medio infinito tenemos las ondas de cuerpo, conocidas como  $P$  y  $S$ , en un medio semi infinito tenemos las ondas de superficie, conocidas como ondas de Rayleigh, y cuando el medio de propagación tiene una o dos dimensiones mucho menor que la otra, la energía va propagar en forma de ondas guiadas. Las ondas de cuerpo son utilizadas en ensayos de ultrasonido, largamente empleados en la industria. Las ondas de superficie son estudiadas por investigadores del área de sismos, porque son las más dañinas para diversos sistemas. La principal aplicación de las ondas guiadas es la evaluación y monitoreo de la integridad de estructuras esbeltas, pero los desarrollos de estos ensayos están en constante expansión. Las ondas guiadas tienen gran potencial para aplicaciones en ingeniería. Una manera de investigar la propagación de las ondas guiadas es la observación de las curvas de dispersión del guía de ondas en cuestión. Las curvas de dispersión tienen una gran cantidad de información, todavía están condensadas, por eso la interpretación de las curvas no es una cosa trivial. La Fig. 1 presenta las curvas de dispersión de una placa “infinita” de titanio de 10 mm de espesor.

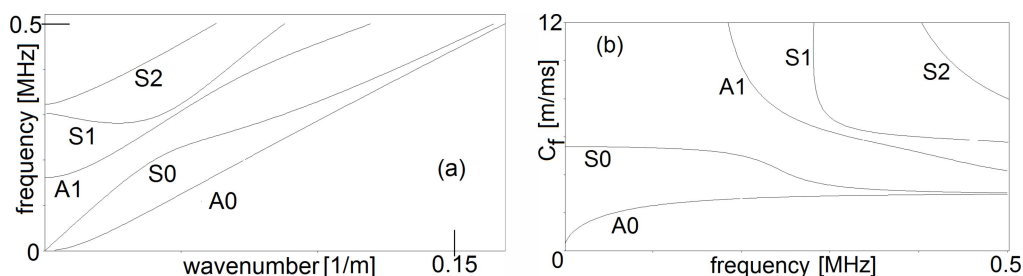


Figura 1: Curvas de dispersión de una placa de titanio presentadas en dos dominios.

### 2.1. Interpretación de las curvas de dispersión

Cada curva de dispersión es la representación de un modo de propagación de una estructura, que se conoce como el guía de ondas, o la geometría sobre la cual se propagan las ondas. Las

curvas de dispersión también se conocen en la literatura como onda modal. Los modos están asociados a los movimientos naturales de vibraciones de la estructura que está sirviendo de guía de ondas. La relación fundamental que genera las curvas de dispersión es el par frecuencia ( $f$ ) longitud de onda ( $\lambda$ ) de cada modo de propagación que existe en el guía de ondas. Dos definiciones son importantes:  $k = 2\pi/\lambda$ , es el número de onda; y  $\omega = 2\pi f$  es la frecuencia angular. Y desde esa relación fundamental se descubre la velocidad de propagación de fase ( $C_f$ ) y la velocidad de grupo ( $C_g$ ), que son calculadas a partir de las relaciones:  $C_f = \omega/\lambda$  y  $C_g = d\omega/d\lambda$ .

La velocidad de propagación es la información más importante en el desarrollo de ensayos no destructivos que buscan localizar defectos y evaluar la integridad de la estructura porque justamente el “tiempo del vuelo” es la variable más sencilla que se puede medir y que puede localizar el defecto, aunque es conocida la velocidad del vuelo. Pero las curvas de dispersión contienen más información, la propia dispersión, que como el nombre ya dice, es el fenómeno que hace que el modo de propagación se disuelva y pierda su campo de desplazamiento característico a lo largo de la dirección de propagación. Eso sucederá con intensidad proporcional a la dependencia de la velocidad de propagación con la frecuencia, cuanto más constante es la velocidad  $C_f$ , menor será la dispersión. Por ejemplo en la Fig. 1, el modo  $A_0$  empieza dispersivo (a bajas frecuencias) y después se arregla y el  $S_0$  empieza no dispersivo y después tiene una banda de frecuencia crítica (0.2 MHz a 0.35 MHz).

