

DINÁMICA DE VIGA SOMETIDA A INESTABILIDAD DE FLUJO DE FUGA

BEAM DYNAMICS UNDER LEAKAGE FLOW INSTABILITY

Facundo Castañon, Julián Espeche, Martín C. Saravia y Sebastián P. Machado

Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP), Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, 8000, Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina, gimap@frbb.utn.edu.ar, <http://www.frbb.utn.edu.ar/frbb/institucional/scyt/centros-grupos-utn/gimap>

Palabras clave: Vibraciones Inducidas por Flujo, Flujo de fuga, Flameo, Interacción fluido estructura, Análisis lineal, Análisis no lineal.

Resumen. El presente trabajo estudia la dinámica de una viga cantilever sometida a vibraciones inducidas por flujo de fuga bajo diferentes condiciones de vínculo y carga. Empleando un modelo bidimensional de interacción fluido-estructura, se realiza un análisis lineal para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema y llegar al problema de autovalores. Esto permite conocer los límites de flutter para las configuraciones empotrado libre y simplemente apoyado. Luego se presenta un modelo no lineal para estudiar la evolución temporal del sistema con dichas configuraciones y la influencia de una carga no lineal.

Keywords: Flow Induced Vibrations, Leakage flow, Flutter, Fluid-Structure Interaction, Linear analysis, Non linear analysis.

Abstract. This work studies the dynamic of a cantilever beam under leakage flow induced vibrations with different boundary conditions and loads. Using a fluid-structure bidimensional model, we perform a linear analysis to get the equations of motion and to obtain an eigenvalue problem. This allows us to know the flutter limits of the cantilever and simple supported beams. Then, a nonlinear model is presented to study the system temporal evolution with the mentioned configurations and the action of a nonlinear force.

1. INTRODUCCIÓN

La dinámica de elementos estructurales en flujos internos ha sido abordada por numerosos autores (Inada y Hayama, 1988, 1990; Nagakura y Kaneko, 1991). Dentro de la misma encontramos la inestabilidad de flujo de fuga o inestabilidad tipo leakage flow, caso particular de flujo interno axial, donde las dimensiones son reducidas y la flexibilidad es finita. Estas características permiten el desarrollo de grandes fluctuaciones locales de velocidad y presión, generando vibraciones. El objetivo principal de su estudio es hallar los límites para los cuales se verifica el fenómeno de flutter o flameo. Diversos aspectos sobre su dinámica no han sido estudiados aún, como por ejemplo el efecto de las condiciones de vínculo del sólido elástico y cargas aplicadas al mismo.

En cuanto al estudio de inestabilidades de flujo, el avance computacional ha permitido realizar simulaciones directas de la interacción fluido estructura. Diversos trabajos pueden encontrarse sobre la aplicación de algoritmos bidimensionales para estudiar la estabilidad de cuerpos elásticos en flujos internos (Shoel y Mittal, 2016). Recientemente Tosi y Colonius (2019) utilizaron la Dinámica Computacional de Fluidos (CFD) para modelar recolectores piezoeléctricos de energía basados en LFI utilizando el método de contorno embebido.

Sin embargo, el uso de este tipo de simulaciones representa un gran coste computacional a la hora de capturar los límites de la inestabilidad, y la multiplicidad de parámetros involucrada lo acentúa. Otro enfoque, más asequible pero menos exacto debido a sus simplificaciones, es el analítico: desarrollar las ecuaciones de movimiento simplificadas para obtener las fuerzas hidrodinámicas y los desplazamientos del sólido. Guo y Paidoussis (2000) emplearon un modelo inviscido para predecir flutter en flujos internos simétricos.

Cisonni et al. (2017) demostraron que el Número de Reynolds juega un papel muy importante en la determinación de los límites de flutter, indicando que para flujos de bajo Re es necesario un enfoque viscoso. Como respuesta a este problema, Nagakura y Kaneko (1991), y Wu y Kaneko (2005) implementaron modelos con viscosidad para obtener las fuerzas de fluido sobre elementos elásticos en flujos internos.

