

DINAMICA DE MEDIOS POROSOS CON MICROESTRUCTURAS EN LA FORMULACION DE SEGUNDO GRADIENTE

DYNAMICS OF POROUS MEDIA WITH MICROSTRUCTURES IN THE FORMULATION OF SECOND GRADIENT

Juan C. Barreto^a, Javier L. Mroginski^b, Héctor A. Di Rado^b

^aLaboratorio de Modelización y Simulación Numérica, Universidad Nacional de Formosa, Av. Gutnisky 3200 Argentina, juanca_barreto@yahoo.com.ar

^bLaboratorio de Mecánica Computacional (LAMEC-IMIT-CONICET), Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Nordeste (UNNE), Av. Las Heras 727, Resistencia Chaco, Argentina, javierm@ing.unne.edu.ar; lamec.unne.edu.ar

Palabras clave: Poro-termo-visco-elastodinámica, fuerza configuracional, tensor de Eshelby, teoría de Mindlin-Aifantis

Resumen: R.D. Mindlin propone en 1964, una teoría de segundo gradiente, interpretándose esta corrección a las ecuaciones clásicas de la elasticidad, como la presencia de un campo micro-elástico no local, pues depende de una longitud característica del orden del micrómetro que se extiende a toda la región en estudio, esto claramente se diferencia de la formulación de Eshelby la cual tiene carácter local. En el presente trabajo se desarrolla un modelo poro-visco-elastodinámico, en el marco de la teoría de segundo gradiente de Mindlin-Aifantis, conteniendo fuerzas configuracionales, debidas a la presencia de microestructuras.

Keywords: poro-visco-elastodynamics models, configurational forces, Eshelby tensor, theory of Mindlin-Aifantis

Abstract. R.D. Mindlin proposed in 1964, a theory of second gradient, interpreting this correction to classical equations of elasticity, such as the presence of a non-local micro-elastic field, as it depends on a characteristic length of the order of the micrometer, that extends to the entire region under study, this clearly differs from the Eshelby formulation which is local in nature. This is a first attempt, which we now know as multi-scale developments. In the present work, a pore-visco-elastodynamic model is developed, within the framework of the Mindlin-Aifantis second gradient theory, containing configurational forces, due to the presence of microstructures.

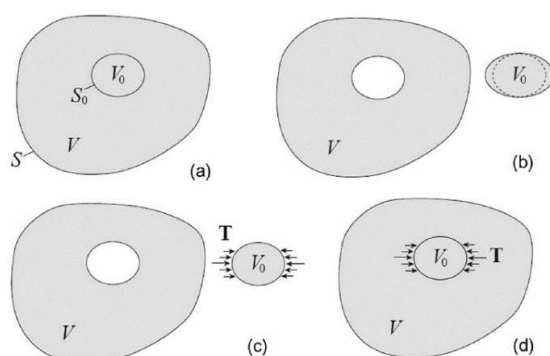
1. INTRODUCCION

La presencia de diferentes tipos de defectos, en los materiales, a escala micro y nano, impactan fuertemente en las propiedades efectivas de estos a escala macroscópica. Respecto de estas microestructuras, distribuidas, según múltiples escalas de longitud y energía, existen diversas aproximaciones teóricas, todas ellas, en mayor o menor medida hacen uso del concepto de auto-deformación, y asociada a esta idea aparece el concepto termodinámico de transición de fase, Así entonces, podemos pensar el problema micromecánico como proceso de transición de fase de una configuración no deformada a otra deformada, inducida por una nueva clase de objeto físico llamado fuerza configuracional, los estados meta-estables inducidos por estas, se expresan en términos de auto-deformaciones. Las fuerzas configuracionales son acciones dinámicas que reconfiguran geométrica y energéticamente un material, operando sobre los defectos del sólido y produciendo a escala macroscópica las propiedades efectivamente medidas. Este nuevo tipo de fuerza no reconoce un origen newtoniano, aunque participa de ecuaciones de conservación balance claramente newtonianas. Así como en mecánica clásica la presencia de fuerzas está asociada a la variación instantánea del momentum lineal, en micromecánica las fuerzas configuracionales están vinculadas al cambio instantáneo de una nueva función vectorial llamada pseudo-momentum.

Por todo lo expresado, queda claro que surge aquí, una nueva mecánica denominada *Mecánica Configuracional o Mecánica Material*, esta última denominación aparece relacionada con el hecho de que, el sistema de ecuaciones de este tipo de modelos encuentra su representación natural en la configuración no deformada, material o lagrangiana, algunos autores, G. Maugin, M. Gurtin, entre otros, llaman a este nuevo corpus teórico, Mecánica Eshelbiana, recordando así la obra fundacional de J. Eshelby en este campo, al introducir el tensor de Energía impulso que lleva su nombre y que está indisolublemente unida al cálculo de las integrales J, típicas de la teoría de fractura. De hecho, los primeros trabajos de Eshelby (1957, 1958, 1959) surgen al intentar explicar los fenómenos de fractura dúctil y frágil en sólidos.

2. FORMULACION DEL PROBLEMA DE ESHELBY

Un aporte sustantivo de Eshelby destinado a la comprensión de estos es su experimento pensado (Gedanken)



Los cuatro pasos del experimento virtual para construir la solución de Eshelby son los siguientes:

a). Se tienen Un sólido elástico lineal con volumen \mathbf{V} , y superficie \mathbf{S} (matriz). Una inclusión \mathbf{V}_0 con superficie \mathbf{S}_0 está incrustada en la matriz

b) Se suprime la inclusión de la matriz

c) Se aplica la tracción superficial \mathbf{T} a \mathbf{S}_0 para que la inclusión vuelva a su forma original

d) Se vuelve a incrustar la inclusión en la matriz y se quita la tracción \mathbf{T}

El problema de Eshelby con condiciones de Neuman, en términos de la secuencia experimental anterior se escribe de la forma

$$\mathbf{C}_{ijkl}^e \mathbf{u}_{k,lj}(\vec{x}) = -\mathbf{S}_{ijkl}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}) \text{ en } R_k \quad ; \quad \mathbf{C}_{ijkl}^e \mathbf{u}_{k,l}(\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = -\mathbf{S}_{ijkl}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*(\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} \quad (1)$$

$$\mathbf{C}_{ijkl}^e \mathbf{u}_{k,l}(\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_i^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / \mathbf{t}_i^a \in (\mathbf{L}(\partial\Gamma_1))^2 \quad (2)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x})$: son las deformaciones residuales no mecánicas

Condición sobre las matrices

$$\mathbf{C}_{ijkl}^e, \mathbf{S}_{ijkl}^{Es} \in V^{3 \times 3 \times 3 \times 3} \quad ; \quad \mathbf{C}_{ijkl}^e = \mathbf{C}_{jikl}^e = \mathbf{C}_{ijlk}^e = \mathbf{C}_{klij}^e \quad ; \quad \mathbf{S}_{ijkl}^{Es} = \mathbf{S}_{jikl}^{Es} = \mathbf{S}_{ijlk}^{Es}$$

$$\mathbf{C}_{ijkl}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} > a_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \quad ; \quad \mathbf{S}_{ijkl}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^* \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^* > b_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^* \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^* \quad ; \quad a_0, b_0 \in R_0^+$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \in F(\mathbf{C}^e) \quad ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^* \in F(\mathbf{S}^{Es})$$

En términos de las condiciones de borde impuestas se escribe la solución de la forma:

$$\begin{aligned} u_i(\vec{x}) = & \langle u(\vec{x}) \rangle - \iiint_V d^3 x' (g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbf{S}_{mjkl}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}') - \\ & - \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbf{S}_{mjkl}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} - \iint_{\partial\Gamma_1} dS g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbf{t}_m^a(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} \end{aligned} \quad (3)$$