Características geométricas de la estructura que actúa como guía de ondas pueden ser percibidas al mirar las curvas de dispersión, por ejemplo, si la guía de ondas es un perfil que tiene paredes delgadas y cuantos ejes de simetría tiene la sección. Algunos ejemplos de estructuras que son guías de ondas, son los caños, tubos, rieles de ferrocarril, barras, perfiles doble T, perfiles U. Esos datos se pueden inferir por la cantidad de curvas que tiene el guía de ondas, también se puede observar, la densidad de las curvas, cuanto más lleno está el espacio cartesiano, más delgado y complejo es la geometría del guía de ondas. Esto es un resumen de las interpretaciones de las curvas de dispersión. Esa colección de curvas es un mapa de la propagación de ondas sobre una estructura, indispensable para el desarrollo de ensayos no destructivos por ondas guiadas.

La metodología de obtención de las curvas de dispersión es el tema abordado en la próxima sección del trabajo.

## 2.2. Obtención de las curvas de dispersión

La estrategia de obtención de las curvas va depender de la complejidad del guía de ondas. Placas y cilindros tienen solución analítica, secciones más complejas, como rieles o secciones con distintos materiales necesitan ayuda computacional para la confección de las curvas (Idzi, 2017). Sin embargo, las soluciones analíticas generan un conjunto de ecuaciones conocidas como trascendentales y la generación gráfica de esas ecuaciones necesita apoyo computacional también. La Fig. 1, por ejemplo, son las curvas de dispersión de una placa obtenidas por un software comercial que resuelve las curvas de dispersión de placas y ductos. Una metodología de resolución son los conocidos métodos SAFE. Esos métodos se basan en análisis modal por elementos finitos para la construcción de las curvas de guía de ondas y fueron publicados por primera vez durante los años setenta por Aalami (1973) y Lagasse (1973). Desde entonces, una gran cantidad de formas de implementación de métodos SAFE fueron publicadas, cada una con su particularidad, hay SAFE para medios anisótropos, secciones complejas y, a priori, se puede resolver las curvas de dispersión de cualquier tipo de guía de onda. Una buena revisión de los métodos SAFE se encuentran en Groth y Clarke (2018). El núcleo de los métodos SAFE es el

análisis modal, aplicando el método de los elementos finitos. Con este recurso se determinan las frecuencias naturales y los modos propios de vibración de la sección transversal del guía de ondas. Hay muchas estrategias para hacer el acoplamiento entre el modelo de elementos finitos y el guía de ondas, el desafío es hacer que el modelo pueda captar la infinitud del guía de ondas. Para comprender es importante que se sepa que cuando la onda se propaga, si consideramos un instante de tiempo, apenas una parte del guía está en movimiento, justamente conocido como paquete modelándose de manera finita. Hay SAFEs que utilizan modelos 2D, discretizando solamente a sección transversal y considerando o desplazamiento longitudinal como una suma de armónicos,  $U = Uei(kzwt)$ . Este campo de desplazamiento es insertado en la formulación de elementos finitos, tanto en códigos comerciales (Predoi et al., 2007), ó implementado directamente en un nivel más bajo de programación (Hayashi et al., 2003). Una manera muy interesante e eficiente de implantación SAFE, desarrollada por Wilcox et al. (2002), utiliza un modelo axisimétrico, que modela un anillo, en el cual la sección del anillo es la sección del guía de ondas. En un modelo axisimétrico se pueden fijar los números de nodos con que va vibrar el anillo y de esa forma se puede mantener fijo la longitud de onda y calcular las frecuencias naturales. Ese método también puede ser consultado en Idzi (2017), donde fue utilizado para la construcción de las curvas de dispersión de un riel ferroviario. Otra clase de métodos SAFE que existe trabaja con modelo en 3D. Es modelado una porción del guía de ondas y a las extremidades del modelo son aplicadas condiciones de contorno periódicas las cuales permiten que el modelo tenga uno o más lambdas adentro de la longitud modelada. Cambiando la longitud modelada y tomando las frecuencias naturales del modelo con las condiciones de contorno aplicadas, se pueden confeccionar la curvas de dispersión de, quizá, cualquiera guía de ondas (Soroohan et al., 2011). La dificultad de ese método es la verificación de la longitud de onda y el modo de propagación, siendo que la confección de las curvas por ese método 3D es hecha manualmente, o por un arreglo matemático complejo conocido como número de Mach, resultando laborioso porque tiene que considerar los desplazamientos de todos los nodos del modelo y procesarlo en un número que va a ser asignado al modo. Actualmente su implementación no resulta sencilla. En este contexto, se presenta el método propuesto, que permite automatización y generación de las curvas de manera más simple. En la próxima sección se aborda en detalle esa construcción y los resultados producidos, así como la validación de ellos.