Este trabajo toma la formulación de Tosi (2018) para analizar la influencia de las condiciones de borde del elemento flexible en la dinámica del sistema. Resolviendo el problema de autovalores podemos comparar los límites de flutter predichos para las diferentes configuraciones de vínculo propuestas. A su vez, presentamos una formulación no lineal, partiendo del modelo de Tosi, que es resuelta numéricamente para estudiar la forma en la que la viga se deforma y su amplitud. Esto se realiza en el marco del desarrollo de un dispositivo recolector de energía electromagnético que aprovecha la inestabilidad mencionada. El análisis de diferentes condiciones de borde se realiza para encontrar la más adecuada, y la carga adicionada emula una rigidez electromagnética.

2. MODELO DE FLUJO AXIAL

El modelo empleado para flujo axial está basado en la formulación de Tosi (2018). La geometría mostrada en la Fig. 1 y los parámetros de la Tabla 1 se corresponden con los del recolector de energía propuesto por Sherrit et al. (2015). El modelo consiste en una viga inmersa en un flujo que transcurre por un ducto de geometría variable.

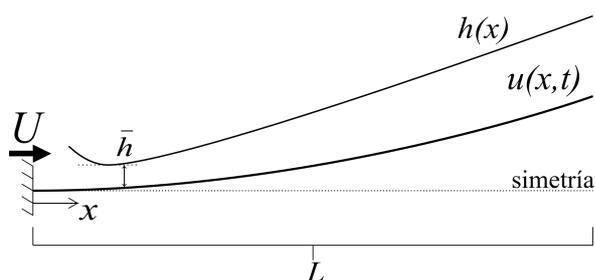


Figura 1: Modelo matemático

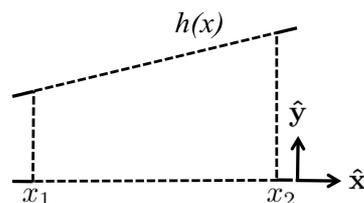


Figura 2: Volumen de Control empleado para determinar las ecuaciones de la dinámica de flujo

variable	descripción	Dimensión
$u(x, t)$	desplazamiento de la viga	l
x	coordenada longitudinal de la viga	l
$h(x)$	función de geometría del ducto	l
t	tiempo	t
U	velocidad de flujo	$l \cdot t^{-1}$
h_b	espesor de la viga	l
b	ancho de la viga	l
L	largo de la viga	l
ρ_f	densidad del fluido	$m \cdot l^{-3}$
ρ_s	densidad de la viga	$m \cdot l^{-3}$
E	módulo de Young	$m \cdot l^{-1} \cdot t^{-2}$
I	momento de inercia de la viga	l^4
m	masa por unidad de longitud de la viga	$m \cdot l^{-1}$
c	amortiguamiento de la viga	$m \cdot t^{-1} \cdot l^{-1}$
\bar{h}	distancia entre viga y ducto	l
ζ	coeficiente de pérdida de flujo	ND

Tabla 1: Variables del modelo

2.1. Ecuaciones de movimiento del sólido

Asumimos que el modelo de viga de Bernoulli-Euler es adecuado para representar la dinámica del recolector, por lo que la deformación del sólido viene dada por:

$$m\ddot{u}(x, t) + c\dot{u}(x, t) + EIu''''(x, t) = q(x), \quad (1)$$

donde $q(x)$ comprende tanto las fuerzas hidrodinámicas del modelo como aquellas agregadas para analizar el comportamiento del sistema, $(\dot{\quad})$ implica derivación respecto del tiempo y (\prime) derivación respecto de la coordenada espacial.

Las condiciones de borde son determinadas por la vinculación de la viga. Para este trabajo, tomamos dos condiciones de vínculo: empotrada libre y simplemente apoyada.

2.2. Ecuaciones de movimiento del fluido

Para desarrollar las ecuaciones de movimiento del fluido consideramos el volumen de control ilustrado en la Fig.2, que corresponde a una porción del canal formado por la viga y la superficie

del ducto. Aplicando la conservación de masa obtenemos (Tosi, 2018):

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

donde

$$Q_x = \int_u^h U_x dy \quad (3)$$

es el caudal.

Análogamente, aplicamos la conservación de cantidad de movimiento. Sólo tomamos la componente \hat{x} y sustituimos Q_x . Con la expresión obtenida usamos la teoría de lubricación para relacionar todos los términos con Q_x y $u(x, t)$. Así se arriba a la siguiente expresión (Tosi, 2018)

$$\frac{\partial Q_x}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_x^2}{h-u} \right) = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} (h-u) - \frac{fr}{4} \frac{Q_x^2}{(h-u)^2} \quad (4)$$

que permite obtener la presión del fluido sobre la viga. Aquí ξ_x es un factor que caracteriza el perfil de velocidad según \hat{y} , y fr es el factor de fricción de Fanning, usado para modelar la fuerza viscosa.

