

UN ENFOQUE DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL PROBLEMA GENERALIZADO DE ASIGNACIÓN DE TRÁFICO

A FINITE ELEMENT APPROACH FOR THE GENERALIZED TRAFFIC ASSIGNMENT PROBLEM

Patricia N. Dominguez^{a,b}, Víctor H. Cortínez^{a,b,c} y Cecilia I. Stoklas

^a*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada (CIMTA), Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, vcortine@frbb.utn.edu.ar*

^b*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, pdoming@uns.edu.ar*

^c*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnica, CONICET*

Palabras clave: Asignación de tráfico, demanda elástica, modelo reducido, enfoque Physarum, Elementos Finitos, optimización.

Resumen. En el presente trabajo se propone un eficiente enfoque de solución para el problema generalizado de asignación de tráfico urbano, en condiciones de congestión, basado en una analogía biológica con el comportamiento de aprovisionamiento del moho Physarum polycephalum. Se desarrolla además una formulación de elementos finitos con el propósito de reducir el número de incógnitas del problema. Se presenta la formulación matemática de ambos modelos y ejemplos numéricos para redes con demanda elástica que ilustran la buena concordancia entre ambos métodos, detallado y reducido.

Keywords: Traffic assignment, elastic demand, reduced model, Physarum approach, Finite Elements, optimization.

Abstract. In this paper, a solution approach for the generalized traffic assignment problem in congested conditions is presented. This approach is based on a biological analogy with the foraging behavior of the slime mold Physarum polycephalum. In addition, a finite element formulation is developed for reducing the number of unknowns. This document presents the mathematical formulation for both models and numerical examples for traffic networks with elastic demand. The numerical results show the efficiency of both methodologies.

1 INTRODUCCIÓN

La estimación de la elección de rutas y los flujos vehiculares esperados en cada tramo de una red de transporte es muy importante para estudios de planificación urbana. Esto se conoce como problema de asignación de tráfico (TAP, por sus siglas en inglés) y, en condiciones de equilibrio estático, se basa en el primer principio de Wardrop (Sheffi, 1984). Uno de los enfoques más utilizados para abordar tal cuestión corresponde a la formulación de Beckmann, que constituye un problema de optimización convexo cuyas incógnitas son los flujos de cada arco. Esta formulación puede ser resuelta adecuadamente mediante el método de Frank-Wolfe. La carga computacional para resolver este problema se incrementa con la cantidad de nodos de la red. Consecuentemente, el tiempo de cálculo involucrado para redes grandes es muy importante, especialmente en el contexto de diseño óptimo de la red de transporte urbano. Por tal razón, importantes esfuerzos de investigación fueron dirigidos al desarrollo de metodologías más eficientes para resolver el problema.

Algunas investigaciones se orientaron a mejorar la convergencia del algoritmo de Frank-Wolfe (Mitradjeva y Lindberg, 2013). También se han desarrollado algoritmos basados en trayectorias que ofrecen una convergencia más rápida respecto a los basados en arcos aunque tienen mayores requerimientos de memoria computacional (Florian et al., 2009).

Una manera de mejorar la eficiencia de los enfoques para resolver el problema de asignación es la utilización de computación paralela (Lotito, 2006, Jafari et al. 2017).

En los últimos años se ha desarrollado un modelo, basado en una analogía biológica, denominado Physarum para resolver diferentes problemas de optimización de interés científico y tecnológico (Tero et al., 2007). El algoritmo imita la estrategia de aprovisionamiento del moho Physarum polycephalum y se ha aplicado eficientemente a la determinación del camino más corto en redes, a la reducción de costos en redes de transporte y comunicaciones terrestres. Muy recientemente se ha propuesto la aplicación del enfoque Physarum al problema de asignación de tráfico de equilibrio de usuario siguiendo la formulación de Beckmann (Zang, 2018; Xu et al., 2018). En tales trabajos se ha mostrado que dicho modelo puede tener una eficiencia mayor que diversos enfoques clásicos basados en Frank Wolfe. Por su parte, Cortínez y Dominguez (2018) han demostrado que el modelo Physarum aplicado al equilibrio de usuario puede considerarse como una forma iterativa para resolver el TAP basado en una formulación en tiempos de viaje previamente desarrollada por los autores (Cortínez y Dominguez, 2017).