Donde la función de Green verifica:

$$\mathbf{C}_{ijkl}^e g_{kn,lj}(\Delta\vec{x}) = -\delta_{in} (\delta(\Delta\vec{x}) - (1/V)) \text{ en } R_k \quad (4)$$

$$\mathbf{C}_{ijkl}^e g_{kn,l}(\Delta\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \quad ; \quad \mathbf{C}_{ijkl}^e g_{kn,l}(\Delta\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (5)$$

La condición de resolubilidad es:

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbf{S}_{mjkl}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + \iint_{\partial\Gamma_1} dS g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbf{t}_m^a(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = \\ & = \iiint_V d^3 x' (g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbf{S}_{mjkl}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}')) \end{aligned} \quad (6)$$

3. PROBLEMA DE ESHELBY DE SEGUNDO GRADIENTE

Para el caso de problemas de Eshelby de segundo gradiente, partimos de la forma general para la densidad de energía de deformación, escrita según Mindlin (1964) en la forma

$$\begin{aligned} w(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\vec{x}), \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}(\vec{x})) = & (1/2)\lambda \boldsymbol{\varepsilon}_{ii}(\vec{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{jj}(\vec{x}) + \mu \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\vec{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\vec{x}) + c_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,j}(\vec{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{ik,k}(\vec{x}) + \\ & + c_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{ii,k}(\vec{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{kj,j}(\vec{x}) + c_3 \boldsymbol{\varepsilon}_{ii,k}(\vec{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{jj,k}(\vec{x}) + c_4 \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}(\vec{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}(\vec{x}) + c_5 \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}(\vec{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{kj,i}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Los números c_1, c_5 , son constantes estructurales del material llamadas coeficientes de gradientes de deformación. Se eligen las constantes siguientes:

$$c_1 = c_2 = c_5 = 0 \quad ; \quad c_3 = (1/2)c\lambda \quad ; \quad c_4 = c\mu$$

La constante c tiene dimensiones de una longitud al cuadrado, ahora la expresión para la densidad de energía de deformación será:

$$\begin{aligned} w(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\vec{x}), \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}(\vec{x})) = & (1/2)\lambda \boldsymbol{\varepsilon}_{ii}(\vec{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{jj}(\vec{x}) + \mu \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\vec{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\vec{x}) + \\ & + (1/2)c(\lambda \boldsymbol{\varepsilon}_{ii,k}(\vec{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{jj,k}(\vec{x}) + \mu \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}(\vec{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}(\vec{x})) \end{aligned} \quad (7)$$

La expresión anterior puede a su vez escribirse en forma

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\vec{x}), \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}(\vec{x})) = (1/2)(\boldsymbol{\sigma}_{ij}(x) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\vec{x}) + \boldsymbol{\mu}_{ijk}(\vec{x}) \boldsymbol{\kappa}_{ijk}(\vec{x})) \quad (8)$$

Donde $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\vec{x})$ es el tensor conjugado de $\boldsymbol{\sigma}_{ij}(x)$ y $\boldsymbol{\mu}_{ijk}(\vec{x})$ lo es de $\boldsymbol{\kappa}_{ijk}(\vec{x})$

Finalmente definiendo:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}(x) = \mathbf{C}_{ijkl}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\vec{x}) \quad ; \quad \boldsymbol{\mu}_{ijk}(\vec{x}) = l_M^2 \mathbf{C}_{ijmn}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{mnk}(\vec{x}) \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\vec{x}) = (1/2)(u_{i,j}(\vec{x}) + u_{j,i}(\vec{x})) \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{ijk}(\vec{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}(\vec{x}) = (1/2)(u_{i,jk}(\vec{x}) + u_{j,ik}(\vec{x})) \quad (11)$$

La ecuación de equilibrio se escribe

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij,j}(x) + f_i = 0 \Rightarrow \mathbf{C}_{ijkl}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}(\vec{x}) - \boldsymbol{\mu}_{ijk,kj}(\vec{x}) = -f_j(\vec{x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{C}_{ijkl}^e u_{kl,j}(\vec{x}) - l_M^2 \mathbf{C}_{ijkl}^e (u_{k,nn}(\vec{x}))_{,lj} = \mathbf{S}_{ijkl}^{Es}(\vec{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}(\vec{x}) - l_M^2 \mathbf{S}_{ijkl}^{Es}(\vec{x}) (\boldsymbol{\varepsilon}_{kl,nn}(\vec{x}))_{,j}$$

El problema riguroso de contorno se escribe

$$\mathbf{C}_{ijkl}^e u_{k,lj}(\vec{x}) - l_M^2 \mathbf{C}_{ijkl}^s (u_{k,nn}(\vec{x}))_{,lj} = -\mathbf{S}_{ijkl}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}) + l_M^2 \mathbf{S}_{ijkl}^{Es} (\boldsymbol{\varepsilon}_{kl,nn}^*(\vec{x}))_{,j} \quad \text{en } R_k \quad (12)$$

Las condiciones de contorno de Neuman son

$$(\mathbf{C}_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}) \hat{n}_j - l_M^2 \mathbf{C}_{ijklnm}^s (u_{k,nm}(\vec{x}))_{,l} \hat{n}_j) \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = -\mathbf{S}_{ijkl}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*(\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + l_M^2 \mathbf{S}_{ijkl}^{Es} (\boldsymbol{\varepsilon}_{kl,nm}^*(\vec{x})) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} ; l_M \in R_0^+ \quad (13)$$

$$(\mathbf{C}_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}) \hat{n}_j - l_M^2 \mathbf{C}_{ijklnm}^s (u_{k,nm}(\vec{x}))_{,l} \hat{n}_j) \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_i^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / \mathbf{t}_i^a \in (\mathbf{L}(\partial\Gamma_1))^2 \quad (14)$$

Si el tensor de segundo gradiente es isótropo respecto de dos de sus índices coincide con el tensor elastico y el problema anterior puede escribirse de la forma siguiente

$$\mathbf{C}_{ijkl}^e u_{k,lj}(\vec{x}) - l_M^2 \mathbf{C}_{ijkl}^e (\hat{\nabla}^2 u_{k,lj}(\vec{x})) = -\mathbf{S}_{ijkl}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}) + l_M^2 \mathbf{S}_{ijkl}^{Es} (\hat{\nabla}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,nm}^*(\vec{x}))_{,j} \text{ en } R_k \quad (15)$$

$$(\mathbf{C}_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}) \hat{n}_j - l_M^2 \mathbf{C}_{ijklnm}^s (\hat{\nabla}^2 u_{k,l}(\vec{x}))_{,l} \hat{n}_j) \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = -\mathbf{S}_{ijkl}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*(\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + l_M^2 \mathbf{S}_{ijkl}^{Es} (\hat{\nabla}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*(\vec{x})) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} \quad (16)$$

$$(\mathbf{C}_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}) \hat{n}_j - l_M^2 \mathbf{C}_{ijklnm}^s (\hat{\nabla}^2 u_{k,l}(\vec{x}))_{,l} \hat{n}_j) \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_i^a \Big|_{\partial\Gamma_1} / \mathbf{t}_i^a \in (\mathbf{L}(\partial\Gamma_1))^2 \quad (17)$$

La representación de la solución es:

$$u_i(\vec{x}) = \langle u(\vec{x}) \rangle + \iiint_V d^3x' (g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbf{S}_{mjkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{\nabla}'^2) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}') - \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbf{S}_{mjkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{\nabla}'^2) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} - \iint_{\partial\Gamma_1} dS g_{mi}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbf{t}_m^a(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} \quad (18)$$

Para el cálculo de la función de Green tenemos:

$$\mathbf{C}_{ijkl}^e (1 - l_M^2 \nabla^2) g_{kn,lj}(\Delta\vec{x}) = \delta_{in} (\delta(\Delta\vec{x}) - (1/V)) \text{ en } R_k \quad (19)$$

$$\mathbf{C}_{ijkl}^e (1 - l_M^2 \nabla^2) g_{kn,l}(\Delta\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 ; \mathbf{C}_{ijkl}^e (1 - l_M^2 \nabla^2) g_{kn,l}(\Delta\vec{x}) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \quad (20)$$