La formulación lineal empleada para arribar al problema de autovalores es la presentada por Tosi (2018), quien a su vez se basó en los trabajos de Nagakura y Kaneko (1991) y Wu y Kaneko (2005) para obtener las fuerzas hidrodinámicas.

3. FORMULACIÓN NO LINEAL

La formulación no lineal parte de las ecuaciones de balance de masa y momento de Tosi (2018). En esta formulación no lineal integramos las ecuaciones de balance entre 0 y x_1 ; siendo x_1 una variable ficticia.

3.1. Proyección modal

Asumimos que el desplazamiento del sólido puede expresarse como

$$u(x, t) \simeq \sum_{i=1}^N a_i(t) g_i(x) = \mathbf{g}^T(x) \mathbf{a}(t). \quad (5)$$

Por conveniencia, definimos la función de tamaño del canal superior como

$$s^t(x, t) = h^t(x) - u(x, t) = h^t(x) - \mathbf{g}^T \mathbf{a}, \quad (6)$$

mientras que la correspondiente al inferior, $s^b(x, t)$, invierte los signos e involucra a $h^b(x)$. Aquí t indica *top* o superior y b *bot* o inferior. Introduciendo la expansión modal en la Ec.1 obtenemos la siguiente expresión, dada en forma matricial

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_s \mathbf{a} = \mathbf{q}(x), \quad (7)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s &= m \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{bmatrix} & \mathbf{C}_s &= c \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_s &= EI \begin{bmatrix} g_1'''' & g_2'''' & \cdots & g_n'''' \end{bmatrix} & \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (8)$$

3.2. Balance de masa y cantidad de movimiento del fluido

3.2.1. Balance de masa

Si integramos el balance de masa empleando la función de tamaño del canal obtenemos

$$\int_0^{x_1} \left(\frac{\partial s(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q_x(x, t)}{\partial x} \right) dx = 0. \quad (9)$$

Esta integral permite obtener

$$Q_x(x_1, t) = Q_0(t) - \dot{\hat{s}}(x_1, t), \quad (10)$$

siendo

$$\dot{\hat{s}}(x_1, t) = \int_0^{x_1} \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} dx. \quad (11)$$

3.2.2. Balance de de cantidad de movimiento

Reordenando e integrando la Ec. 4 para eliminar la dependencia de la variable x tenemos:

$$\int_0^{x_2} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} dx = \int_0^{x_2} \left\{ -\rho_f \left[\frac{1}{s(x, t)} \frac{\partial Q_x(x, t)}{\partial t} + \frac{\xi_x}{s(x, t)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_x^2(x, t)}{s(x, t)} \right) + \frac{fr}{4} \frac{Q_x^2(x, t)}{s(x, t)^3} \right] \right\} dx. \quad (12)$$

Puede notarse que

$$\int_0^{x_2} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} dx = p(x_2, t) - p(0, t). \quad (13)$$

Teniendo esto en cuenta, usamos notación compacta e inyectamos la expresión de flujo obtenida del balance de masa en el miembro derecho de la ecuación, para obtener tres términos:

$$p = p_0 - \rho_f \int_0^{x_2} \left[\frac{1}{s} \dot{Q}_x + \frac{\xi_x}{s} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_x^2}{s} \right) + \frac{fr}{4} \frac{Q_x^2}{s^3} \right] dx. \quad (14)$$

3.3. Forma implícita de la ecuación de presión

La ecuación de presión puede escribirse sin explicitar la función de tamaño del canal, lo que nos habilita a expresar las ecuaciones para cualquier canal. Definimos los operadores transitorio, convectivo y viscoso, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_t(f(x, t)) &= \rho_f \int_0^{x_2} s^{-1} f(x) dx, \\ \mathbb{W}_c(f(x, t)) &= \rho_f \xi_x \int_0^{x_2} \frac{1}{s} (s^{-1} f(x))' dx, \\ \mathbb{W}_v(f(x, t)) &= \frac{fr}{4} \int_0^{x_2} s^{-3} f(x) dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Haciendo uso de estos operadores podemos expresar la ecuación de presión en una forma más compacta

$$p = p_0 - \left[\mathbb{W}_t (\dot{Q}_x) + \mathbb{W}_c (Q_x^2) + \mathbb{W}_v (Q_x^2) \right] \quad (16)$$