A pesar de los avances realizados, la carga computacional sigue siendo muy importante en el caso del diseño óptimo de grandes redes de transporte. Por dicha razón, varias investigaciones han sido dirigidas a la reducción del número de incógnitas. Algunas ideas en tal sentido consisten en la eliminación de arcos con bajo flujo vehicular y otras se basan en agregar varios arcos en uno ficticio equivalente (Raadsen et al., 2020). Varios de estos enfoques presentan arbitrariedades en la selección de la topología de la red reducida, que pueden conducir a imprecisiones en el cálculo de flujos vehiculares.

En el presente trabajo, se propone en primer lugar una formulación para el problema de asignación de tráfico generalizado basada en el enfoque Physarum que tiene en cuenta la existencia de varios destinos, demanda elástica y múltiples clases de usuarios. En segundo lugar, se desarrolla un enfoque de elementos finitos con el propósito de reducir el número de variables necesarias para resolver las ecuaciones del problema formulado. La metodología se basa en la interpolación de los tiempos de viaje en ciertos subdominios urbanos, denominados elementos finitos, en función de los valores correspondientes a nodos principales preseleccionados (incógnitas reducidas). Posteriormente, se hace uso del método de Galerkin

para expresar el TAP en términos de las incógnitas reducidas. Finalmente, las ecuaciones gobernantes se resuelven con la estrategia Physarum, previamente comentada. El modelo resultante tiene un número mucho menor de incógnitas que el problema original. Se presenta la formulación matemática y un ejemplo numérico para mostrar su eficiencia. El presente trabajo constituye una extensión de enfoque presentado en [Cortínez y Domínguez, \(2021\)](#).

2 FORMULACIÓN DEL TAP EN FUNCIÓN DE TIEMPOS DE VIAJE Y FLUJOS HACIA CADA DESTINO

Se considera una red urbana de tráfico durante una hora pico cuando los usuarios viajan desde sus hogares distribuidos sobre toda la ciudad hacia ciertos puntos de destino d ($d=1, 2, \dots, Nd$). Se conoce la topología de la red, asumida por un conjunto de arcos dirigidos a ($a=1, 2, \dots, Na$) con características conocidas (capacidad, longitud, velocidad máxima permitida), conectados por nodos i ($i=1, 2, \dots, Nn$). El sentido permitido de cada arco a uniendo los nodos i y j se define mediante un indicador $\bar{\lambda}_{ij}$ que vale 1 si la dirección permitida es desde i hacia j y -1 en el caso opuesto. Se asume que existen diferentes clases de usuarios m ($m=1, 2, \dots, Nm$) con diferentes percepciones del tiempo de viaje. Se conocen las tasas de generación de viaje $q_j^{m,d}$ (veh/h) en cada nodo j de la red hacia los diferentes destinos d para cada clase de usuario m . Tales tasas pueden depender del tiempo de viaje en la red congestionada (demanda elástica). El problema de asignación de tráfico consiste en determinar los flujos en cada arco \bar{g}_a (veh/h) y los tiempos de viaje $u_i^{m,d}$ (h) percibidos por cada clase de usuario m desde cada nodo i al correspondiente destino d . Se asume que las elecciones de ruta de los usuarios se realizan de acuerdo al primer principio de Wardrop.

La congestión de tráfico urbano puede definirse como el incremento en el tiempo de viaje t_a^m en un arco a para la clase m , causado por el incremento del flujo \bar{g}_a en el mismo. Matemáticamente esta relación se puede expresar como:

$$t_a^m = F_a^m(\bar{g}_a) \quad (1)$$

donde:

$$\bar{g}_a = \sum_{m,d} g_a^{m,d} \quad (2)$$

siendo $g_a^{m,d}$ el flujo en a de vehículos clase m dirigiéndose a un destino d y F_a^m una función creciente (empírica) del flujo total en el arco, denominada generalmente “función de costo”. Luego, el primer principio de Wardrop para equilibrio de usuario establece que los tiempos de viaje de los usuarios entre cada par origen destino por los caminos utilizados son menores o iguales a los tiempos de viaje entre esos puntos por otros caminos posibles. De acuerdo a esto, el tiempo de viaje para un usuario clase m entre un dado punto de la red al punto de destino es único (y el mínimo) para todos los caminos realmente usados. Otra forma de entender este principio es que el tiempo de viaje hacia un destino dado es una función potencial que depende de la posición pero no de la trayectoria. Matemáticamente, esto puede escribirse de la siguiente manera:

$$u^{m,d} = u^{m,d}(x, y) \quad (3)$$

siendo por definición $u^{m,d}(x_d, y_d) = 0$ donde x_d e y_d son las coordenadas del punto de

destino considerado. Consecuentemente, el tiempo de viaje sobre el arco a para un usuario m yendo hacia d puede expresarse como la diferencia de la función potencial en los extremos del arco (nodos i y j).