### 3. METODOLOGÍA

El método aplicado en este trabajo consiste en determinar el campo de desplazamiento  $u(x, y, z)$  sobre la línea de monitoreo. Con esta información es posible crear los pares  $(f; \lambda)$ , que son la génesis de las curvas de dispersión. Luego se utiliza la FFT (Fast Fourier Transform), para obtener directamente el inverso de la longitud de onda  $(1/\lambda)$ , este procedimiento se realiza para todos los puntos de la línea de monitoreo, luego se grafican las curvas de dispersión para cada caso, y se obtienen las figuras, posteriormente se superponen las curvas de dispersión determinadas con las de la barra original. En este trabajo se obtuvieron las curvas de dispersión para el modelo de la figura 4, que consiste de una cerámica piezoeléctrica sobre una barra de acero. Las curvas de dispersión se obtienen aplicando la metodología descrita en el párrafo anterior, que es básicamente obtener el campo de desplazamientos de cada uno de los puntos de la línea de monitoreo de la figura 4, luego crear los pares  $(f; \lambda)$  y aplicar la FFT, para obtener las gráficas de la figura 5. Se modelaron dos casos y para cada uno se obtuvieron las curvas de dispersión (Fig. 5a y 5b), el primero consiste en obtener las curvas de dispersión para el modelo 1 (Fig. 2) y luego obtener las curvas de dispersión cambiando la polarización de la cerámica, que consiste en rotar  $90^\circ$  respecto al eje Z el modelo y obtener el modelo 2 de la (Fig. 3). El

comportamiento de la cerámica piezoeléctrica se describe utilizando las ecuaciones (1) y (2) en forma matricial.

$$\sigma = C\varepsilon - e^T E \quad (1)$$

$$D = e\varepsilon + X E \quad (2)$$

$C$ ,  $e$ ,  $X$ ,  $\sigma$  y  $\varepsilon$  son los tensores elástico, piezoeléctrico, de rigidez dieléctrica, de tensiones y de deformaciones respectivamente.  $D$  y  $E$  los vectores de desplazamiento eléctrico y de campo eléctrico.

En esta sección se describen las herramientas empleadas para el análisis de las cerámicas piezoeléctricas, las cuales son modeladas para estudiar su interacción con una guía de ondas.

### 3.1. Modelización

El modelo físico analizado es una barra de  $15\text{mm} \times 5\text{mm} \times 1500\text{mm}$ , con un piezoeléctrico de  $15\text{mm} \times 1\text{mm} \times 2\text{mm}$ . Para el desarrollo de los análisis se consideraron 2 casos, el modelo 1 (Fig. 2), y el modelo 2 (Fig. 3) rotado  $90^\circ$  respecto al eje  $Z$ . Se realizó un análisis estructural eléctrico en el dominio de la frecuencia. Se aplicó una tensión de 200 V sobre los nodos superiores del piezoeléctrico, se analizaron 512 nodos sobre la línea de monitoreo central (Groth y Clarke, 2018). El rango de frecuencias analizado fue de 0 kHz a 150 kHz.

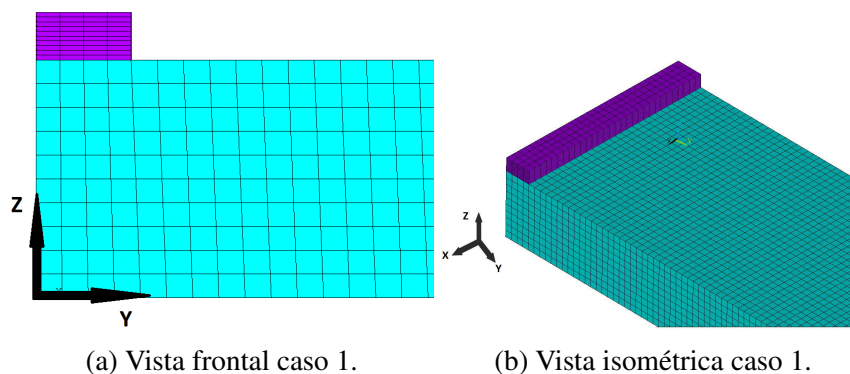


Figura 2: Modelo 1.