Las condiciones de resolubilidad son:

$$\iint_{\partial\Gamma_{in}} dS g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbf{S}_{mjkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{\nabla}'^2) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} + \iint_{\partial\Gamma_1} dS g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbf{t}_m^a(\vec{x}') \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} =$$

$$= \iiint_V d^3x' (g_{im}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbf{S}_{mjkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}')) \quad (21)$$

4. PROBLEMA DE ESHELBY POROVISCOELASTICO DE SEGUNDO GRDIENTE

En la formulación de Biot con dos porosidades, el problema de Eshelby poroviscoelástico de segundo gradiente se formula de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_{ijkl}^p (1 - l_M^2 \hat{V}^2) u_{k,lj}(\vec{x}, t) + \mathbf{C}_{ijkl}^v (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{u}_{k,lj}(\vec{x}, t) - \\ & - \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{M}_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{V}^2) p_{a,j}(\vec{x}, t) - \boldsymbol{\alpha}_2 \mathbf{M}_{ij}^w (1 - l_M^2 \hat{V}^2) p_{w,j}(\vec{x}, t) = \\ & = -\mathbf{S}_{ijkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}, t) - \tilde{\mathbf{S}}_{ijkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl,j}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k \end{aligned} \quad (22)$$

Campos de porosidades

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\theta}_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{V}^2) p_{a,i}(x, t))_{,j} - (\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{p}_{a,i}(\vec{x}, t))_{,j} + \\ & + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 \mathbf{M}_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t) - \bar{\boldsymbol{\theta}}_a \partial_t p_w(\vec{x}, t) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\theta}_w \partial_t p_w(\vec{x}, t) - (\mathbf{K}_{ij}^w (1 - l_M^2 \hat{V}^2) p_{w,i}(x, t))_{,j} - (\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^w (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{p}_{w,i}(\vec{x}, t))_{,j} + \\ & + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 \mathbf{M}_{ij}^w (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t) - \bar{\boldsymbol{\theta}}_w \partial_t p_a(\vec{x}, t) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Condiciones iniciales

$$\mathbf{C}_{ijkl}^p (1 - l_M^2 \hat{V}^2) u_{k,lj}(\vec{x}, 0) = u_i^0 / u_i^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 \quad (25)$$

$$p_a(\vec{x}, 0) = p_a^0 / p_a^0 \in H_0^1(D_k) \quad ; \quad p_w(\vec{x}, 0) = p_w^0 / p_w^0 \in H_0^1(D_k) \quad (26)$$

Se han introducido las siguientes matrices

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_{ijkl}^v ; \tilde{\mathbf{S}}_{ijkl}^{Es} \in V^{3 \times 3 \times 3 \times 3} \quad ; \quad \mathbf{M}_{ij}^a, \mathbf{M}_{ij}^w, \mathbf{K}_{ij}^a, \tilde{\mathbf{K}}_{ij}^a, \mathbf{K}_{ij}^w, \tilde{\mathbf{K}}_{ij}^w \in V^{3 \times 3} \quad ; \\ & \mathbf{C}_{ijkl}^v = \mathbf{C}_{jikl}^v = \mathbf{C}_{ijlk}^v = \mathbf{C}_{klij}^v \quad ; \quad \tilde{\mathbf{S}}_{ijkl}^{Es} = \tilde{\mathbf{S}}_{jikl}^{Es} = \tilde{\mathbf{S}}_{ijlk}^{Es} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{K}}_{ij}^a = \tilde{\mathbf{K}}_{ji}^a \quad ; \quad \tilde{\mathbf{K}}_{ij}^w = \tilde{\mathbf{K}}_{ji}^w \\ & \mathbf{M}_{ij}^a = \mathbf{M}_{ji}^a \quad ; \quad \mathbf{M}_{ij}^w = \mathbf{M}_{ji}^w \quad ; \quad \mathbf{K}_{ij}^a = \mathbf{K}_{ji}^a \quad ; \quad \mathbf{K}_{ij}^w = \mathbf{K}_{ji}^w \quad ; \end{aligned}$$

Todas ellas definidas positivas y de traza no nula. Hemos introducido un tensor de Eshelby poroviscoelástico y un tensor reologico de tipo poroso: $\tilde{\mathbf{S}}_{ijkl}^{Es} ; \mathbf{C}_{ijkl}^v$.

De modo que, el tensor efectivo se escribe:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}(\vec{x}, t) = \mathbf{C}_{ijkl}^e (1 - l_M^2 \hat{V}^2) u_{k,l}(\vec{x}, t) + \mathbf{C}_{ijkl}^v (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t) +$$

$$+\mathbf{S}_{ijkl}^{Es}(1-l_M^2\hat{V}^2)\boldsymbol{\varepsilon}_{k,l}^*(\vec{x},t)+\tilde{\mathbf{S}}_{ijkl}^{Es}(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k,l}^*(\vec{x},t) \quad (27)$$

Condiciones de borde de tipo Neuman

$$\begin{aligned} &(\mathbf{C}_{ijkl}^e(1-l_M^2\hat{V}^2)u_{k,l}(\vec{x},t))+\mathbf{C}_{ijkl}^v(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{u}_{k,l}(\vec{x},t)\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_{in}}- \\ &(-\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{M}_{ij}^a(1-l_M^2\hat{V}^2)p_a(\vec{x},t)-\boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{M}_{ij}^w(1-l_M^2\hat{V}^2)p_w(\vec{x},t))\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_{in}}= \\ &=(\mathbf{S}_{ijkl}^{Es}(1-l_M^2\hat{V}^2)\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*(\vec{x},t)+\tilde{\mathbf{S}}_{ijkl}^{Es}(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}^*(\vec{x},t))\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_{in}} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &(-\mathbf{K}_{ij}^w(1-l_M^2\hat{V}^2)p_{w,i}(x,t))-\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^w(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{p}_{w,i}(\vec{x},t)\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_{in}}+ \\ &+\bar{\boldsymbol{\alpha}}_2\mathbf{M}_{ij}^w(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{u}_{i,j}(\vec{x},t)\Big|_{\partial\Gamma_{in}}=0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &(-\mathbf{K}_{ij}^a(1-l_M^2\hat{V}^2)p_{a,i}(x,t))-\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^a(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{p}_{a,i}(\vec{x},t)\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_{in}}+ \\ &+\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1\mathbf{M}_{ij}^a(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{u}_i(\vec{x},t)\Big|_{\partial\Gamma_{in}}=0 \end{aligned} \quad (30)$$

Sobre la segunda superficie limitadora

$$\begin{aligned} &(\mathbf{C}_{ijkl}^p(1-l_M^2\hat{V}^2)u_{k,l}(\vec{x},t))+\mathbf{C}_{ijkl}^v(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{u}_{k,l}(\vec{x},t)\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_1}- \\ &(-\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{M}_{ij}^a(1-l_M^2\hat{V}^2)p_a(\vec{x},t)-\boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{M}_{ij}^w(1-l_M^2\hat{V}^2)p_w(\vec{x},t))\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_1}= \\ &=\mathbf{t}_j\Big|_{\partial\Gamma_1} / \mathbf{t}_j \in (\mathbf{L}^2(\partial\Gamma_1))^2 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} &(-\mathbf{K}_{ij}^a(1-l_M^2\hat{V}^2)p_{a,i}(x,t))-\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^a(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{p}_{a,i}(\vec{x},t)\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_1}+ \\ &+\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1\mathbf{M}_{ij}^a(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{u}_i(\vec{x},t)\Big|_{\partial\Gamma_1}=q_a^1\Big|_{\partial\Gamma_1} / q_a^1 \in L^2(\partial\Gamma_1) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} &(-\mathbf{K}_{ij}^w(1-l_M^2\hat{V}^2)p_{w,i}(x,t))-\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^w(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{p}_{w,i}(\vec{x},t)\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_{in}}+ \\ &+\bar{\boldsymbol{\alpha}}_2\mathbf{M}_{ij}^w(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{u}_{i,j}(\vec{x},t)\Big|_{\partial\Gamma_1}=q_w^1\Big|_{\partial\Gamma_1} / q_w^1 \in L^2(\partial\Gamma_1) \end{aligned} \quad (33)$$