$$t_a^{m,d} = u_i^{m,d} - u_j^{m,d}, \quad u_i^{m,d} > u_j^{m,d} \quad (4)$$

Debe observarse que, en condiciones de equilibrio, el tiempo de viaje en cada arco hacia un destino d , de acuerdo a (1), es el mismo para todos los usuarios de la clase m , independientemente de sus destinos:

$$t_a^m = t_a^{m,d} \quad (5)$$

Luego, reemplazando (1) y (4) en (5) se llega a:

$$\frac{u_i^{m,d} - u_j^{m,d}}{F_a^m(\bar{g}_a)} = 1, \quad u_i^{m,d} > u_j^{m,d} \quad (6)$$

Multiplicando ambos miembros de la expresión anterior por $g_a^{m,d}$, es posible escribir:

$$g_a^{m,d} = \xi_a^{m,d} \frac{g_a^{m,d}}{F_a^m(\bar{g}_a)} (u_i^{m,d} - u_j^{m,d}) \quad \text{con} \quad \xi_a^{m,d} = \begin{cases} 1 & \bar{\lambda}_{ij}(u_i^{m,d} - u_j^{m,d}) > 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_{ij}(u_i^{m,d} - u_j^{m,d}) \leq 0 \end{cases} \quad (7a,b)$$

El factor $\xi_a^{m,d}$ se ha introducido para asegurar que la función potencial (3) decrece en el sentido de circulación permita del arco.

Para completar la formulación del problema de asignación debe establecerse la conservación de vehículos de clase m hacia d en un nodo genérico j :

$$\sum_{a \in M_j} \pm g_a^{m,d} + q_j^{m,d} = 0 \quad (8)$$

donde M_j corresponde al conjunto de arcos conectados al nodo j . En la expresión anterior el signo “+” (“-”) corresponde a los flujos entrantes (salientes) al nodo j . La función de demanda se considera elástica, es decir, es una función decreciente de los tiempos de viaje hacia cada destino y para cada clase de usuario: $q_j^{m,d} = q_j^{m,d}(u_j^{m,d})$.

Reemplazando (7) en (8) es posible escribir:

$$\sum_{i \in P_j} \xi_a^{m,d} \frac{g_a^{m,d}}{F_a^m(\bar{g}_a)} (u_i^{m,d} - u_j^{m,d}) + q_j^{m,d} = 0 \quad (9)$$

donde P_j corresponde al conjunto de nodos i vinculados al nodo j . El problema de asignación de tráfico es gobernado por el sistema algebraico no lineal constituido por las ecuaciones (9) y (6) (ó 9 y 7) teniendo como incógnitas a las funciones potenciales $u_i^{m,d}$ y a los flujos de arco $g_a^{m,d}$.

3 FORMULACIÓN DEL TAP MEDIANTE EL ENFOQUE PHYSARUM

El sistema presentado es altamente no lineal y debe resolverse por algún enfoque iterativo apropiado. En particular, el enfoque Physarum, basado en una analogía con un proceso biológico, ha mostrado ser eficiente para casos particulares de la formulación presentada

(Cortínez y Dominguez, 2021). Este enfoque comienza aproximando $\xi_a^{m,d} g_a^{m,d}$ y de F_a^m en las ecuaciones (7) y (9) mediante los valores de $D_a^{m,d}$ y τ_a^m respectivamente. Consecuentemente, el sistema (9) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\sum_{i \in P_j} \frac{D_a^{m,d}}{\tau_a^m} (u_i^{*m,d} - u_j^{*m,d}) + q_j^{m,d} = 0 \quad (10)$$

o en forma matricial como:

$$\mathbf{K}^{*m,d} \mathbf{u}^{*m,d} = \mathbf{q}^{m,d} \quad (11)$$

Las ecuaciones (10) constituyen $(Nm \times Nd)$ sistemas algebraicos lineales que pueden ser fácilmente resueltos para obtener aproximaciones a $u_i^{*m,d}$. Con estos valores sustituidos en (7a) se obtienen nuevas aproximaciones para los flujos de arco:

$$g_a^{*m,d} = \frac{D_a^{m,d}}{\tau_a^m} (u_i^{*m,d} - u_j^{*m,d}) \quad (12)$$

De manera similar, con $u_i^{*m,d}$ se determinan nuevos valores de las tasas de generación de viajes $q_j^{*m,d} = q_j^{m,d} (u_j^{*m,d})$ y de $\xi_a^{*m,d}$ con (7b). Usando los nuevos valores se obtienen actualizaciones para $D_a^{m,d}$ y τ_a^m y con las siguientes expresiones:

$$D_a^{m,d(nuevo)} = \frac{D_a^{m,d} + \xi_a^{*m,d} g_a^{*m,d}}{2}, \quad \tau_a^{m(nuevo)} = \frac{\left(\tau_a^m + F_a^m \left(\sum_{m,d} g_a^{*m,d} \xi_a^{*m,d} \right) \right)}{2} \quad (13a, b)$$

Las ecuaciones (11) a (13) se resuelven iterativamente hasta que $g_a^{*m,d}$ y $u_j^{*m,d}$ convergen a la solución del TAP en $g_a^{m,d}$ y $u_j^{m,d}$. Finalmente, el flujo total en cada arco se obtiene mediante (2).

4 MODELO REDUCIDO: MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

El sistema (11) para cada clase y destino es frecuentemente muy grande para redes regionales urbanas y por lo tanto, muy demandantes desde el punto de vista computacional, ya que deben resolverse varias veces hasta alcanzar la convergencia. Este problema se agrava en el contexto de diseño óptimo. Consecuentemente, resulta de interés desarrollar un modelo con menor cantidad de incógnitas que sea aproximadamente equivalente al sistema (11). Se propone reducir el número de incógnitas utilizando el método de Elementos Finitos (EF), muy utilizado en la mecánica del continuo. La metodología parte de la subdivisión de la red de transporte en algunos subdominios (o elementos finitos), que contienen una porción de la red como se muestra en la Figura 1.

El contorno de tales elementos finitos puede ser de formas geométricas relativamente simples: rectángulos, triángulos, rectángulos distorsionados, etc. Sobre estos elementos se definen ciertos nodos que corresponden a las incógnitas principales $U_K^{m,d}$, que representan los tiempos de viaje desde el punto K -ésimo hasta el destino correspondiente d para la clase de usuario m .

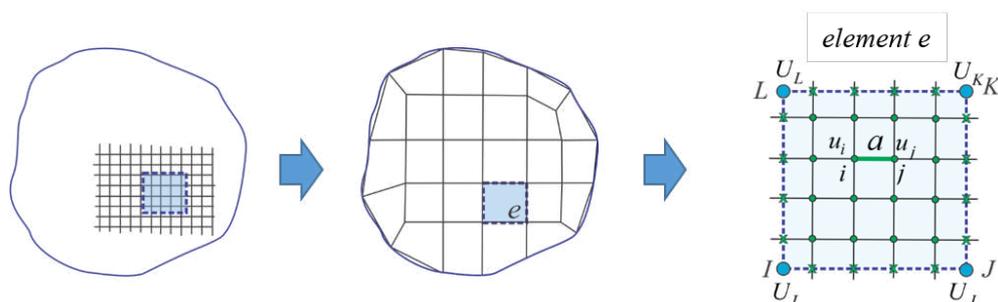


Figura 1: Esquema del modelo reducido de Elementos Finitos.

Dentro de cada uno de estos EF se aproxima el tiempo de viaje de un usuario clase m , desde un punto genérico de coordenadas x,y hacia el centro d , mediante una interpolación de los tiempos de viaje correspondientes a los nodos principales $U_K^{m,d}$:

$$u^{m,d}(x,y) = \sum_K N_K^e(x,y) U_K^{m,d} \quad (14)$$

Las funciones de interpolación $N_K^e(x,y)$, para ser consistentes, deben adoptar los valores $N_K^e = 1$ si $(x,y) = (x_K, y_K)$ y $N_K^e = 0$ si (x,y) corresponde a cualquier otro nodo principal del elemento. Además tales funciones son nulas fuera del elemento e considerado: $N_K^e = 0$ si $(x,y) \notin e$. Existen muchas formas para elegir las funciones de interpolación (Chandrupatla y Belegundu, 2012), alguna de las cuales será presentada en el ejemplo numérico. La expresión (14) puede reescribirse en forma matricial como:

$$\mathbf{u}^{m,d} = \mathbf{N} \mathbf{U}^{m,d} \quad (15)$$

donde el elemento genérico de la matriz \mathbf{N} es $N_{iK} = \sum_e N_{iK}^e$ y $\mathbf{U}^{m,d}$ es el vector reducido de tiempos de viaje hacia el destino d para la clase m . Hay que observar que el número de variables involucradas en $\mathbf{U}^{m,d}$ es mucho menor que el de $\mathbf{u}^{m,d}$. Para obtener el sistema de incógnitas reducido para $\mathbf{U}^{m,d}$ se utiliza el método de Galerkin (Chandrupatla y Belegundu, 2012; Cortínez y Dominguez, 2017). Es decir, se sustituye (15) en (11) y se premultiplica la expresión de la traspuesta de la matriz de interpolación \mathbf{N}^T obteniendo los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{\Psi}^d \mathbf{U}^{*m,d} = \mathbf{Q}^{m,d} \quad (16)$$

donde se han definido:

$$\mathbf{\Psi}^{m,d} = \mathbf{N}^T \mathbf{K}^{*m,d} \mathbf{N}, \quad \mathbf{Q}^{m,d} = \mathbf{N}^T \mathbf{q}^{m,d} \quad (17)$$

Antes de resolver el sistema (16) deben imponerse las condiciones $\mathbf{U}_d^{m,d} = 0$. Una vez determinados los valores de las incógnitas en los nodos principales deben recuperarse los valores de las funciones potenciales en los nodos de la red mediante (15) y a partir de allí continuar con el procedimiento Physarum para lograr nuevas aproximaciones de $\mathbf{\Psi}^{m,d}$ y $\mathbf{Q}^{m,d}$. El procedimiento se itera hasta convergencia.

5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Se analiza una red de transporte ficticia de $2,9 \times 2,9 \text{ km}^2$ constituida por 1740 arcos de 100 m de longitud cada uno y 900 nodos o puntos de intersección, con dos puntos de destino A y B tal como se puede ver en la Figura 2. Las calles son perpendiculares entre sí con un solo sentido de circulación, alternantes cada 100 m. Se considera una sola clase de usuario siendo la correspondiente función de costo (BPR) $t_a = t_0 \left(1 + 0.15 \left(\bar{g}_a / 600\right)^2\right)$, donde el tiempo a flujo libre t_0 es igual a 0.1 minuto.

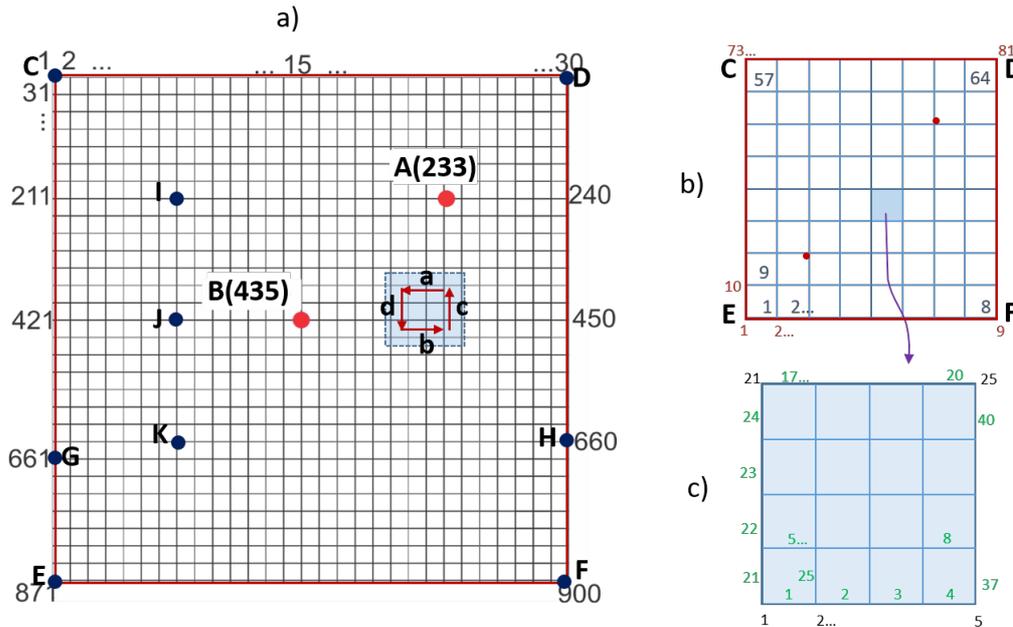


Figura 2: Red de transporte analizada: a) Esquema general, b) malla de EF, c) EF aislado.