3.3.1. Condiciones de borde del problema hidrodinámico

Para resolver las Ec.16 y Ec.9 son necesarias dos condiciones de borde. Adoptamos la forma empleada para estudiar inestabilidades de tipo leakage-flow introducidas por Nagakura y Kaneko (1991) e Inada y Hayama (1988). En la entrada del flujo tenemos:

$$p(0, t) = p_i - \rho_f \frac{\zeta_i}{2} \left(\frac{Q_0 - \dot{s}_0}{s_0} \right)^2 = p_i - \rho_f \frac{\zeta_i}{2} \left(\frac{Q_0}{s_0} \right)^2, \quad (17)$$

donde

$$\dot{s}_0 = \int_0^L \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} dx = 0; \quad (18)$$

mientras que en la salida:

$$p(L, t) = p_o + \rho_f \frac{\zeta_o}{2} \left(\frac{Q_0 - \dot{s}_L}{s_L} \right)^2. \quad (19)$$

donde p_i y p_o son las presiones de entrada y salida del sistema.

Inyectando la condición de borde de entrada en la ecuación de presión (Ec.16) y evaluando para $x = L$ obtenemos

$$p(L, t) = p_i - \rho_f \frac{\zeta_i}{2} \frac{Q_0^2}{s_0^2} - \left[\mathbb{W}_t^L (\dot{Q}_x) + \mathbb{W}_c^L (Q_x^2) + \mathbb{W}_v^L (Q_x^2) \right], \quad (20)$$

donde $\mathbb{W}^L (f(x, t))$ implica $\mathbb{W} (f(x, t))|_{x=L}$.

Esto debe ser igual a la condición de salida. Igualando ambas ecuaciones, sustituyendo $Q_x(L, t) = Q_0(t) - \dot{s}_L$ en el operador transitorio y reordenando términos, arribamos a una ecuación diferencial para \dot{Q}_0 :

$$\dot{Q}_0 = \frac{1}{\mathbb{W}_t^L(1)} \left[-\Delta p - \frac{\rho_f}{2} \left(\zeta_o \frac{Q_0^2}{s_L^2} + \zeta_i \frac{Q_0^2}{s_0^2} \right) - \mathbb{W}_c^L (Q_x^2) - \mathbb{W}_v^L (Q_x^2) + \mathbb{W}_t^L (\ddot{s}) \right]. \quad (21)$$

3.4. Ecuaciones del sólido

Tomamos la Ec.7 e introducimos la presión del fluido y una carga hipotética

$$\mathbf{M}_s^T \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}_s^T \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_s^T \mathbf{a} = -\Delta q(x) + w(x) = -[p^t(x) - p^b(x)] + w(x), \quad (22)$$

donde Δ indica *top - bot*.

Inyectamos la distribución de presión en esta ecuación para luego expandir el operador $\mathbb{W}(Q_x)$. Así llegamos a la siguiente expresión en forma compacta:

$$\mathbf{M}_s^T \ddot{\mathbf{a}} = -\mathbf{C}_s^T \dot{\mathbf{a}} - \mathbf{K}_s^T \mathbf{a} + F + w(x), \quad (23)$$

siendo

$$F = \Delta \left[p_i - \frac{1}{2} \rho_f \zeta_i \frac{Q_0^2}{s_0^2} - \mathbb{W}_c^L(Q_x^2) - \mathbb{W}_v^L(Q_x^2) - \mathbb{W}_t^L(\ddot{s}) \right]. \quad (24)$$

La función $w(x)$ refiere a una hipotética fuerza electromagnética, que en este caso, adquiere la forma de un término no lineal cúbico de tipo atractivo:

$$w(x) = -\alpha u(x, t)^3. \quad (25)$$

4. RESULTADOS

En esta sección exponemos los resultados obtenidos de los modelos lineal y no lineal. En el caso del primero, comparamos la evolución de los autovalores para las condiciones de vínculo propuestas en virtud de identificar los límites de flutter. Con el modelo no lineal determinamos la respuesta temporal del sistema con las configuraciones mencionadas y analizamos la influencia de la fuerza no lineal, empleando un esquema de resolución explícito. Tanto el modelo lineal como el no lineal fueron implementados en lenguaje Python.

