

## SIMULACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS ESFÉRICOS SUJETOS A COLISIONES DE IMPACTO MÚLTIPLE Y EFECTOS DE FRICCIÓN

### SIMULATION OF RIGID SPHERICAL BODIES SUBJECTED TO FRICTION AND MULTIPLE IMPACT COLLISIONS

Eliana Sanchez<sup>a</sup>, Federico J. Cavalieri<sup>b</sup>, Alejandro Cosimo<sup>a</sup>, Olivier Brüls<sup>b</sup> y Alberto Cardona<sup>a</sup>

<sup>a</sup>CIMEC-CONICET-UNL, Colectora Ruta Nac 168 s/n - Paraje El Pozo, 3000 Santa Fe, Argentina  
(fcavalieri, esanchez, acardona)@cimec.unl.edu.ar; <https://cimec.conicet.gov.ar>

<sup>b</sup> University of Liège, Department of Aerospace and Mechanical Engineering, Allée de la Découverte 9,  
4000 Liège, Belgium, (acosimo, o.bruls)@uliege.be

**Palabras clave:** Contacto Dinámico no suave, fricción, colisiones impacto múltiple.

**Resumen.** En este trabajo se estudia el movimiento de cuerpos rígidos esféricos sometidos a efectos de fricción por medio de la ley de Coulomb y colisiones de impacto múltiple, en el marco del Método de los Elementos Finitos. Para la integración de las ecuaciones de movimiento se utiliza el esquema de integración temporal  $\alpha$  generalizado no suave, en tanto que la solución del problema de contacto se aborda con una formulación dual mixta basada en un método Langrangiano aumentado. Para la descripción de la dinámica de las esferas se utiliza un modelo de cuerpo rígido con grados de libertad de traslación y de rotación. Finalmente, para evaluar la eficiencia numérica de la metodología propuesta, se estudia el movimiento de tres esferas en contacto con un plano rígido sujetas a colisiones de impacto múltiple.

**Keywords:** nonsmooth contact dynamics, sliding friction of spherical bodies, multiple impact collisions.

**Abstract.** In this work the movement of spherical rigid bodies subjected to friction effects is studied by means of Coulomb's law and multiple impact collisions in the framework of the Finite Element Method. The nonsmooth generalized- $\alpha$  time integrator scheme is used for the integration of the equations of motion, meanwhile the solution of the contact problem is solved with a mixed dual formulation based on an augmented Lagrangian method. For the description of the dynamics of the spheres, a rigid body model with degrees of freedom of translation and rotation is used. Finally, to evaluate the numerical efficiency of the proposed methodology, the movement of three spheres in contact with a rigid plane subject to multiple impact collisions is studied.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las cargas de inercia y los efectos de fricción en el movimiento dinámico de rodadura juegan un papel importante en el diseño y rendimiento operativo de sistemas mecánicos. Los rodamientos de bolas, de rodillos o los husillos de bolas son algunos ejemplos comúnmente utilizados en mecanismos en los que estos efectos deben tenerse en cuenta durante el proceso de diseño. Una formulación correcta que describa adecuadamente el movimiento dinámico de rodadura requiere comprender la influencia del contacto y las fuerzas de fricción para capturar con precisión: i) el deslizamiento y el movimiento de rotación, ii) el instante en que el movimiento de deslizamiento cambia a rodadura pura o viceversa y iii) las fuerzas impulsivas provenientes del contacto entre cuerpos.

En situaciones reales, los cuerpos en contacto se deforman ligeramente, por lo tanto, no hay un punto de contacto sino un área de contacto. Sin embargo, hay casos donde la deformación de un cuerpo puede despreciarse y otros en los que ambos cuerpos podrían considerarse perfectamente rígidos. En el último caso, el efecto de la resistencia a la rodadura está ausente en la formulación y, por lo tanto, no se consideran los efectos disipativos en la interfaz de contacto de las partes móviles. Para el estudio de tales ejemplos, las ecuaciones analíticas son útiles; sin embargo, están restringidos a casos simples que limitan su aplicación a problemas generales [Johnson \(1985\)](#). Actualmente, la simulación numérica es una alternativa que permite resolver una amplia gama de aplicaciones del mundo real en comparación con las ecuaciones analíticas.