q_a^1, q_w^1 - Son los flujos de porosidades sobre las superficies limitadoras

Las representaciones integrales de las soluciones asociadas a los campos de desplazamiento y de porosidades de aire y de agua se obtienen utilizando el tercer teorema de representación de Green, y las funciones de Green adecuadas que se presentan seguidamente

$$\begin{aligned}
 u_i(\vec{x}, t) = & \langle u_i(\vec{x}, t) \rangle + \\
 & + \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3 x' g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \left\{ \mathbf{S}_{njkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \boldsymbol{\epsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}', t') + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \tilde{\mathbf{S}}_{njkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{kl,j}^*(\vec{x}', t') \right\} - \right. \\
 & \left. + \left\{ \alpha_1 \mathbf{M}_{nj}^a (1 - l_M^2 \hat{V}^2) p_{a,j}(\vec{x}', t') + \right. \right. \\
 & \left. \left. \alpha_2 \mathbf{M}_{nj}^w (1 - l_M^2 \hat{V}^2) p_{w,j}(\vec{x}', t') \right\} \right\} - \\
 & - \iiint_V d^3 x' g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t) \mathbf{C}_{ijkl}^p (1 - l_M^2 \hat{V}^2) u_{k,lj}(\vec{x}', 0) - \\
 & - \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS \left\{ g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') (\mathbf{S}_{njkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \boldsymbol{\epsilon}_{kl}^*(\vec{x}, t)) \Big|_{\partial\Gamma_{in}} - \right. \\
 & \left. - \tilde{\mathbf{S}}_{njkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{kl}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} \right\} - \\
 & - \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_1} dS \left\{ g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \mathbf{t}_n \Big|_{\partial\Gamma_1} \right\} \tag{34}
 \end{aligned}$$

Para los campos de porosidades tendremos

$$\begin{aligned}
 p_a(\vec{x}, t) = & \langle p_a(\vec{x}, t) \rangle + \bar{\boldsymbol{\theta}}_a \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3 x' g_a(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \partial_{t'} p_w(\vec{x}', t') \right\} - \\
 & - \bar{\alpha}_1 \int_0^t dt' \iiint_V d^3 x' g_a(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \mathbf{M}_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t) - \\
 & - \iiint_V d^3 x' g_a(\vec{x} - \vec{x}', t) p_a(\vec{x}, 0) - \\
 & - \int_0^t dt' \left\{ \iint_{\partial\Gamma_1} dS \left\{ g_a(\vec{x} - \vec{x}', t - t') ((\mathbf{K}_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{V}^2) p_{a,i}(\vec{x}', t')) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{p}_{a,i}(\vec{x}', t')) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{u}_i(\vec{x}', t') \Big|_{\partial\Gamma_1} \right\} \right\} \tag{35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_w(\vec{x}, t) = & \langle p_w(\vec{x}, t) \rangle + \bar{\theta}_w \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' g_a(\vec{x} - \vec{x}', t) \partial_{t'} p_a(\vec{x}', t') \right\} - \\
 & - \bar{\alpha}_2 \int_0^t dt' \iiint_V d^3x' g_w(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \mathbf{M}_{ij}^w (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t) - \\
 & - \iiint_V d^3x' g_a(\vec{x} - \vec{x}', t) p_w(\vec{x}, 0) - \\
 & - \int_0^t dt' \left\{ \iint_{\partial\Gamma_1} dS \left[\begin{aligned} & \left(g_w(\vec{x} - \vec{x}', t - t') ((\mathbf{K}_{ij}^w (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) p_{w,i}(\vec{x}', t')) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} + \right. \\ & + (\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \dot{p}_{w,i}(\vec{x}', t')) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} - \\ & \left. - \bar{\alpha}_2 \mathbf{M}_{ij}^w (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \dot{u}_i(\vec{x}', t') \Big|_{\partial\Gamma_1} \right) \right] \right\} \quad (36)
 \end{aligned}$$

Las funciones de Green asociadas son:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_{ijkl}^e (1 - l_M^2 \hat{V}^2) g_{nk,lj}(\Delta\vec{x}, \Delta t) + \mathbf{C}_{ijkl}^v (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{g}_{nk,lj}(\Delta\vec{x}, \Delta t) = \\
 = \delta_{in} (\delta(\Delta\vec{x}, \Delta t) - (1/V)) \text{ en } R_k \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\theta_a \partial_t g_a(\Delta\vec{x}, \Delta t) - (\mathbf{K}_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{V}^2) g_{a,i}(\Delta\vec{x}, \Delta t))_{,j} - \\
 - (\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{g}_{a,i}(\Delta\vec{x}, \Delta t))_{,j} = \delta(\Delta\vec{x}, \Delta t) - (1/V) \text{ en } R_k \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\theta_w \partial_t g_w(\Delta\vec{x}, \Delta t) - (\mathbf{K}_{ij}^w (1 - l_M^2 \hat{V}^2) g_{w,i}(\Delta\vec{x}, \Delta t))_{,j} - \\
 - (\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^w (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{g}_{w,i}(\Delta\vec{x}, \Delta t))_{,j} = \delta(\Delta\vec{x}, \Delta t) - (1/V) \text{ en } R_k \quad (39)
 \end{aligned}$$

Condiciones iniciales nulas

$$\mathbf{C}_{ijkl}^p (1 - l_M^2 \hat{V}^2) g_{k,lj}(\Delta\vec{x}, 0) = 0 \quad (40)$$

$$g_a(\vec{x}, -T) = 0 \quad ; \quad g_w(\Delta\vec{x}, -T) = 0$$

Condiciones de borde para las funciones de Green asociadas a los campos de desplazamiento y porosidades respectivamente

$$(\mathbf{C}_{ijkl}^p (1 - l_M^2 \hat{V}^2) g_{nk,l}(\Delta\vec{x}, \Delta t) + \mathbf{C}_{ijkl}^v (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{g}_{nk,l}(\Delta\vec{x}, \Delta t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \quad (41)$$

$$(-\mathbf{K}_{ij}^a(1-l_M^2\hat{V}^2)g_{a,i}(\Delta\vec{x},\Delta t))-\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^a(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{g}_{a,i}(\Delta\vec{x},\Delta t))\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_{in}}=0 \tag{42}$$

$$(-\mathbf{K}_{ij}^w(1-l_M^2\hat{V}^2)g_{w,i}(\Delta\vec{x},\Delta t))-\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^w(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{g}_{w,i}(\Delta\vec{x},\Delta t))\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_{in}}=0 \tag{43}$$

$$(\mathbf{C}_{ijkl}^e(1-l_M^2\hat{V}^2)g_{nk,l}(\Delta\vec{x},\Delta t)+\mathbf{C}_{ijkl}^v(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{g}_{nk,l}(\Delta\vec{x},\Delta t))\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_1}=0 \tag{44}$$

$$(-\mathbf{K}_{ij}^a(1-l_M^2\hat{V}^2)g_{a,i}(\Delta\vec{x},\Delta t))-\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^a(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{g}_{a,i}(\Delta\vec{x},\Delta t))\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_1}=0 \tag{45}$$

$$(-\mathbf{K}_{ij}^w(1-l_M^2\hat{V}^2)g_{w,i}(\Delta\vec{x},\Delta t))-\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^w(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{g}_{w,i}(\Delta\vec{x},\Delta t))\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_1}=0 \tag{46}$$