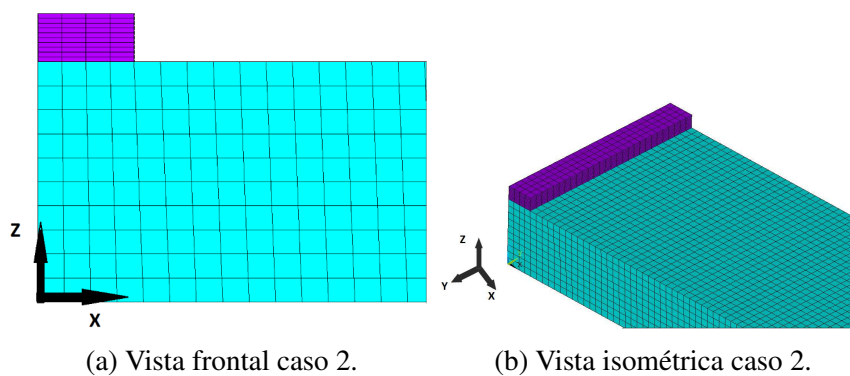


Figura 3: Modelo 2.

### 3.1.1. Modelo físico

El modelo presenta las dimensiones especificadas en la Fig. 4.

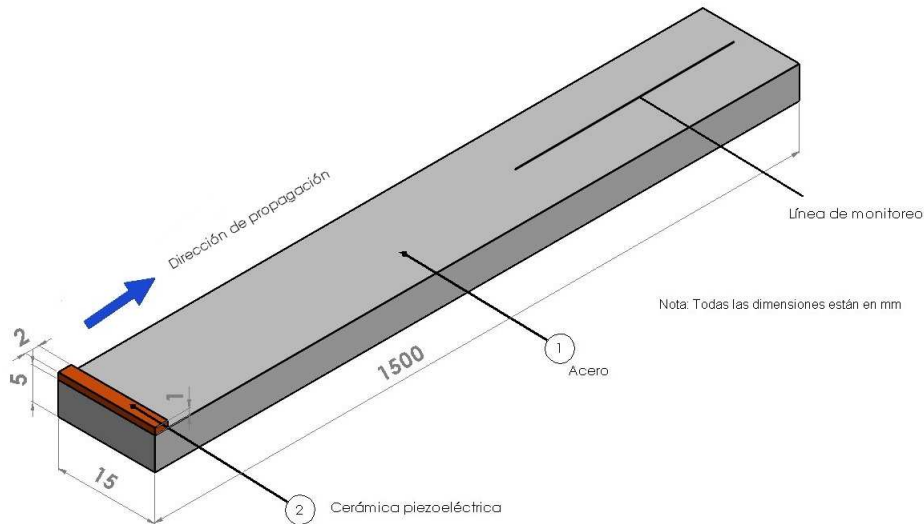


Figura 4: Dimensiones y dirección de propagación.

### 3.1.2. Modelos de materiales

En la Tabla 1 se muestran las propiedades del acero, en la Tabla 2 las constantes elásticas de la cerámica, en la Tabla 3 la permitividad y en la Tabla 4 las constantes piezoeléctricas.

Propiedad	Valor	Unidad
Módulo de Young	2,1 e11	Pa
Coefficiente de Poisson	0,3	-
Densidad	7900	kg/m <sup>3</sup>

Tabla 1: Propiedades del acero

Constante	Valor	Unidad
D11	1,47 e 11	Pa
D12	1,05 e 11	Pa
D13	9,37 e 10	Pa
D22	1,47 e 11	Pa
D23	9,37 e 10	Pa
D33	9,37 e 10	Pa
D44	2,12 e 10	Pa
D55	2,3 e 10	Pa
D66	2,3 e 10	Pa

Tabla 2: Constantes elásticas de la cerámica piezoeléctrica

Dirección	Valor	Unidad
X	1e-8	-
Y	1e-8	-
Z	8.0925 e-9	-

Tabla 3: Permitividad de la cerámica piezoeléctrica

Dirección	X	Y	Z	Unidad
X	0	0	-3,09	C/N
Y	0	0	-3,09	C/N
Z	0	0	16	C/N
XY	0	0	0	C/N
YZ	11,64	0	0	C/N
XZ	0	11,64	0	C/N

Tabla 4: Constantes piezoeléctricas de la cerámica.

### 3.1.3. Análisis

El análisis realizado es un análisis piezoeléctrico de campo acoplado electro-estructural armónico. En el estudio del modelo presentado, se implementa un acoplamiento entre los elementos de cada material. Este acoplamiento es gobernado por la ecuación (3).