4.1. Modelo lineal

Los valores elegidos para ejecutar los cálculos son los presentados por [Nagakura y Kaneko \(1991\)](#), que también emplea [Tosi \(2018\)](#), y se muestran en la Tabla 2. La geometría del ducto es constante. Resolvemos el problema de autovalores tomando al caudal como parámetro de bifurcación, haciendo variar el mismo desde 0 hasta $5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$.

parámetro	valor	unidad
ρ_f	1.2	kg/m ³
ρ_s	8.78E3	kg/m ³
E	1.10E11	Pa
h_b	2.0E-04	m
b	1.0E-01	m
L	2.0E-01	m
h	2.5E-03	m
ζ_i	1	ND
ζ_o	0	ND

Tabla 2: Parámetros empleados en el modelo lineal.

La Fig.3 demuestra que la implementación del modelo es capaz de reproducir el comportamiento que describe del autor mencionado, siendo comparable con la Figura 3.1 presente en [Tosi \(2018\)](#). Las diferencias que pueden notarse en los valores se deben a que la matriz 2.96 de dicho trabajo presenta un error en el ordenamiento de los último dos términos de las últimas dos filas. Además, el amortiguamiento no está claramente descrito, por lo que puede haber discrepancia en el tratamiento del mismo. En el presente trabajo se emplea un amortiguamiento modal.

En la Fig.5 observamos la evolución de la componente real de los autovalores del sistema para la condición empotrado libre. Los autovalores asociados a los modos 2, 3 y 4 correspondientes al sólido evidencian la aparición de bifurcaciones de Hopf, dado que la parte real de

los mismos experimenta un cambio de signo, de negativo a positivo, con parte imaginaria no nula; lo cual conlleva a la aparición de oscilaciones en el sistema. Los valores de caudal para los cuales se producen dichas bifurcaciones son $7,5 \cdot 10^{-3} m^2/s$, $1,4 \cdot 10^{-2} m^2/s$ y $3,15 \cdot 10^{-2} m^2/s$.

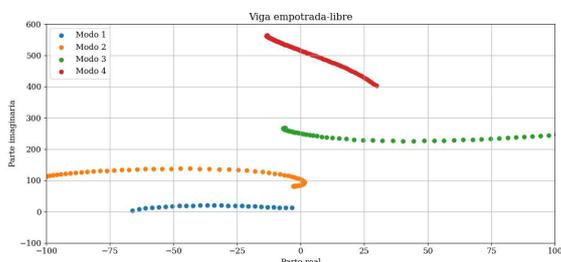


Figura 3: Evolución de los autovalores de la configuración empotrada.

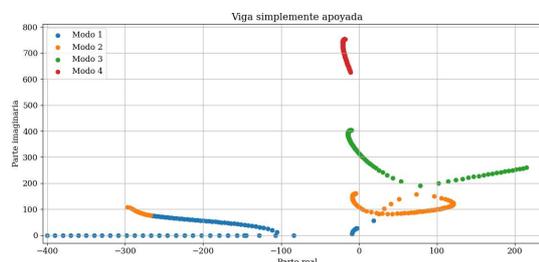


Figura 4: Evolución de los autovalores de la configuración simplemente apoyada.

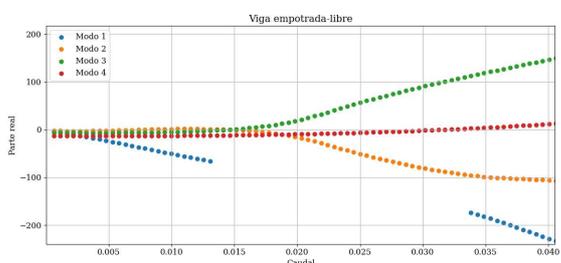


Figura 5: Parte real de los autovalores de la configuración empotrada.