Condiciones de resolubilidad del problema de Neuman

$$\int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' g_{in}(\vec{x}-\vec{x}',t-t') \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{S}_{njkl}^{Es}(1-l_M^2\hat{V}'^2)\boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}',t') + \\ &+\tilde{\mathbf{S}}_{njkl}^{Es}(1-l_M^2\hat{V}'^2)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl,j}^*(\vec{x}',t') \end{aligned} \right\} \right\} =$$

$$= \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS \left\{ \begin{aligned} &g_{in}(\vec{x}-\vec{x}',t-t')(\mathbf{S}_{njkl}^{Es}(1-l_M^2\hat{V}^2)\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*(\vec{x},t)\Big|_{\partial\Gamma_{in}} - \\ &-\tilde{\mathbf{S}}_{njkl}^{Es}(1-l_M^2\hat{V}^2)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}^*(\vec{x},t))\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_{in}} \end{aligned} \right\} +$$

$$+ \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_1} dS \left\{ g_{in}(\vec{x}-\vec{x}',t-t')\mathbf{t}_n\Big|_{\partial\Gamma_1} \right\} \tag{47}$$

$$\int_0^t dt' \left\{ \iint_{\partial\Gamma_1} dS \left\{ \begin{aligned} &g_a(\vec{x}-\vec{x}',t-t')((\mathbf{K}_{ij}^a(1-l_M^2\hat{V}'^2)p_{w,i}(\vec{x}',t'))\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_1} + \\ &+(\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^a(1-l_M^2\hat{V}'^2)\dot{p}_{a,i}(\vec{x}',t'))\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_1} - \\ &-\bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 \mathbf{M}_{ij}^a(1-l_M^2\hat{V}'^2)\dot{u}_i(\vec{x}',t')\Big|_{\partial\Gamma_1}) \end{aligned} \right\} \right\} = 0 \tag{48}$$

$$\int_0^t dt' \left\{ \iint_{\partial\Gamma_1} dS \left\{ \begin{aligned} &g_w(\vec{x}-\vec{x}',t-t')((\mathbf{K}_{ij}^w(1-l_M^2\hat{V}'^2)p_{w,i}(\vec{x}',t'))\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_1} + \\ &+(\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^w(1-l_M^2\hat{V}'^2)\dot{p}_{w,i}(\vec{x}',t'))\hat{n}_j\Big|_{\partial\Gamma_1} - \\ &-\bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 \mathbf{M}_{ij}^w(1-l_M^2\hat{V}'^2)\dot{u}_i(\vec{x}',t')\Big|_{\partial\Gamma_1}) \end{aligned} \right\} \right\} = 0 \tag{49}$$

5. PROBLEMA DINAMICO DE ESHELBY POROVISELASTICO DE SEGUNDO GRADIENTE

Para la formulación de este problema se utiliza la formulación clásica de Mindlin-Aifantis que se escribe, para la conservación del momentum lineal en la forma siguiente:

$$(1 - l_M^2 \nabla^2) \partial_t^2 u_i(\vec{x}, t) - (1 - l_M^2 \nabla^2) \bar{\sigma}_{ij,j}(\vec{x}, t) = -(1 - l_M^2 \nabla^2) \mathbf{S}_{ijkl}^{Es} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}, t) \quad (50)$$

$$\bar{\sigma}_{ij,j}(\vec{x}, t) = \mathbf{C}_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}, t) + \mathbf{C}_{ijkl}^v \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t) - \alpha_1 \mathbf{M}_{ij}^a p_a(\vec{x}, t) - \alpha_2 \mathbf{M}_{ij}^w p_w(\vec{x}, t) \quad (51)$$

De manera que, resulta simple, a partir del mecanismo descripto previamente, la incorporación de otros campos como los de temperaturas, vacíos, microtemperaturas, difusión, y en general múltiples porosidades, también son posibles, aproximaciones gradientales de orden superior al segundo

La otra cuestión que surge al intentar la representación de las soluciones, utilizando la técnica de funciones de Green y el tercer teorema de representación de Green-Lagrange, es un nuevo tipo de problema de Cauchy, dado que ahora se debe agregar, debido a la situación de no localidad de la teoría un nuevo par de condiciones iniciales dadas sobre ciertas “*superficies iniciales*”, de modo que, la novedad residiría, en el hecho de que el conjunto de condiciones iniciales se amplía a cuatro, las nuevas condiciones iniciales se escribirán en la forma:

$$u_i(\vec{x}, 0) \Big|_{\partial \Pi} = \bar{u}_i^0 \Big|_{\partial \Pi} / \bar{u}_i^0 \Big|_{\partial \Pi} \in (\mathbf{H}_0^1(\partial \Pi))^2$$

$$(\partial_t u_i(\vec{x}, 0))_{,A} \hat{n}_A \Big|_{\partial \Pi} = v_i^0 \Big|_{\partial \Pi} / v_i^0 \Big|_{\partial \Pi} \in (\mathbf{L}^2(\partial \Pi))^2$$

Las ecuaciones de movimiento de la teoría junto con las condiciones iniciales y de borde, y la desigualdad de Clausius –Duhem será:

Campos de desplazamiento

$$\begin{aligned} & \rho \partial_t^2 u_i(\vec{x}, t) - b_M^2 (\partial_t^2 u_i(\vec{x}, t))_{,jj} - \mathbf{C}_{ijkl}^e u_{k,lj}(\vec{x}, t) - \mathbf{C}_{ijkl}^v \dot{u}_{k,lj}(\vec{x}, t) + \\ & + l_M^2 \mathbf{C}_{ijkl}^e \hat{\nabla}^2 u_{k,lj}(\vec{x}, t) + \tilde{l}_M^2 \mathbf{C}_{ijkl}^v \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{k,lj}(\vec{x}, t) + \alpha_1 \mathbf{M}_{ij}^a p_{a,j}(\vec{x}, t) + \\ & + \alpha_2 \mathbf{M}_{ij}^w p_{w,j}(\vec{x}, t) - \alpha_1 l_M^2 \mathbf{M}_{ij}^a \hat{\nabla}^2 p_{a,j}(\vec{x}, t) + \alpha_2 l_M^2 \mathbf{M}_{ij}^w \hat{\nabla}^2 p_{w,j}(\vec{x}, t) = \\ & = -\mathbf{S}_{ijkl}^E \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}, t) + l_M^2 \mathbf{S}_{ijkl}^E \hat{\nabla}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}, t) \text{ en } R_k ; \alpha_{1,2}, l_M^2, \rho \in R_0^+ \end{aligned} \quad (52)$$

Porosidades de aire y agua

$$\theta_a \partial_t p_a(\vec{x}, t) + \mathbf{J}_{j,j}^a(\vec{x}, t) + \mathbf{M}_{ij}^a (\dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t)) - \bar{\theta}_a \partial_t p_w = 0 \quad (53)$$

$$\boldsymbol{\theta}_w \partial_t p_w(\vec{x}, t) + \mathbf{J}_{j,j}^w(\vec{x}, t) + \mathbf{M}_{ij}^w(\dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{i,j}(\vec{x}, t)) - \bar{\boldsymbol{\theta}}_w \partial_t p_a = 0 \quad (54)$$

Flujos de porosidad

$$\mathbf{J}_i^a(\vec{x}, t) = -\mathbf{K}_{ij}^a p_{a,j}(\vec{x}, t) - \mathbf{K}_{ij}^a \dot{p}_{a,j}(\vec{x}, t) + l_{1\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^a \hat{\nabla}^2 p_{a,j}(\vec{x}, t) \quad (55)$$

$$\mathbf{J}_i^w(\vec{x}, t) = -\mathbf{K}_{ij}^w p_{w,j}(\vec{x}, t) - \mathbf{K}_{ij}^w \dot{p}_{w,j}(\vec{x}, t) + l_{2\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^w \hat{\nabla}^2 p_{w,j}(\vec{x}, t) \quad (56)$$