Se consideran dos casos de demanda de viajes generados en la ciudad: a) una demanda fija $q_i^{1,1} = q_i^{1,2} = 7 \text{ veh} / h$ en cada nodo y b) una demanda elástica $q_i^{1,1} = 21^{-5u_i^{1,1}}$ y $q_i^{1,2} = 21^{-5u_i^{1,2}}$ veh/h en cada nodo. En la Figura 2a, los puntos C a K corresponden a los nodos utilizados en las figuras siguientes para mostrar los resultados de los estudios numéricos realizados, al igual que los segmentos a, b, c y d que corresponden a arcos determinados de la red.

Para resolver los problemas de asignación en la red aludida, se aplica el enfoque Physarum y el método de EF mediante una malla de 64 elementos como se muestra en la Figura 2b. Cada EF se ha adoptado como rectangular con 4 nodos principales (1 en cada vértice) como se muestra en la Figura 2c. Las funciones de forma se han asumido de la manera más simple posible, es decir con variación bilineal, de la forma genérica $a_K (b_K - x)(c_K - y)$, donde las constantes a_K, b_K y c_K se han adoptado de manera que verifiquen $N_K^e = 1$ si $(x, y) = (x_K, y_K)$, y $N_K^e = 0$ si (x, y) corresponde a cualquier otro nodo principal del elemento. Observar que para estos ejemplos sencillos, el modelo detallado Physarum involucra 1800 incógnitas y el modelo reducido solamente 162 incógnitas.

Para el problema de asignación con demanda fija, se han obtenido los tiempos de viaje hacia cada uno de los destinos. En la Figura 3a) se muestra la comparación entre los tiempos de viaje hacia el destino A desde 6 puntos del borde del dominio (C, D, E, F, G, H) obtenidos

mediante el modelo Physarum completo y el modelo reducido de 64 EF respectivamente. Como se aprecia, los resultados son prácticamente coincidentes. En la Figura 3b) se aprecia el mismo grado de concordancia para los tiempos de viaje desde los mismos puntos hacia el destino B.

Por otro parte, en la Figura 4a) se muestran los flujos totales en los arcos centrales de los recorridos *a*, *b*, *c* y *d* indicados en la figura 2a). Como se aprecia, los resultados obtenidos mediante ambos modelos presentan muy poca diferencia (error medio absoluto del método de EF del 3%). En la Figura 4b) se ejemplifica la convergencia del modelo Physarum en conjunto con el método de EF a partir del flujo total en el arco central del recorrido *c* (Figura 2a). Como se aprecia, la convergencia se alcanza en 40 iteraciones.

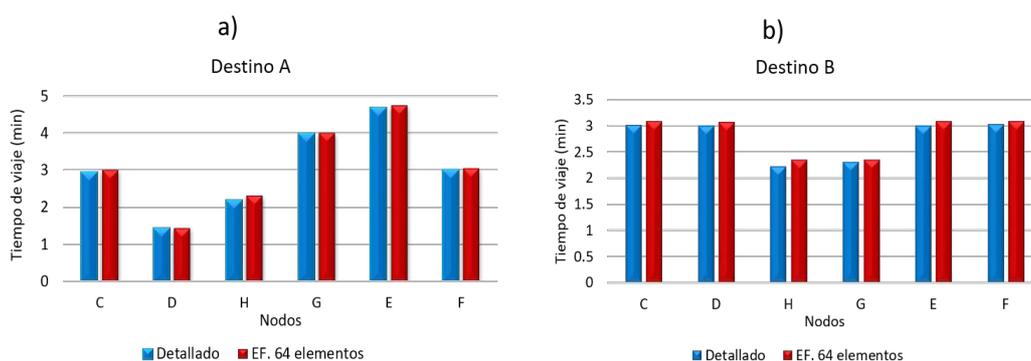


Figura 3: Tiempos de viaje desde nodos C a F: a) hasta destino A, b) hasta destino B.

También se ha resuelto el problema de asignación de tráfico correspondiente a demanda variable previamente enunciado. En la Figura 5a) se muestra una comparación entre las demandas máximas ($q_i^{1,1} = 21$ y $q_i^{1,2} = 21$) en los puntos I, J y K (Figura 2a) y las demandas elásticas ($q_i^{1,1} = 21^{-5u_i^{1,1}}$ y $q_i^{1,2} = 21^{-5u_i^{1,2}}$) una vez alcanzado el equilibrio para los destinos A y B. Como se puede apreciar, la consideración de demanda elástica produce un decrecimiento de su magnitud por la congestión en la red y la desigualdad de las demandas hacia A y B al alcanzar el equilibrio. En la Figura 5b) se ilustra cómo, junto con la demanda, disminuyen los tiempos de viaje. En particular, se muestran los tiempos de viaje desde los puntos C a F hacia el destino B para demanda máxima y elástica.