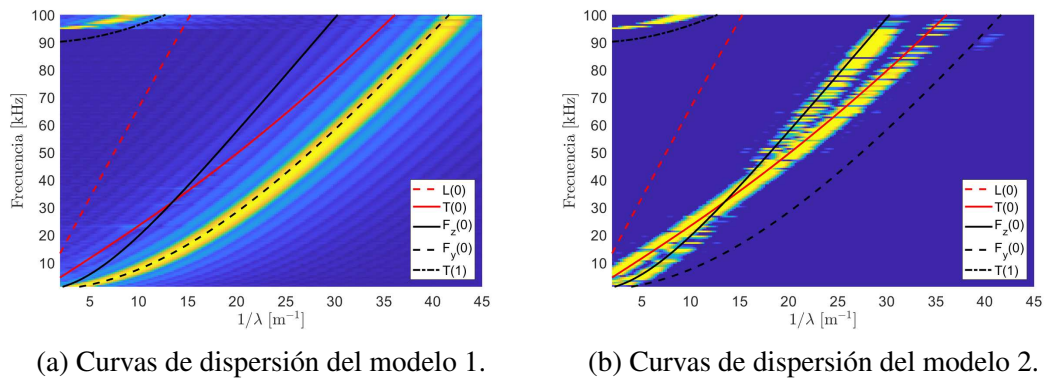
$$\begin{bmatrix} [K] & [K^z] \\ [K^z]^T & [K^d] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [u] \\ [V] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [F] \\ [L] \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$[K]$ ,  $[K^z]$  y  $[K^d]$  las matrices de rigidez estructural, rigidez piezoeléctrica y de coeficiente dieléctrico respectivamente.  $[u]$ ,  $[V]$ ,  $[L]$  los vectores de desplazamiento, potencial eléctrico y de cargas nodales aplicadas y  $[F]$  las fuerzas aplicadas (para este análisis en particular son 0).

## 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A través del análisis de la FFT, sobre las señales generadas en los 2 modelos numéricos analizados, es posible interpretar que ondas están siendo generadas, y cuál es la respuesta acústica de la cerámica piezoeléctrica, polarizada en uno u otro sentido. Cuando la imagen de la doble transformada es superpuesta sobre las curvas de dispersión de la guía de ondas, los modos generados por la excitación en el extremo de la barra son visualizados. Las curvas de dispersión de una barra de sección rectangular de 15mm×5mm (curvas negras de la Fig. 5a), poseen 4 modos fundamentales de propagación, de izquierda a derecha, longitudinal ( $L_0$ ), torsional ( $T_0$ ) y dos flexiones  $F_z(0)$ ,  $F_y(0)$ . Se puede observar también un quinto modo de segundo orden con frecuencia de corte en torno a los 90 kHz. La polarización en  $X$  genera preferentemente un modo de flexión en como es posible observar en la Fig. 5a, que corresponde al modelo 1, se puede observar que en todo el rango de frecuencias, la señal más pronunciada se observa bajo la curva de dispersión correspondiente al modo de flexión  $F_y(0)$ . Un resultado de un segundo análisis numérico, que se corresponde con el modelo 2 es observado en la Fig. 5b. En este modelo, la polarización de la cerámica piezoeléctrica está en la dirección transversal de la guía de ondas. Para el modelo 2 tres modos son excitados con esa polarización: torsional ( $T_0$ ) flexión en “Y”,  $F_z(0)$  y el primer modo de orden más elevado



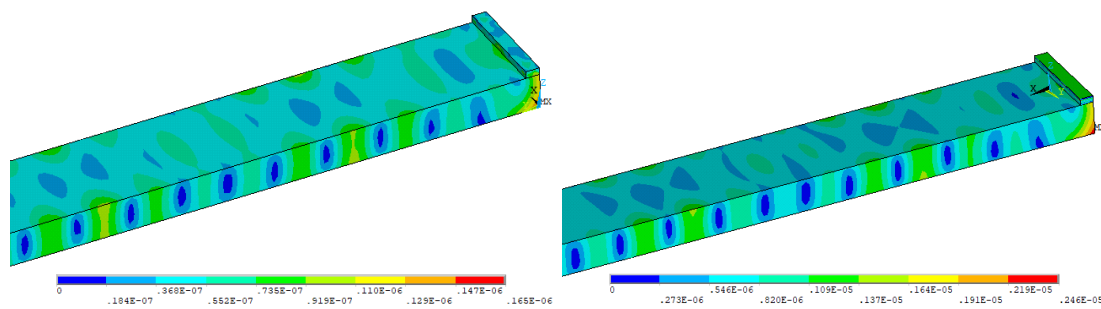


(a) Curvas de dispersión del modelo 1.