Desigualdad de Clausius Duhem

$$\begin{aligned} & \rho(\partial_\eta \bar{e}(\mathbf{F}, \eta) - p_a(\vec{x}, t)) \dot{\eta} + \rho(\partial_\eta \bar{e}(\mathbf{F}, \eta) - p_w(\vec{x}, t)) \dot{\eta} + \\ & + \rho(\partial_\eta \bar{e}(\mathbf{F}, \eta) - (1 - \hat{\nabla}^2) \sigma_{ij} \mathbf{F}_{jA}^{-T}) : \dot{\mathbf{F}}_{Ai} + \\ & + (\mathbf{J}_i^a(\vec{x}, t) / p_a) (\mathbf{M}_{ij}^a p_{a,j} - l_{1\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^a \hat{\nabla}^2 p_{a,j}(\vec{x}, t)) + \\ & + (\mathbf{J}_i^w(\vec{x}, t) / p_w) (\mathbf{M}_{ij}^w p_{w,j} - l_{2\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^w \hat{\nabla}^2 p_{w,j}(\vec{x}, t)) \leq 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Condiciones iniciales

$$u_i(\vec{x}, 0) = u_i^0 / u_i^0 \in (\mathbf{H}_0^1(D_k))^3 \quad ; \quad \partial_t u_i(\vec{x}, 0) = v_i^0 / v_i^0 \in (\mathbf{L}^2(D_k))^3 \quad (58)$$

$$u_i(\vec{x}, 0)|_{\partial\Pi} = \bar{u}_i^0|_{\partial\Pi} / \bar{u}_i^0|_{\partial\Pi} \in (\mathbf{H}_0^1(\partial\Pi))^2 \quad (59)$$

$$(\partial_t u_i(\vec{x}, 0))_{,A} \hat{n}_A|_{\partial\Pi} = v_i^0|_{\partial\Pi} / v_i^0|_{\partial\Pi} \in (\mathbf{L}^2(\partial\Pi))^2 \quad (60)$$

$$p_a(\vec{x}, 0) = p_a^0 / p_a^0 \in H_0^1(D_k) \quad ; \quad p_w(\vec{x}, 0) = p_w^0 / p_w^0 \in H_0^1(D_k) \quad (61)$$

Condiciones de borde entre: inclusión-matriz y superficie limitadora exterior, condiciones de Gurtin –Murdoch

$$\begin{aligned} & (-b^2 (\partial_t^2 u_i(\vec{x}, t))_{,j} - \mathbf{C}_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}, t) - \mathbf{C}_{ijkl}^v \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t)) \hat{n}_j|_{\partial\Gamma_{in}} + \\ & + l_\mu^2 \mathbf{C}_{ijkl}^e \hat{\nabla}^2 u_{k,l}(\vec{x}, t) \hat{n}_j|_{\partial\Gamma_{in}} + (\tilde{l}_\mu^2 \mathbf{C}_{ijk}^v \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t) + \alpha_1 \mathbf{M}_{ij}^a p_a(\vec{x}, t))|_{\partial\Gamma_{in}} + \\ & + \alpha_2 \mathbf{M}_{ij}^w p_w(\vec{x}, t) \hat{n}_j|_{\partial\Gamma_{in}} - l_{1\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^a \hat{\nabla}^2 p_a(\vec{x}, t) + l_{2\mu}^2 \mathbf{M}_{ij}^w \hat{\nabla}^2 p_w(\vec{x}, t) \hat{n}_j|_{\partial\Gamma_{in}} = \\ & = -\mathbf{S}_{ijkl}^E \varepsilon_{kl}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_j|_{\partial\Gamma_{in}} + \mathbf{S}_{ijkl}^E \hat{\nabla}^2 \varepsilon_{kl}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_j|_{\partial\Gamma_{in}} \end{aligned} \quad (62)$$

$$(\mathbf{J}_j^a(\vec{x}, t) + \mathbf{M}_{ij}^a(\dot{u}_i(\vec{x}, t) - l_a^2 \hat{\nabla}^2 \dot{u}_i(\vec{x}, t))) \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \tag{63}$$

$$(\mathbf{J}_j^w(\vec{x}, t) + \mathbf{M}_{ij}^w(\dot{u}_i(\vec{x}, t) - l_w^2 \hat{\nabla}^2 \dot{u}_i(\vec{x}, t))) \Big|_{\partial\Gamma_{in}} = 0 \tag{64}$$

Sobre la superficie limitadora externa

$$\begin{aligned} & (-b^2(\partial_t^2 u_i(\vec{x}, t))_{,j} - \mathbf{C}_{ijkl}^e u_{k,l}(\vec{x}, t) - \mathbf{C}_{ijkl}^v \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} + \\ & + l_\mu^2 \mathbf{C}_{ijkl}^e \hat{\nabla}^2 u_{k,l}(\vec{x}, t) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} + \\ & + (\tilde{l}_M^2 \mathbf{C}_{ijk}^v \hat{\nabla}^2 \dot{u}_{k,l}(\vec{x}, t) + \alpha_1 \mathbf{M}_{ij}^a p_a(\vec{x}, t) + \alpha_2 \mathbf{M}_{ij}^w p_w(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} + \\ & (-\alpha_1 l_M^2 \mathbf{M}_{ij}^a \hat{\nabla}^2 p_a(\vec{x}, t) + \alpha_2 l_M^2 \mathbf{M}_{ij}^w \hat{\nabla}^2 p_w(\vec{x}, t)) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} = \mathbf{t}_i^a \Big|_{\partial\Gamma_1} \end{aligned} \tag{65}$$

$$\mathbf{t}_i^a \in L^2(\partial\Gamma_1)$$

$$(\mathbf{J}_j^a(\vec{x}, t) + \mathbf{M}_{ij}^a(\dot{u}_i(\vec{x}, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 \dot{u}_i(\vec{x}, t))) \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \tag{66}$$

$$(\mathbf{J}_j^w(\vec{x}, t) + \mathbf{M}_{ij}^w(\dot{u}_i(\vec{x}, t) - l_M^2 \hat{\nabla}^2 \dot{u}_i(\vec{x}, t))) \Big|_{\partial\Gamma_1} = 0 \tag{67}$$

Cálculo de las funciones de Green, para el campo de desplazamientos

$$\begin{aligned} & \rho \partial_t^2 g_{in}(\Delta\vec{x}, \Delta t) - b^2(\partial_t^2 g_{in}(\Delta\vec{x}, \Delta t))_{,jj} - \mathbf{C}_{ijkl}^e g_{nk,lj}(\Delta\vec{x}, \Delta t) - \\ & - \mathbf{C}_{ijkl}^v \dot{g}_{nk,lj}(\Delta\vec{x}, \Delta t) - l_\mu^2 \mathbf{C}_{ijkl}^e \hat{\nabla}^2 g_{nk,lj}(\Delta\vec{x}, \Delta t) + \tilde{l}_\mu^2 \mathbf{C}_{ijkl}^v \hat{\nabla}^2 \dot{g}_{nk,lj}(\Delta\vec{x}, \Delta t) = \\ & = \delta_{in}(\delta(\Delta\vec{x}, \Delta t) - 1/V) \end{aligned} \tag{68}$$

Para los campos de porosidades

$$\begin{aligned} & -\theta_a \partial_t g_a(\Delta\vec{x}, \Delta t) - (\mathbf{K}_{ij}^a (g_{a,i}(\Delta\vec{x}, \Delta t) - l_a^2 \hat{\nabla}^2 g_{a,i}(\Delta\vec{x}, \Delta t)))_{,j} - \\ & - \mathbf{K}_{ij}^a (\dot{g}_{a,i}(\Delta\vec{x}, \Delta t) - l_a^2 \hat{\nabla}^2 \dot{g}_{a,i}(\Delta\vec{x}, \Delta t))_{,j} = \delta(\Delta\vec{x}, \Delta t) \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} & -\theta_w \partial_t g_w(\Delta\vec{x}, \Delta t) - (\mathbf{K}_{ij}^w (g_{w,i}(\Delta\vec{x}, \Delta t) - l_w^2 \hat{\nabla}^2 g_{w,i}(\Delta\vec{x}, \Delta t)))_{,j} - \\ & - \mathbf{K}_{ij}^w (\dot{g}_{w,i}(\Delta\vec{x}, \Delta t) - l_w^2 \hat{\nabla}^2 \dot{g}_{w,i}(\Delta\vec{x}, \Delta t))_{,j} = \delta(\Delta\vec{x}, \Delta t) \end{aligned} \tag{70}$$