Se han propuesto varios enfoques numéricos para simular múltiples contactos combinados con movimientos de rodadura. Por ejemplo, el método más utilizado es el Método de Elementos Discretos (DEM), basado en el enfoque de penalización. DEM es relativamente fácil de implementar y se puede usar con un integrador implícito, pero no evita el uso de un paso pequeño de tiempo debido a la regularización de la penalización ([Hairer et al., 2010](#)). Otra alternativa es el enfoque complementario basado en la fricción de rodadura en el contexto de las desigualdades diferenciales, ver por ejemplo el trabajo de [Tasora y Anitescu \(2013\)](#). Este modelo puede simular múltiples contactos rígidos, como en el caso de materiales granulares, sin embargo, la formulación descrita en [Tasora y Anitescu \(2013\)](#) se presenta solo en el marco de cuerpos rígidos.

El objetivo de este trabajo es presentar la simulación numérica del movimiento libre tridimensional de esferas rígidas que pueden ser sometidas a múltiples colisiones de impacto con otras esferas bajo un movimiento de fricción deslizante. A diferencia de la propuesta de [Tasora y Anitescu \(2013\)](#), aquí las ecuaciones de movimiento son resueltas con la versión desacoplada del esquema  $\alpha$  - generalizado no suave propuesto por [Cosimo et al. \(2019\)](#), que permite integrar los elementos de contacto desarrollados en este trabajo en mecanismos compuestos por elementos rígidos y/o flexibles de un código no lineal preexistente si grandes modificaciones.

## 2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

En dinámica no suave, los integradores temporales generalmente se clasifican en dos grupos principales: impulsados por eventos y escalonados en el tiempo. Los primeros esquemas se basan en la detección exacta del impacto. En cambio, en el segundo grupo, el impacto se resuelve en el mismo paso de tiempo mediante el uso de una ley constitutiva de impacto, por ejemplo, las leyes de impacto de Newton o Poisson. En el caso de estudiar la dinámica de estructuras con discretización espacial, los esquemas temporales de integración son los métodos de la familia Newmark, por ejemplo, el Hilbert-Hughes-Taylor, Chung-Hulbert o el  $\alpha$  generalizado ([Chung y Hulbert, 1993](#)). Estos son integradores implícitos con una precisión de segundo orden. Sin

embargo, cuando ocurren cambios bruscos de velocidad como consecuencia de los impactos, las soluciones numéricas muestran un comportamiento no físico.

Una alternativa a estos integradores fue presentada por Brüls et al. (2014) donde los términos de las ecuaciones de movimiento se dividen en una contribución suave y una contribución no suave. Esta división hace posible integrar los términos de las ecuaciones de movimiento usando un método de paso de tiempo fijo con precisión de primer orden para las contribuciones no suaves, mientras que las contribuciones suaves se integran con un esquema de segundo orden a través del método  $\alpha$  generalizado (Chung y Hulbert, 1993).

En el modelado dinámico de sistemas multicuerpo que involucran múltiples colisiones de impacto entre cuerpos rígidos a través de integradores de paso fijo se utilizan las leyes de impacto de Newton o Poisson. Éstas leyes tienen una descripción del impacto a nivel local y por ello no pueden modelar fenómenos globales como la transferencia de energía entre los cuerpos. Por este motivo fallan en los problemas con múltiples impactos y cuerpos rígidos. Recientemente, Cosimo et al. (2019) propuso una extensión del método  $\alpha$  - generalizado no suave propuesto por Brüls et al. (2014) para obtener una secuencia completamente desacoplada de los tres subproblemas no lineales que son: la predicción suave, la corrección en posición y la corrección en velocidad del movimiento. Además, el nuevo integrador permite modelar problemas de colisiones de múltiple impacto pero sin tener en cuenta la fricción. En este sentido, los autores propusieron un método iterativo en la corrección de velocidad para acumular los impactos durante el paso de tiempo. Entonces, los contactos cerrados con velocidad de pre impacto cero no se consideran en el conjunto activo. Para más detalles ver el trabajo de Cosimo et al. (2020).