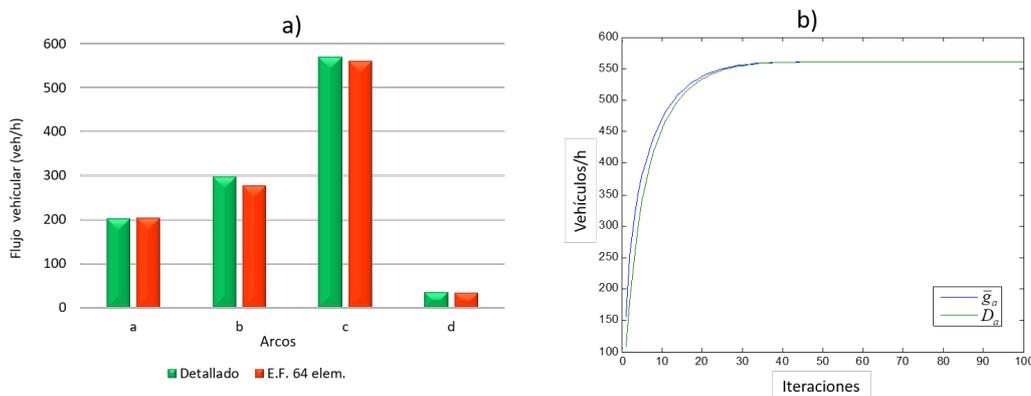


Figura 4: Flujo vehicular total en arcos: a) en segmentos centrales de recorridos *a* a *d*, b) convergencia (tramo *c*).

Los resultados mostrados en la Figura 5 han sido determinados con el método detallado Physarum. Sin embargo, éstos no difieren apreciablemente de los determinados por EF. Para observar la buena concordancia entre ambos métodos, en la Figura 6a) se muestran los tiempos de viaje hacia el destino A desde los puntos C a F del borde, y en la Figura 6b) los correspondientes resultados para el destino B. Los valores obtenidos mediante ambos métodos presentan un error absoluto medio del 2%.

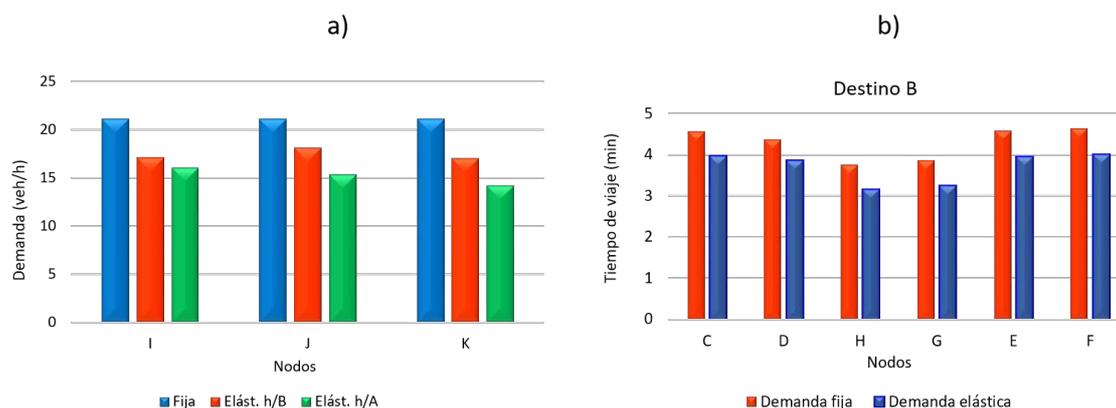


Figura 5: Comparación de resultados entre demanda fija y elástica: a) valores de demanda máximos y elásticos en tres nodos de la red hacia los destinos A y B, b) tiempos de viaje hasta el destino B para demanda máxima y elástica.