Construyendo la forma asociada al tercer teorema de representación de Green, y utilizando la sustitución de Somigliana, se obtienen las representaciones integrales de las soluciones las cuales se escribirán en este caso de la siguiente forma :

$$\begin{aligned}
 u_i(\vec{x}, t) &= \langle u_i(\vec{x}, t) \rangle + \\
 &+ \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \left\{ \mathbf{S}_{njkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl,j}^*(\vec{x}', t') + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \tilde{\mathbf{S}}_{njkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl,j}^*(\vec{x}', t') \right\} - \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{M}_{nj}^a (1 - l_M^2 \hat{V}^2) p_{a,j}(\vec{x}', t') + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \boldsymbol{\alpha}_2 \mathbf{M}_{nj}^w (1 - l_M^2 \hat{V}^2) p_{w,j}(\vec{x}', t') \right\} \right\} + \\
 &+ \iint_{S_{ini}} dS \left\{ u_n(\vec{x}, 0) (\partial_t g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t))_{,j} \hat{n}_j \Big|_{S_{ini}} - g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t) (\partial_t u_n(\vec{x}, 0))_{,j} \hat{n}_j \Big|_{S_{ini}} \right\} + \\
 &+ \iint_V d^3x' u_k(\vec{x}', 0) \left\{ u_n(\vec{x}', 0) \partial_t g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t) - g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t) \partial_t u_k(\vec{x}', 0) \right\} - \\
 &- \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_{in}} dS \left\{ g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') (\mathbf{S}_{njkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*(\vec{x}, t)) \Big|_{\partial\Gamma_{in}} - \right. \\
 &\quad \left. - \tilde{\mathbf{S}}_{njkl}^{Es} (1 - l_M^2 \hat{V}^2) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}^*(\vec{x}, t) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_{in}} \right\} - \\
 &- \int_0^t dt' \iint_{\partial\Gamma_1} dS \left\{ g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \mathbf{t}_n \Big|_{\partial\Gamma_1} \right\} \tag{71}
 \end{aligned}$$

Para los campos de porosidades tendremos

$$\begin{aligned}
 p_a(\vec{x}, t) &= \langle p_a(\vec{x}, t) \rangle + \bar{\boldsymbol{\theta}}_a \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' g_a(\vec{x} - \vec{x}', t) \partial_t p_w(\vec{x}', t') \right\} - \\
 &- \int_0^t dt' \iint_V d^3x' g_a(\vec{x} - \vec{x}', t) \mathbf{M}_{ij}^a (\dot{u}_{i,j}(\vec{x}', t') - l_M^2 \hat{V}^2 \dot{u}_{i,j}(\vec{x}', t')) - \\
 &- \iint_V d^3x' g_a(\vec{x} - \vec{x}', t) p_a(\vec{x}, 0) -
 \end{aligned}$$

$$-\int_0^t dt' \left\{ \iint_{\partial\Gamma_1} dS \left\{ \begin{aligned} &g_a(\vec{x} - \vec{x}', t - t') ((\mathbf{K}_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) p_{a,i}(\vec{x}', t')) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} + \\ &+(\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \dot{p}_{a,i}(\vec{x}', t')) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} - \\ &-\bar{\alpha}_1 \mathbf{M}_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \dot{u}_i(\vec{x}', t') \Big|_{\partial\Gamma_1} \end{aligned} \right. \right\} \right\} \quad (72)$$

$$p_w(\vec{x}, t) = \langle p_w(\vec{x}, t) \rangle + \bar{\Theta}_w \int_0^t dt' \left\{ \iiint_V d^3x' g_w(\vec{x} - \vec{x}', t) \partial_{t'} p_a(\vec{x}', t') \right\} -$$

$$-\int_0^t dt' \iiint_V d^3x' g_w(\vec{x} - \vec{x}', t) \mathbf{M}_{ij}^a (\dot{u}_{i,j}(\vec{x}', t') - l_M^2 \hat{V}'^2 \dot{u}_{i,j}(\vec{x}', t')) -$$

$$-\iiint_V d^3x' g_w(\vec{x} - \vec{x}', t) p_w(\vec{x}, 0) -$$

$$-\int_0^t dt' \left\{ \iint_{\partial\Gamma_1} dS \left\{ \begin{aligned} &g_w(\vec{x} - \vec{x}', t - t') ((\mathbf{K}_{ij}^w (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) p_{w,i}(\vec{x}', t')) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} + \\ &+(\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^a (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \dot{p}_{w,i}(\vec{x}', t')) \hat{n}_j \Big|_{\partial\Gamma_1} - \\ &-\bar{\alpha}_2 \mathbf{M}_{ij}^w (1 - l_M^2 \hat{V}'^2) \dot{u}_i(\vec{x}', t') \Big|_{\partial\Gamma_1} \end{aligned} \right. \right\} \right\} \quad (73)$$

CONCLUSIONES

En apretada síntesis se recorre evolutivamente, la forma que adopta el problema de Eshelby, desde su concepción propuesta por J. Eshelby (1957), T. Mura (1983), Mori-Tanaka (1988), observando el impacto que ha tenido sobre su formulación las diversas teorías de segundo gradiente propuestas por R. Mindlin (1964), E.A. Aifantis (1984), C. Polizzotto , (2013) entre otros. Se formula y resuelve, el problema poroviscoelástico de segundo gradiente con inclusiones, es decir con fuerzas configuracionales expresadas en el referencial deformado, y, en términos del esquema teórico de Biot, luego se construyen representaciones integrales para cada uno de los casos, los sistemas de ecuaciones integrales que se obtienen a partir del uso sistemático de la técnica de cálculo de funciones de Green y del teorema de representación de Green Lagrange, pueden resolverse por aproximaciones sucesivas o utilizando métodos de colocación adecuados. También se discute un nuevo tipo de problema de Cauchy, el cual surge asociado al carácter no local de la teoría, en este sentido son posibles diversas generalizaciones de las condiciones iniciales, lo cual deberá afectar positivamente la capacidad predictiva del modelo considerado.

APLICACIONES

Las principales áreas de aplicación de las teorías de segundo gradiente podrían agruparse en tres grandes grupos de cuestiones:

- Micro-elastodinámica de procesos de micro y nano indentacion, micro-elastodinámica de adhesión y delaminación dúctil, modificaciones a la ley de Darcy y los fenómenos de difusión micro-poro-elastodinamicos, fenómenos de inestabilidad mecánica por plasticidad intermitente en aleaciones de Molibdeno (micropillar compression) y de Aluminio Manganeso, inestabilidades químico-mecánicas en ánodos de LiB
- Bio-químico-mecánica, Inestabilidades cerebrales inducidas por Glioblastoma, teoría de segundo gradiente aplicada al tejido cerebral con porosidades y vacíos, asumiendo cierto flujo de células del glioma, puede demostrarse estabilidad intermitente, lo cual impacta en las terapéuticas propuestas.
- Teorías reológicas de segundo gradiente y superiores aplicadas a fluidos newtonianos, y a fluidos complejos, acoplamiento de las ecuaciones de la elastodinámica de segundo gradiente y generalizaciones de la ecuación de Stokes a efectos de explicar fenómenos de viscoplasticidad en emulsiones poliméricas de alta densidad, es posible estudiar también en este tipo de compuestos inclusiones e inhomogeneidades de manera análoga a como se realiza en un sólido.