(b) Curvas de dispersión del modelo 2.

Figura 5: Curvas de dispersión obtenidas para los 2 modelos analizados.

En la figura 6 se muestran, a modo de ejemplo los desplazamientos resultantes para el modelo 1 y el modelo 2. Estos desplazamientos son los que corresponden a una frecuencia de 150 kHz. De estos desplazamientos se consideran los que están sobre los nodos de la línea de monitoreo de la figura 4, que posteriormente serán utilizados para obtener los pares  $(f; \lambda)$ , con los cuales se obtienen las curvas de dispersión de la figura 5, aplicando la metodología descrita en el punto 3 de este trabajo. Para cada valor de frecuencia, desde 0 kHz a 150 kHz existe un campo de desplazamiento sobre la línea de monitoreo, con esos valores se construyen las curvas de dispersión obtenidas.



(a) Desplazamientos resultantes modelo 1.

(b) Desplazamientos resultantes modelo 2.

Figura 6: Desplazamientos resultantes obtenidos para una frecuencia de 150 kHz.

## 5. CONCLUSIONES

La metodología aplicada para analizar la respuesta acústica de cerámicas piezoeléctricas es una herramienta eficaz, con bajo tiempo computacional es posible modelar sensores piezoeléctricos y analizar qué respuesta acústica será emitida cuando una diferencia de potencial (V) es aplicada sobre la cerámica. Son innumerables las posibilidades de configuraciones con cerámicas piezoeléctricas con otros componentes y otros materiales. El modelado en el dominio de la frecuencia se mostró una herramienta eficaz para hacer un primer análisis y validar si un proyecto se está desarrollando conforme a lo esperado.

**REFERENCIAS**

- Aalami B. Waves in Prismatic Guides of Arbitrary Cross Section. *Journal of Applied Mechanics*, 40(4):1067–1072, 1973.
- Auld B. *Acoustic fields and waves in solids*. Wiley, 1973.
- Cawley P. y Alleyne D. The use of lamb waves for the long range inspection of large structures. *Ultrasonics*, 34(2-5):287–290, 1996.
- Giurgiutiu V., Yu L., Santoni G., y Xu B. Lamb wave tuning for piezoelectric wafer active sensor applications in in-situ structural health monitoring. En *AIP Conference Proceedings*, volumen 975, páginas 896–903. American Institute of Physics, 2008.
- Groth E.B. y Clarke T.G. Método alternativo para la confección de las curvas de dispersión de una guía de onda cualquiera. *Mecánica Computacional*, 36(4):37–48, 2018.
- Hayashi T., Song W., y Rose J. Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example. *Ultrasonics*, 41(3):175–183, 2003. Copyright: Copyright 2004 Elsevier Science B.V., Amsterdam. All rights reserved.
- Idzi J.L. Estudio numérico de la propagación de ondas guiadas en rieles ferroviarios. 2017.
- Lagasse P.E. Higher-order finite-element analysis of topographic guides supporting elastic surface waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 53(4):1116–1122, 1973.
- Predoi M.V., Castaings M., Hosten B., y Bacon C. Wave propagation along transversely periodic structures. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 121(4):1935–1944, 2007.
- Rose J.L. *Ultrasonic guided waves in solid media*. Cambridge University Press, 2014.
- Serey V., Quaegebeur N., Micheau P., Masson P., Castaings M., y Renier M. Selective generation of ultrasonic guided waves in a bi-dimensional waveguide. *Structural Health Monitoring*, 18(4):1324–1336, 2019.
- Serey V., Renier M., Castaings M., Masson P., Quaegebeur N., y Micheau P. Selective guided waves generation in a bi-dimensional waveguide for damage detection. En *Proceedings of the 11th International Workshop on Structural Health Monitoring*, páginas 1771–1778. 2017.
- Sorohan Ş., Constantin N., Găvan M., y Anghel V. Extraction of dispersion curves for waves propagating in free complex waveguides by standard finite element codes. *Ultrasonics*, 51(4):503–515, 2011.
- Strutt J. *The Theory of Sound*, volumen I. MACMILLAN AND CO., 1887.
- Wilcox P., Evans M., Diligent O., Lowe M., y Cawley P. Dispersion and excitability of guided acoustic waves in isotropic beams with arbitrary cross section. volumen 615, páginas 203–210. American Institute of Physics, 2002.