### 3. PROBLEMA DE FRICCIÓN

En esta sección, se presenta el Método de Elementos Finitos (FEM) para tratar el contacto por fricción en el marco de dinámica no suave. La solución general al problema de contacto de fricción unilateral a nivel de posición viene dada por

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu}) &= \operatorname{arginf}[\Pi^{\text{int,ext}}(\mathbf{U}) + \Pi^c(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu})] \\ g_N &\geq 0, \quad \nu_N \geq 0, \quad \nu_N g_N = 0; \\ \|\boldsymbol{\nu}_T\| &\leq \mu \nu_N, \quad \mathbf{g}_T = -\|\mathbf{g}_T\| \frac{\boldsymbol{\nu}_T}{\|\boldsymbol{\nu}_T\|} \quad \|\mathbf{g}_T\|(\|\boldsymbol{\nu}_T\| - \mu \nu_N) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\Pi^c$  es la energía potencial de contacto y  $\Pi^{\text{int,ext}}$  representa la energía potencial de las cargas externas e internas. De la Ec.(1),  $\mathbf{U}$  y  $\boldsymbol{\nu}$  son los desplazamientos globales y los multiplicadores de Lagrange asociados al salto de posición, respectivamente. El coeficiente de fricción viene dado por  $\mu$ ,  $g_N$  es el gap normal y  $\mathbf{g}_T$  es el desplazamiento relativo tangencial, ambos desplazamientos dependen de  $\mathbf{U}$ . Finalmente,  $\nu_N$  y  $\boldsymbol{\nu}_T$  son los multiplicadores de Lagrange en la dirección normal y tangencial, respectivamente.

El problema de optimización con restricciones de la Ec.(1) se reformula para encontrar los valores estacionarios de una función lagrangiana aumentada según la propuesta de Alart y Curnier para problemas cuasiestáticos (Alart y Curnier, 1991). El método Lagrangiano aumentado a nivel de posición es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^p(\mathbf{U}_{n+1}, \boldsymbol{\nu}_{n+1}) &= -g_{N,n+1} k \nu_{N,n+1} + \frac{p}{2} g_{N,n+1}^2 - \frac{1}{2p} \operatorname{dist}^2[k \nu_{N,n+1} - p g_{N,n+1}, \mathbf{R}^+] \\ &\quad - k \mathbf{g}_{T,n+1} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T,n+1} + \frac{p}{2} \|\mathbf{g}_{T,n+1}\|^2 - \frac{1}{2p} \operatorname{dist}^2 \left[ k \boldsymbol{\nu}_{T,n+1} - p \mathbf{g}_{T,n+1}, C_{\xi_N} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $p$  es un parámetro de penalización y  $k$  es un factor de escala para los multiplicadores de Lagrange, ambos contribuyen a obtener una mejora de la tasa de convergencia. Por otro lado,  $C_{\xi_N}$  es el cono de fricción de Coulomb extendido a la línea media  $\mathbf{R}^-(\xi_N)$ , (Alart y Curnier, 1991). De manera similar al problema a nivel de posición, el Lagrangiano aumentado que regulariza el problema de contacto por fricción a nivel de velocidad está dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^v(\mathbf{W}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = & -\dot{g}_{N,n+1} k \Lambda_{N,n+1} + \frac{p}{2} \dot{g}_{N,n+1}^2 - \frac{1}{2p} \text{dist}^2[k \Lambda_{N,n+1} - p \dot{g}_{N,n+1}, \mathbf{R}^+] \\ & - k \dot{g}_{T,n+1} \cdot \mathbf{A}_{T,n+1} + \frac{p}{2} \|\dot{g}_{T,n+1}\|^2 - \frac{1}{2p} \text{dist}^2 \left[ k \mathbf{A}_{T,n+1} - p \dot{g}_{T,n+1}, C_{\sigma_N} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{W}$  es un salto de velocidad y  $\mathbf{A}$  es otro multiplicador de Lagrange que representa una fuerza impulsiva. Entonces,  $\dot{g}_{N,n+1}$  y  $\dot{g}_{T,n+1}$  son funciones de  $\mathbf{W}$  y expresan la notación para la ley de impacto de Newton de la siguiente manera:

$$\dot{g}_{N,n+1} = g_{Nq,n+1} \cdot \mathbf{v}_{n+1} + e_N g_{Nq,n} \cdot \mathbf{v}_n \quad \dot{g}_{T,n+1} = g_{Tq,n+1} \mathbf{v}_{n+1} + e_T g_{Tq,n} \mathbf{v}_n \quad (4)$$

donde  $e_N$  y  $e_T$  son los coeficientes de restitución en las dirección normal y tangencial, respectivamente. Por otro lado, si  $\mathbf{q}$  es el vector de coordenadas generalizadas, entonces  $g_{Nq}$  y  $g_{Tq}$  son las matrices gradiente en las direcciones normal y tangencial en el punto de contacto, respectivamente.

#### 4. ELEMENTO DE CONTACTO

En esta sección, se presentan dos elementos tridimensionales para tratar el contacto entre un cuerpo rígido esférico y un plano rígido fijo, así como entre dos esferas rígidas, ver Fig. 1. La estrategia adoptada para describir el movimiento general de los cuerpos es el MEF no lineal, donde las coordenadas globales de los cuerpos se refieren a un marco inercial único (Géradin y Cardona, 2001). La primera formulación que se presenta es el elemento de contacto esfera-

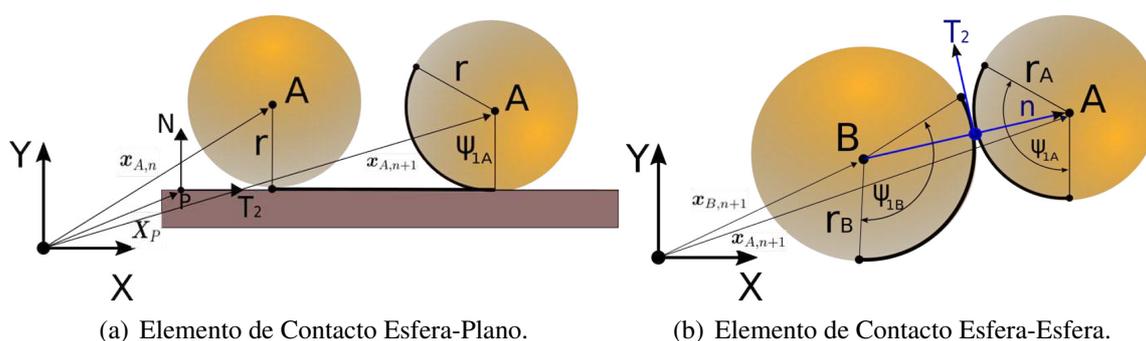


Figura 1: Elemento de Contacto.