CUESTIONES DE ABORDAJE COMPUTACIONAL

Respecto de las estrategias computacionales; se considera factible el uso de método de diferencias finitas no standard llamadas también diferencias finitas adaptativas, que, en oposición a las conocidas, permiten convergencia rápida aun en el caso explícito. Estas se construyen sobre una analogía respecto de las soluciones exactas del operador de que se trate El laplaciano exacto en términos de diferencias finitas no estándar con un factor de peso de tipo exponencial se vería así:

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}^2 u(x, y, z) = & \frac{1}{h_1^2} ((e^{\lambda h_1} - 1) / \lambda)^{-1} (u_{j+1, k, l} - 2u_{j, k, l} + u_{j-1, k, l}) + \\ & + \frac{1}{h_2^2} ((e^{\lambda h_2} - 1) / \lambda)^{-1} (u_{j, k+1, l} - 2u_{j, k, l} + u_{j, k-1, l}) + \\ & + \frac{1}{h_3^2} ((e^{\lambda h_3} - 1) / \lambda)^{-1} (u_{j, k, l+1} - 2u_{j, k, l} + u_{j, k, l-1}) \end{aligned}$$

$h_i = \Delta x, \Delta y, \Delta z$, λ : factor de escala

Métodos en diferencias finitas implícitos, tipo Crank-Nicolson los cuales son incondicionalmente estables, claro que, el costo computacional es elevado, y, el desarrollo de algoritmos en este caso está poco explorado

La otra posibilidad es el uso de métodos de semi-discretización, lo cual en general nos conduce a un sistema infinito numerable de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas de primero y segundo orden, para el caso lineal, el sistema es estable localmente, estos sistemas, pueden tratarse con métodos de Runge-Kutta de alto orden implícitos, lográndose convergencia y estabilidad según Von Neumann.

En algunos casos por ejemplo en geometrías semi-infinitas podría aplicarse la transformada rápida de Fourier o de Hilbert, también con coste computacional elevado

REFERENCIAS

- Haskes, H.; Aifantis E. Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scales identification procedure, finite element implementations and new results, *International Journal of Solids and structure*, 48 1962-1990, 2011
- Mickens, R. Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes, *World Scientific*. 2000
- Mickens, R. Difference Equations, Theory, Applications and Advanced Topics, Third Edition, *Monograph and Research Notes in Mathematics CRC Press*. 2015
- Mickens, R. Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations, *World Scientific* 1993
- Hahn, B. H., y Valentine, D. T. *Essential MATLAB for Engineers and Scientists*. Sexta ed. Elsevier. 2016
- Ghavanloo, E.; Fazlzadeh, S.A.; de Siarra, F.M.; Size-dependent continuum Mechanics Approaches. Theory and Applications. *Springers Tracts in Mechanical Engineering* 2021
- Aifantis, E.C.; Update on class of gradient theories. *Mech. Mater.*; 35: 259-80.2003
- Aifantis, E.C.; Gradient deformation models at nano, micro and macroscales. *ASM J.Eng. Mater.Technol.*121: 189-202 1999
- Ru, C.Q.; Aifantis E.C.; A simple approach to solve boundary value problems in gradient elasticity. *Acta Mech.*; 101 59-68. 1993
- Haskes, H.; Gitman, I. M. Review and critique of the stress gradient elasticity of Eringen and Aifantis. *International Journal of Solids and Structures*, 45 189-202, 2017
- Aifantis, E.C. Gradients effects at macro, micro and nano scales. *J. Mech. Behav. Mater.* 5: 355-75. 1994
- Aifantis, E.C., The physics of plastic deformations. *Int. J. Plasticity*; 3:211-47. 1987
- Aifantis E.C. On the microstructural origin of certain inelastic models. *ASME J. Eng. Technol.* 106: 326-30. 1984
- Altan, B. S.; Aifantis, E.C. On some aspects in the special theory of gradient elasticity. *J. Mech. Behav.* 8: 231-82 1997
- Altan, B. S.; Aifantis, E.C., On the structure of mode III crack tip in gradient elasticity. *Scripta Metall. Mater.* 26. 319-23. 1993
- Menshykov, O.V; Guz, A.; Menshykov, V.A.; Boundary Integral Equations in Elastodynamics of Interface Cracks. *Phil. Trans. R. Soc. A* 366, 1835–1839 2008
- Polizzotto, C.; A gradient elasticity theory for second grade materials and higher order inertia, *International Journal of Solids and Structures*, 49, 2121-2137, 2012
- Haskes, H., Gitman, I.M. Review and critique of the stress gradient elasticity theories of Eringen and Aifantis, *International Journal of Solids and Structures*, 45, 395– 405, 2017
- Eringen, A.C., Suhubi, E.S. Elastodynamics Vol I Finite Motions, *Academic Press*, 1974.
- Eshelby, J, D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Royal Society*, 241(1226):376–396, 1957.
- Hadjesfandiari, A.R.,Dargush, G.F. Couple stress theory for solids, *Int. J. Solids Struct.*, 48(18):2496–2510, 2011.
- Mindlin, R.D. Micro-structure in linear elasticity, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 16:51–78, 1964, *Acta Metallurgica*, 21(5):571–574, 1973.
- Mindlin, R.D. Eshel, N.N., On the first gradient theories in linear elasticity, *Int. J. Solids*

- Structures, 4: 109-124, 1968
- Lyapin, A., Chebakov, M., Kolosova, E.M., Alexiev, A. Mathematical modeling of indentation process for layered sample taking into account plastic properties of material layers. *Chapter In book: Advanced Materials* (pp.457-464) 2019
- Sharma, D.K., Mittal, H., Sharma, S.R., Parkash, I. Effect of deformation on semi-infinite visco-thermo-elastic cylinder based on five theories of generalized thermoelasticity, *Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences*, 6(1):17-35, 2017
- Rossi, R. Thomas M. From Adhesive to Brittle Delamination in Visco-Elastodynamics *arXiv:1605.09566v1 [math.AP]* 41 pag. 2016
- Albers B., Krejčí, P., Rocca E. Solvability of an unsaturated porous media flow problem with thermomechanical interaction, *Preprint. ISSN 2198-5855. Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS)* 2016

GLOSARIO

- $\mathbf{C}_{ijkl}^e, \mathbf{C}_{ijkl}^v, \mathbf{S}_{ijkl}^{Es} \in V^{3 \times 3 \times 3 \times 3}$: *Tensor- poroelástico, poro-viscoelástico y de Eshelby de cuarto orden respectivamente.*
- $w(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\vec{x}), \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}(\vec{x}))$; $\sigma_{ij}(x)$: *Densidad de energía de deformación de Mindlin, y tensor de tensiones de Cauchy*
- $l_M^2, b_\mu^2, l_{1\mu}^2, l_{2\mu}^2$: *Longitudes características micrométricas para los campos de desplazamiento y las porosidades*
- $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_0^+$: *Coefficientes de Biot. $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$: Coeficientes de acoplamiento poro-mecánicos*
- u_j, p_a, p_w : *Campo de desplazamientos, distribuciones de poro de agua y de aire respectivamente.*
- $\mathbf{M}_{ij}^a, \mathbf{M}_{ij}^w, \mathbf{J}_k^a, \mathbf{J}_k^w$: *Tensores anisotrópicos de poro de agua y de aire que acoplan el campo de porosidades y el campo poro-viscoelástico, Vectores flujo de aire y de agua respectivamente*
- $\mathbf{K}_{ij}^a, \mathbf{K}_{ij}^w$: *Tensores de anisotropía de poro de agua y aire respectivamente.*
- $\tilde{\mathbf{K}}_{ij}^a, \tilde{\mathbf{K}}_{ij}^w$: *Tensores de viscosos de poro de agua y aire respectivamente.*
- $g_{in}(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$; $g_a(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$; $g_w(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$: *Funciones de Green asociadas al campo de desplazamiento y a los campos de porosidades.*

- $\theta_a, \theta_w, \bar{\theta}_a, \bar{\theta}_w \in \mathbb{R}_0^+$: Coeficientes estructurales asociados a los campos de porosidades, constante de acoplamiento poro de aire-poro de agua y poro de agua poro de aire respectivamente.