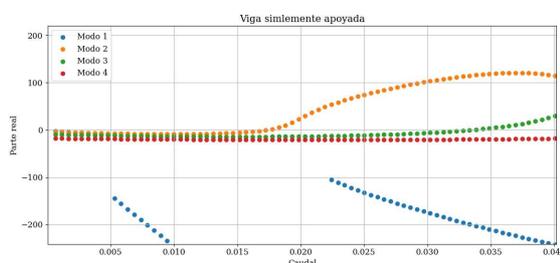


Figura 6: Parte real de los autovalores de la configuración simplemente apoyada.

En la Fig.4 presentamos la evolución de los autovalores para la segunda condición de vínculo propuesta, simplemente apoyada. Podemos notar que el autovalor correspondiente al modo 1 posee componente imaginaria nula para un amplio rango de caudal. Esto indica la presencia de una bifurcación cuasiestática o divergencia. Analizando la evolución de la componente real (Fig.6) vemos que la viga también verifica bifurcaciones de Hopf en los modos 2 y 3, aunque el valor de caudal donde aparecen es mayor comparado con el caso anterior. Los valores límites de caudal son $1,7 \cdot 10^{-2} m^2/s$ y $3,25 \cdot 10^{-2} m^2/s$, respectivamente. La gráfica presenta discontinuidades como resultado del entrecruzamiento modal. Siendo que la rutina de ploteo grafica los autovalores en orden creciente, si sus valores cambian de modo que se altera dicho orden, se presentan estas discontinuidades.

4.2. Modelo no lineal

Se ejecutaron los cálculos del modelo no lineal para las condiciones de vínculo propuestas y fuerza no lineal nula, haciendo variar el parámetro de presión de entrada en función del tiempo. El parámetro \bar{h} se modificó respecto del modelo lineal, asignándole un valor de $5 \cdot 10^{-3}$, para evitar una región que presenta una dinámica con más de una rama estable, y poder capturar la respuesta del sistema con el algoritmo desarrollado. Los demás parámetros no se alteraron. Al igual que en el caso lineal, la geometría del ducto es constante. Computamos la velocidad de flujo en los canales superior e inferior que separa la viga, el desplazamiento y la deformación de la misma.

Para el caso de la viga empotrada, la deformada mostrada en la Fig.11 no exhibe un único modo, sino que el modo de vibración es una combinación de los modos naturales, con predo-

minancia del primero y segundo. El valor de velocidad de flujo a partir del cual se desarrolla flutter se corresponde con el hallado por Nagakura y Kaneko (1991), siendo aproximadamente $3,5 \text{ m/s}$ o $1,75 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$ (ver Fig.7). A partir de dicho valor se aprecian oscilaciones estables en la Fig.9, con una amplitud de $3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

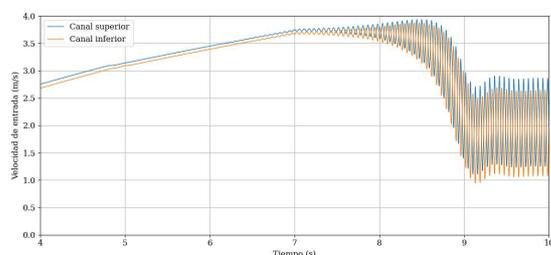


Figura 7: Velocidad de entrada del flujo en los canales de la configuración empotrada.

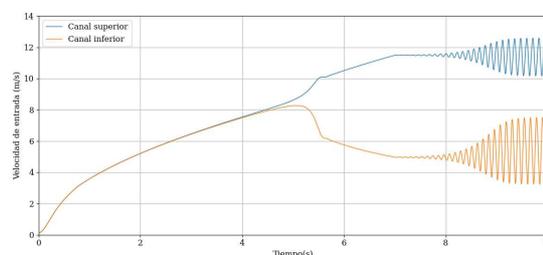


Figura 8: Velocidad de entrada del flujo en los canales de la configuración simplemente apoyada.

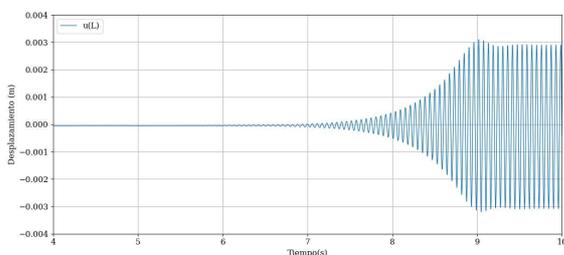


Figura 9: Desplazamiento del extremo libre de la configuración empotrada.