plano. Para ello, primero se propone un sistema de coordenadas cartesianas en un nodo  $P$  del plano de contacto que viene dado por los vectores  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2 \in \mathbb{R}^3$  referido a un sistema de coordenadas inercial  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  y  $\mathbf{Z}$ , vea la Fig. 1-a. El huelgo entre el punto de contacto de la esfera y el nodo  $P$  se puede descomponer en una dirección normal y dos direcciones tangenciales de la siguiente manera,

$$\mathbf{g}_{n+1} = g_{N,n+1} \mathbf{N} + g_{T1,n+1} \mathbf{T}_1 + g_{T2,n+1} \mathbf{T}_2 \quad (5)$$

con  $g_N \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{g}_T := [g_{T1,n+1} \ g_{T2,n+1}]^T \in \mathbb{R}^2$ . De la Ec.(5),  $g_N$  representa la distancia de la proyección normal entre los nodos  $A$  y  $P$  menos el radio  $r$ . Si  $g_N$  es igual o mayor que cero, implica que la esfera no está en contacto con el plano. Luego, el segundo y el tercero término de  $\mathbf{g}$  son el movimiento tangencial incremental referido a los vectores tangenciales  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$ , respectivamente, ver Fig.1-a. Por lo tanto, en un intervalo de tiempo  $(t_n, t_{n+1})$ , cuando  $\mathbf{g}_T = 0$ , el movimiento de la esfera corresponde a rodadura pura. En este caso, la longitud del arco de la esfera calculada con el vector rotacional incremental  $\Psi_{n+1}$  (Géradin y Cardona, 2001) y el radio de la esfera  $r$ , debe ser igual al desplazamiento incremental del nodo  $A$ :  $(\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{A,n})$  en las direcciones tangenciales  $\mathbf{T}_{\alpha,n}$  con  $\alpha = 1, 2$ , ver Fig.1-a. Por el contrario, cuando  $\mathbf{g}_T \neq 0$  la esfera está en deslizamiento. Por otro lado, la velocidad de la esfera se puede definir tomando la derivada del tiempo de la Ec.(5),

$$\mathbf{v}_{n+1} = v_{N,n+1}\mathbf{N} + v_{T1,n+1}\mathbf{T}_1 + v_{T2,n+1}\mathbf{T}_2 \quad (6)$$

Finalmente, para este elemento, los vectores de coordenadas generalizadas a nivel de posición y velocidad vienen dados por:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{x}_A^T \ \Psi_A^T]^T \quad \mathbf{v} = [\dot{\mathbf{x}}_A^T \ \dot{\Psi}_A^T]^T \quad (7)$$

donde  $\mathbf{x}_A$  es la posición del nodo  $A$  en la configuración actual,  $\Psi_A$  es el vector rotacional del nodo  $A$  en la configuración actual y los puntos denotan diferenciación respecto al tiempo.

La segunda formulación que se presenta en este trabajo corresponde a un elemento de contacto esfera-esfera, ver Fig.1-b. La esfera con el nodo central  $A$  entra en contacto con una segunda esfera cuyo nodo central es el  $B$ . Aquí, el sistema de coordenadas viene dado por el vector normal  $\mathbf{n}$  y los vectores tangenciales  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$ . Análogamente al elemento anterior, el vector de huelgo entre las dos esferas es:

$$\mathbf{g}_{n+1} = g_{N,n+1}\mathbf{n}_{n+1} + g_{T1,n+1}\mathbf{T}_{1,n} + g_{T2,n+1}\mathbf{T}_{2,n} \quad (8)$$

donde  $g_{N,n+1}$  corresponde a la distancia de contacto entre las dos esferas en el paso de tiempo actual. El segundo y tercer término de  $\mathbf{g}$  están relacionados con el movimiento de deslizamiento o rodadura pura entre las esferas en las direcciones tangenciales  $\mathbf{T}_{\alpha,n}$ , con  $\alpha = 1, 2$  evaluado en el paso de tiempo anterior. La evaluación de los vectores tangenciales en el tiempo  $t_n$  hace que la linealización de estas cantidades no contribuya a la matriz de Hessiana. Esta suposición conduce a una formulación más simple y al mismo tiempo mantiene buenas propiedades de convergencia del problema no lineal. La linealización de  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$  en el paso de tiempo actual se puede incorporar sin modificaciones importantes en la formulación; sin embargo, este proceso resulta en una implementación más compleja. Luego, el vector de velocidad se obtiene de la derivación con respecto al tiempo de la Eq. (8) obteniéndose:

$$\mathbf{v}_{n+1} = v_{N,n+1}\mathbf{n}_{n+1} + v_{T1,n+1}\mathbf{T}_{1,n} + v_{T2,n+1}\mathbf{T}_{2,n} \quad (9)$$