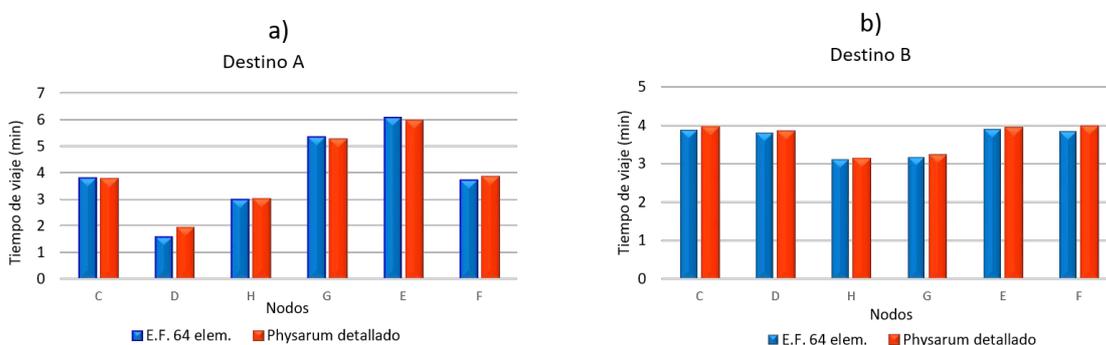


Figura 6: Comparación de tiempos de viaje desde los nodos C-F: a) hacia el destino A, b) hacia el destino B.

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado una formulación del problema generalizado de asignación de tráfico tomando como incógnitas básicas a los tiempos de viaje y a los flujos hacia cada destino. La formulación tiene en cuenta la demanda elástica y la existencia de múltiples clases de usuarios. Para resolver el sistema algebraico no lineal gobernante se hace uso de una extensión del enfoque iterativo Physarum que ha mostrado muy buenas propiedades de convergencia. Por otra parte, como aspecto remarcable, este enfoque permite evitar la indeterminación del problema cuando existen arcos de escaso flujo. Asimismo, considerando el hecho de que habitualmente los problemas pueden presentar un elevado número de variables, se ha propuesto un enfoque de reducción de variables basado en el método de elementos finitos. Esta metodología puede permitir una drástica reducción de incógnitas manteniendo una precisión similar a las del modelo detallado. En el muy simple ejemplo

analizado el método permite reducir el número de variables en un factor de 10, aunque pueden esperarse mayores reducciones para redes más densas. Ambos enfoques desarrollados, Physarum detallado y su versión reducida de EF, son adecuados para la programación en paralelo.

REFERENCIAS

- Chandrupatla, D.R y Belegundu, A.D., *Introduction to finite elements in engineering*, 4th ed. Ed. Pearson, 2012.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N., An anisotropic diffusion model for the study of urban traffic. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 29(1), 1-11, 2013.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N., An anisotropic continuum model for traffic assignment in mixed transportation networks. *Applied Mathematical Modelling* 50, 340-353, 2017.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N., Una nueva interpretación del modelo Physarum para el problema de asignación de tráfico en equilibrio de usuario. *Mecánica Computacional XXXVI*, AMCA (ISSN: 2591-3522), 2089-2098, 2018.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N., A finite element approach for the traffic assignment problem. *Transportation Research Procedia* (aceptado para publicación), 2021.
- Florian, M., Constantin, I y Florian, D., A new look at projected gradient method for equilibrium assignment. *J. Trans. Res. Board* 2090, 10-16, 2009.
- Jafari, E., Pandey, V. y Boyles, S. D., A decomposition approach to the static traffic assignment problem, *Transportation Research part B* 105, 270-296, 2017.
- Lotito, P., Issues in the implementation of the DSD algorithm for the traffic assignment problem. *European Journal of the Operation Research* 175, 1577-1587, 2006.
- Mitradjieva, M. y Lindberg, P.O., The stiff is moving conjugate direction Frank–Wolfe methods with applications to traffic assignment. *Transp. Sci.* 47, 280–293, 2013.
- Raadsen, M.P.H., Bliemer, M.C.J. y Bell, M.G.H., Aggregation, disaggregation and decomposition methods in traffic assignment: historical perspectives and new trends. *Transportation Research part B* 139, 199-223, 2020.
- Sheffi, Y., *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1984.
- Tero, A. Kobayashi, R. y Nakagaki, T., A mathematical model for adaptive transport network in path finding by true slime mold. *Journal of theoretical biology* 244, 553-564, 2007.
- Xu, S., Jiang, W., Deng, X. and Shou, Y., A modified Physarum-inspired model for the user equilibrium traffic assignment problem. *Applied Mathematical Modelling* 55, 340-353, 2018.
- Zhang, X. and Mahadevan, S., A bio-inspired approach to traffic network equilibrium assignment problem. *IEEE Transactions on cybernetics*, 1304-1315, 2018.