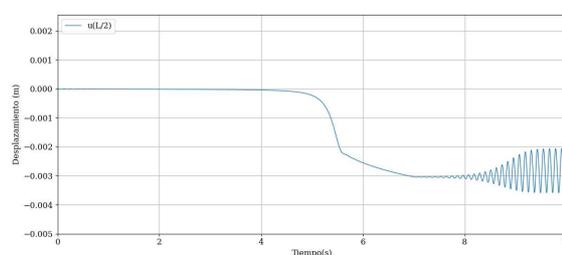


Figura 10: Desplazamiento de la sección media de la configuración simplemente apoyada.

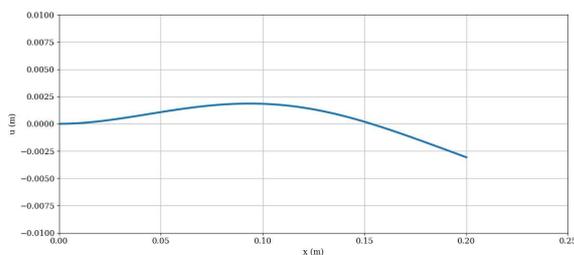


Figura 11: Modo de vibración de la configuración empotrada.

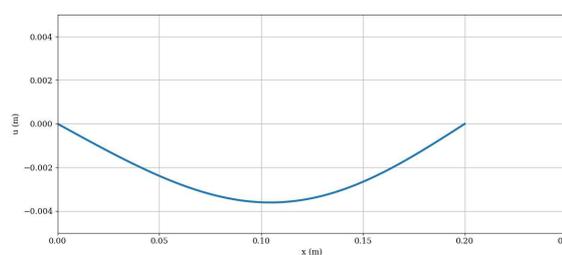


Figura 12: Modo de vibración de la configuración simplemente apoyada.

La Fig.10 muestra el desplazamiento de la viga simplemente apoyada. Después de los 4 segundos de simulación aparece la divergencia predicha por el modelo lineal, con una velocidad de flujo de 8 m/s (ver Fig.8). A partir de la misma aparecen las oscilaciones estables de amplitud $7,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. La diferencia entre las velocidades se debe a que los canales superior e inferior dejan de ser simétricos como consecuencia de la divergencia. Como en el caso de la viga empotrada, en la Fig.12 no observamos un único modo en la respuesta, aunque el primero predomina.

4.2.1. Fuerza no lineal

Para el cálculo con las fuerza no lineal, realizamos una caracterización cualitativa de su influencia en la configuración empotrada libre con los parámetros de la sección anterior. Em-

pleamos una fuerza desestabilizadora, es decir; si la viga sufre un desplazamiento positivo, la fuerza también lo es. Esto responde al diseño pensado, donde la viga se construye con un material ferromagnético y se encuentra inmersa en un campo magnético creado por imanes ubicados sobre y debajo de la misma, constituyendo las superficies de la tobera.

Diferentes valores del parámetro α fueron usados ya que aún no determinamos la magnitud de la fuerza generada por el campo propuesto en el diseño. Los cálculos demostraron que la aparición de oscilaciones estables se verifica con valores del orden de $1 \cdot 10^9$; y no se produce divergencia (Fig. 13). Esto se verifica con valores de caudal cercanos a $1,75 \cdot 10^{-2} m^2/s$. El orden elevado del parámetro responde a la proporcionalidad de la fuerza con el desplazamiento al cubo. Con órdenes menores, las fuerzas hidrodinámicas dominan la respuesta. Con órdenes mayores, la solución diverge debido a la dominancia de la fuerza no lineal en la dinámica del sistema, como puede notarse en la Fig.14.

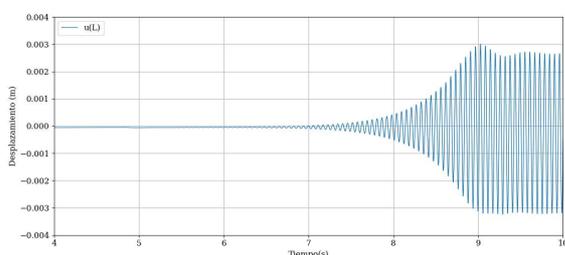


Figura 13: Desplazamiento con fuerza no lineal de orden $1 \cdot 10^9$.