Finalmente, para este elemento, los vectores de coordenadas generalizadas a nivel de posición y velocidad vienen dados por:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{x}_A^T \ \Psi_A^T \ \mathbf{x}_B^T \ \Psi_B^T]^T \quad \mathbf{v} = [\dot{\mathbf{x}}_A^T \ \dot{\Psi}_A^T \ \dot{\mathbf{x}}_B^T \ \dot{\Psi}_B^T]^T \quad (10)$$

donde  $\mathbf{x}_A$  y  $\mathbf{x}_B$  son las posiciones de los nodos  $A$  y  $B$  en la configuración actual, respectivamente y  $\Psi_A$  y  $\Psi_B$  son los vectores rotacionales incrementales de los nodos  $A$  y  $B$  en la configuración actual.

La primera y segunda derivada del lagrangiano presentado en las Ecs.(2,3) con respecto al vector de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$  genera los vectores de fuerzas interna y las matrices tangentes elementales a nivel de posición y de velocidad para cada elemento de contacto presentado anteriormente.

## 5. EJEMPLO NUMÉRICO

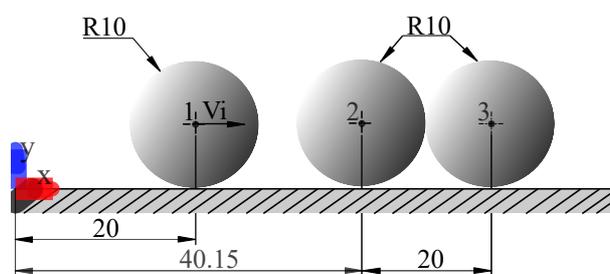


Figura 2: Condiciones iniciales para el ejemplo de múltiple impacto con fricción.

En este trabajo se presenta un ejemplo sencillo que permita evaluar la robustez y la precisión de los elementos de contacto presentados en la Sec. 4 cuando se produce colisiones de impacto múltiple, ver Fig.2. Se propusieron dos configuraciones diferentes, la primera corresponde al caso sin fricción, mientras que en la segunda se considera la fricción en todos los puntos de contacto. El ejemplo incluye tres esferas en contacto con un plano rígido. La esfera 1 tiene un movimiento de rodadura e impacta con las otras dos esferas (la 2 y la 3) que se encuentran en reposo y en contacto entre sí. Al comienzo de la simulación, la esfera 1 tiene una velocidad lineal de 1 m/s y una velocidad angular de 0 rad/s. Las tres esferas tienen una masa de  $M = 1$  kg, un momento de inercia másico de  $I = 40$  kgm<sup>2</sup>, la aceleración de la gravedad es  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup> y los coeficientes de restitución normal y tangencial son  $e_N = 1$  y  $e_t = 0$ , respectivamente. Los elementos de contacto esfera-plano y esfera-esfera presentados en la Sec. 4 se usan para modelar los contactos, en tanto que, para tener en cuenta las propiedades geométricas y mecánicas se incluye un elemento de cuerpo rígido a cada esfera siguiendo la formulación propuesta por [Géradin y Cardona \(2001\)](#). Finalmente, las simulaciones se computan con una tolerancia normalizada de  $1 \times 10^{-4}$ , un paso de tiempo de  $1 \times 10^{-3}$  s y un tiempo total de simulación de 0,7 s.

La solución numérica para la configuración sin fricción se muestra en la Fig. 3. A partir de esa figura, se observa que la esfera 1 impacta contra las esferas 2 y 3 en el tiempo  $t = 0,15$  s. Después del impacto, las esferas 1 y 2 permanecen en reposo mientras la esfera 3 se mueve con la misma velocidad que tenía la esfera 1 antes del impacto. Las rotaciones son cero durante todo el tiempo de simulación debido al hecho de que  $\mu = 0$  y no es posible la rotación de las esferas en esta situación.

En la segunda configuración, se considera la fricción para todos los puntos de contacto con  $\mu = 0,3$ . La solución numérica para este caso se representa en la Fig. 4, donde la esfera 1 está rodando y deslizando simultáneamente hasta el tiempo 0,1 s, donde en ese intervalo de tiempo se observa una función cuadrática del desplazamiento. Luego, el desplazamiento cambia a una función lineal hasta un tiempo de 0,2 s, lo que indica que, en este último período de tiempo el movimiento corresponde a rodadura pura. Un análisis análogo se puede hacer con los ángulos de rotación, ver Fig. 4-b. En esta configuración, después del impacto, se observa un comportamiento similar a los desplazamientos obtenidos en el caso sin fricción. Sin embargo,

las esferas 1 y 2 se mueven ligeramente hacia la izquierda y la esfera 3 hacia la derecha pero mucho más lentamente, ver Fig. 4-a-b. Este comportamiento es consecuencia de los efectos de la fricción.

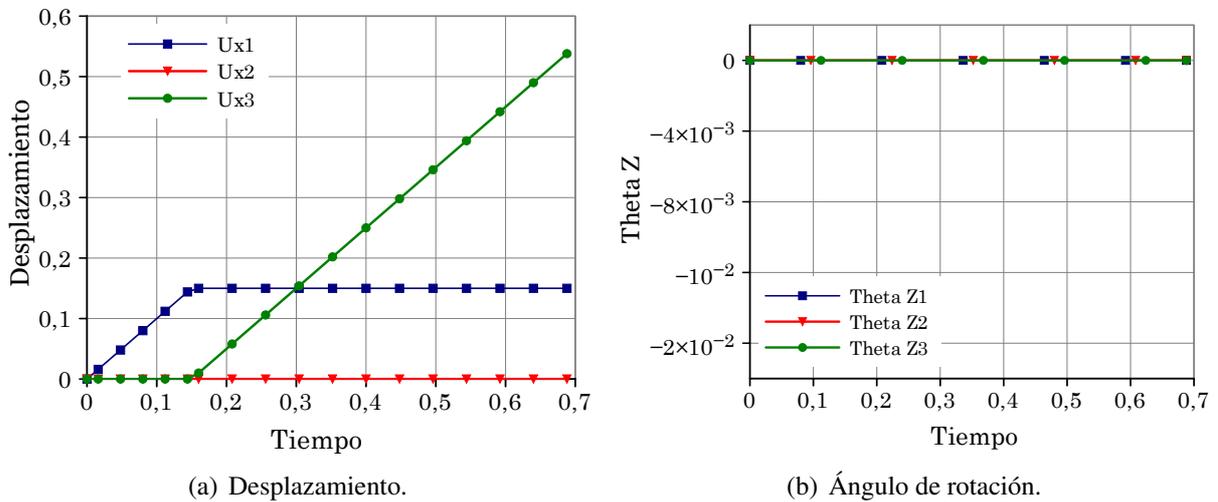


Figura 3: Solución numérica para el caso sin fricción.