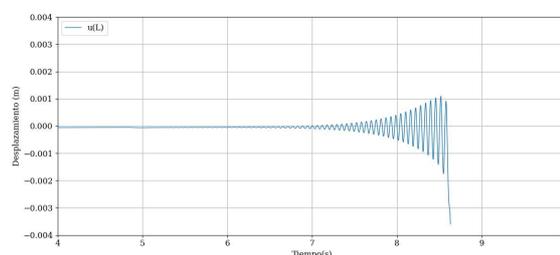


Figura 14: Desplazamiento con fuerza no lineal de orden $1 \cdot 10^{10}$.

5. CONCLUSIONES

Durante el desarrollo del presente artículo expusimos los resultados de emplear diferentes condiciones de vínculo en el modelo desarrollado por Tosi (2018), analizando su influencia en los límites de flutter. Posteriormente, presentamos un modelo no lineal para la resolución del problema de leakage flow e implementamos las condiciones de borde propuestas. Estudiamos la dinámica observada y la correlacionamos con la predicha por el modelo lineal. Por último, añadimos una fuerza no lineal a la configuración empotrado libre para describir su impacto en el comportamiento del sistema.

Los resultados del modelo lineal demostraron que ambas configuraciones propuestas presentan bifurcaciones de Hopf, por lo que serían útiles en el diseño del recolector de energía. Además, la configuración simplemente apoyada presentó divergencia. El modelo no lineal confirmó la dinámica predicha en el caso anterior. Se evidenciaron oscilaciones estables en ambas configuraciones y divergencia en la viga simplemente apoyada. Esto último es un factor a tener en cuenta a la hora de utilizar el modelo lineal para predecir los límites de flutter, ya que sería necesario calcular la evolución de los autovalores a partir de la divergencia para obtener valores ajustados con la realidad; marcando la necesidad de implementar esta capacidad en el algoritmo. Tanto la divergencia de la viga simplemente apoyada, como su límite de flutter ubicado en un valor de caudal mayor respecto de la configuración empotrado libre y su menor amplitud de vibración son factores que serán decisivos a la hora de determinar su conveniencia. La posibilidad técnica de diseñar un dispositivo que responda a esta configuración será objeto de análisis a posteriori.

En cuanto a la fuerza no lineal, demostramos que si el parámetro α se encuentra por debajo

del orden de $1 \cdot 10^{10}$ se verifican oscilaciones estables sin divergencia. Por ende, el diseño que implica esta fuerza es viable. A futuro, el cálculo de campo magnético y las fuerzas resultantes permitirá desarrollar un modelo más realista.

REFERENCIAS

- Cisonni J., Lucey A., Elliott N., y Heil M. The stability of a flexible cantilever in viscous channel flow. *Journal of Sound and Vibrations*, 396:186–202, 2017.
- Guo C. y Paidoussis M. Stability of rectangular plates with free side-edges in two-dimensional inviscid channel flow. *Journal of Applied Mechanics*, 67:171–176, 2000.
- Inada F. y Hayama S. A study on leakage-flow-induced vibrations. *Japan Society of Mechanical Engineers International Journal*, 31:39–47, 1988.
- Inada F. y Hayama S. A study on leakage-flow-induced vibrations. part 1: fluid-dynamic forces and moments acting on the walls of a narrow tapered passage. *Journal of Fluids and Structures*, 4:395–412, 1990.
- Nagakura H. y Kaneko S. The stability of a cantilever beam subjected to one-dimensional leakage flow. *Transactions of the 11th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, 1991.
- Sherrit S., Lee H., Walkemeyer P., Winn T., Colonius T., y Tosi L. Fluid flow nozzle energy harvesters. *SPIE Smart Structures and Materials + Nondestructive Evaluation and Health Monitoring. International Society for Optics and Photonics*, 2015.
- Shoel K. y Mittal R. Flutter instability of a thin flexible plate in a channel. *Journal of Fluid Mechanics*, 786:29–46, 2016.
- Tosi L. Fluid-structure stability in an internal flow energy harvester. *Thesis*, 2018.
- Tosi L. y Colonius T. Modeling and simulation of a fluttering cantilever in channel flow. *Journal of Fluids and Structures*, 2019.
- Wu X. y Kaneko S. Linear and nonlinear analyses of sheet flutter induced by leakage flow. *Journal of Fluids and Structures*, 20:927–948, 2005.