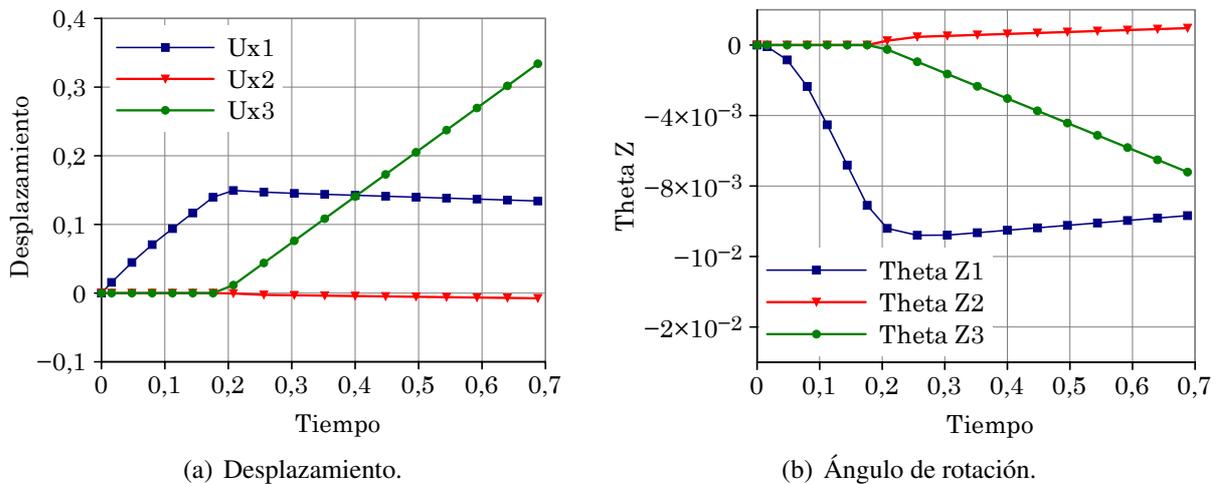


Figura 4: Solución numérica para el caso con fricción.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo, se presentan dos nuevos elementos de contacto para la simulación de problemas de colisión de múltiple impacto de cuerpos rígidos esféricos. Las soluciones numéricas muestran que estos elementos pueden capturar con precisión un movimiento de fricción deslizando general. La integración de las ecuaciones de movimiento del problema de contacto por fricción se realiza utilizando el esquema de integración temporal  $\alpha$  generalizado no suave basado en un enfoque lagrangiano aumentado. Las restricciones de contacto se cumplen de forma exacta para los niveles de posición y velocidad, es decir, no hay penetración entre los cuerpos en contacto. Como trabajo a futuro se pretende utilizar los elementos presentados en este trabajo en el desarrollo de un elemento tipo rodamiento.

## 7. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido financiamiento de la Universidad Tecnológica Nacional a través de los proyectos AMECAFE0008102TC “Análisis numérico de vibraciones originadas en rodamientos por medio de una aproximación dinámica no suave” y UTI4790TC “Análisis numérico de problemas estructurales dinámicos por medio de una aproximación dinámica no suave”.

## REFERENCIAS

- Alart P. y Curnier A. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92(3):353–375, 1991.
- Brüls O., Acary V., y Cardona A. Simultaneous enforcement of constraints at position and velocity levels in the nonsmooth generalized- $\alpha$  scheme. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 281:131–161, 2014.
- Chung J. y Hulbert G. A robust nonsmooth generalized- $\alpha$  scheme for flexible systems with impacts. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 60(2):371–375, 1993.
- Cosimo A., Cavalieri F., Cardona A., y Brüls O. On the adaptation of local impact laws for multiple impact problems. *Non-linear Dynamics*, 2020. Doi:10.1007/s11071-020-05869-z.
- Cosimo A., Galvez J., Cavalieri F., Cardona A., y Brüls O. A robust nonsmooth generalized- $\alpha$  scheme for flexible systems with impacts. *Multibody System Dynamics*, 48, 2019. doi: 10.1007/s11044-019-09692-2.
- Gérardin M. y Cardona A. *Flexible Multibody Dynamics*. John Wiley and Sons, 2001.
- Hairer E., Norsett S.P., y Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations*. 2010.
- Johnson K.L. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985. doi:10.1017/CBO9781139171731.
- Tasora A. y Anitescu M. A complementarity-based rolling friction model for rigid contacts. *Meccanica*, 48(7):1643–1659, 2013.