

## INFLUENCIA DE LA COHESIÓN Y DEL ÁNGULO DE FRICCIÓN EN EL DESARROLLO DE LOS MOVIMIENTOS DE MASA: UN ANÁLISIS UTILIZANDO EL MÉTODO DEL PUNTO MATERIAL

### INFLUENCE OF COHESION AND THE FRICTION ANGLE ON THE DEVELOPMENT OF MASS MOVEMENTS: AN ANALYSIS USING THE MATERIAL POINT METHOD

Daniela Toro Rojas<sup>a</sup>, Manoel Porfirio Cordão Neto<sup>a</sup> y Raydel Lorenzo Reinaldo<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Posgraduación en Geotecnia, Universidad de Brasilia, Campus Universitario Darcy Ribeiro, Brasilia DF, Brasil, <https://geotecnia.unb.br/index.php/pt/>*

<sup>b</sup> *Programa de Ingeniería Civil, Universidad Federal de Tocantins, Palmas, Brasil, <https://ww2.uft.edu.br/index.php/>*

**Palabras clave:** Movimientos de masa, Método del Punto Material, Parámetros de Resistencia al Corte, Ruptura.

**Resumen.** Los movimientos de masa son fenómenos naturales frecuentes y especialmente peligrosos por el aumento de la población y su ocupación irregular en las zonas montañosas. La realización de estudios utilizando métodos numéricos que permitan evaluar su comportamiento es fundamental para mitigar y prevenir los posibles impactos generados por estos eventos. Los métodos tradicionales de Equilibrio Límite (MEL) y Elementos Finitos (MEF) no pueden reproducir el problema desde el inicio del movimiento hasta el final de su desarrollo, por lo que se hace necesario utilizar nuevas formulaciones. En este artículo se utilizó el Método del Punto Material (MPM) para evaluar estos movimientos en su etapa de desarrollo mediante un análisis de los parámetros de resistencia al corte, utilizando el modelo elastoplástico Mohr-Coulomb. Los resultados obtenidos se analizaron para identificar la influencia de la cohesión y el ángulo de atrito en cada etapa estudiada. Se encontró que estos parámetros influyen de manera importante el comportamiento del movimiento de masa después de la ruptura, incluyendo las formas, velocidades y distancia alcanzada por los deslizamientos.

**Keywords:** Mass movements, Material Point Method, Shear strength parameters, Failure.

**Abstract.** Mass movements are frequent natural phenomena and especially dangerous due to increased population and irregular occupation in mountainous areas. Carrying out studies using numerical methods that evaluate their behavior is essential to mitigate and prevent the possible impacts of these events. Traditional Limit Equilibrium (MEL) and Finite Element (FEM) methods cannot reproduce the problem from the beginning of the movement to the end of its development, so it is necessary to use new formulations. In this article, the Material Point Method (MPM) was selected to evaluate these movements in their development stage by analyzing the shear strength parameters using the Mohr-Coulomb elastoplastic model. The results obtained were analyzed to identify the influence of cohesion and friction angle in each stage studied. These parameters were found to significantly influence the behavior of mass movement after failures, including the shapes, velocities, and distance reached by landslides.

## 1 INTRODUCCIÓN

Los deslizamientos de tierra, avalanchas y movimientos de masa en general son catástrofes que pueden ocurrir con frecuencia siendo especialmente peligrosas por el aumento de la población y su ocupación irregular en zonas montañosas. Estos movimientos se generan por una disminución de la resistencia interna del material que se opone al movimiento de la masa deslizante y/o por un aumento de las tensiones externas aplicadas al macizo.

En la mayoría de los casos las inestabilidades se generan cuando las fuerzas movilizadas superan la resistencia de los materiales a ser arrastrados o desplazados debido a los cambios en las características del talud por factores geométricos (altura, inclinación), condicionantes o intrínsecos a los materiales (geología, hidrogeología y geotecnia) y desencadenantes (cargas dinámicas, variación de las condiciones hidrogeológicas, factores climáticos, variaciones de geometría y reducción de parámetros de resistencia). Estas inestabilidades hacen de los movimientos de masa un fenómeno importante cuyas principales consecuencias en términos de impactos son la pérdida de vidas, los desastres ambientales y la destrucción de la infraestructura existente.

Para simular el comportamiento de este tipo de fenómenos, con el fin de mejorar el análisis de riesgos, se desarrollaron modelos físicos y matemáticos que también tienen como objetivo prevenir los movimientos de masa. Entre los modelos matemáticos, el Método de Equilibrio Límite (MEL) es el más conocido. Se enfoca en calcular el factor de seguridad mediante el uso de teorías de resistencia del material (Beneyto et al. 2011) considerando la masa del suelo como un cuerpo rígido indeformable. El Método de Elementos Finitos (MEF), por otro lado, se ha utilizado como una herramienta más precisa para resolver la mayoría de los problemas en mecánica de sólidos y mecánica de suelos (Nazem et al. 2006). Estos métodos se enfocan únicamente en el comportamiento de los taludes antes de la falla y el inicio de la inestabilidad, sin considerar el estudio del desarrollo del movimiento, es decir, los eventos después de la falla.

No obstante, para modelar el comportamiento de los movimientos de masa con buena precisión después de la ruptura, es necesario un método numérico que siga el movimiento del cuerpo simulado y describa su comportamiento, es decir, un método capaz de simular grandes desplazamientos y deformaciones. Actualmente el MEF es la herramienta más utilizada en el cálculo de deformaciones en problemas de geotecnia, sin embargo, no es posible obtener resultados confiables en problemas de grandes deformaciones utilizando esta metodología con su formulación tradicional debido a excesivas distorsiones de la malla (Nazem y Sheng, 2005). Para superar esta dificultad, se propusieron otros métodos como el Método de Galerkin libre de Elementos (EFMG), el método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), el Método Euleriano Lagrangeano Arbitrario (ALE) y el Método del Punto Material (MPM).

El MPM es una herramienta adecuada para resolver problemas de grandes deformaciones relacionados con la ingeniería geotécnica, donde el punto material se entiende como un elemento de volumen elemental. Esta herramienta utiliza modelos constitutivos basados en la mecánica del continuo como los modelos elastoplásticos de Mohr-Coulomb, Cam-Clay Modificado, entre otros. Además, el uso de una malla de fondo permite la implementación de condiciones de contorno de manera similar al MEF y en comparación con otros métodos sin malla, el MPM es computacionalmente eficiente (Abe et al. 2013).

El MPM se ha utilizado para simular diferentes problemas geotécnicos como cimentaciones (Lorenzo et al. 2017), ensayos relacionados con deformaciones inducidas por movimientos de fallas (Johansson y Konagai, 2007), modelado de cargas de excavadoras (Coetzee et al. 2006), modelado de anclajes de suelo (Coetzee et al. 2005), análisis de propagación de flujos en suelos inducidos por terremotos (Konagai et al. 2004), problemas de

flujo granular en un silo (Wieckowski 2003) y respuesta de geomembranas a asentamientos (Zhou et al. 1999). Otros autores han estado trabajando con movimientos de masa como González Acosta et al. (2018) quienes realizaron un análisis de impacto de un deslizamiento contra una pared rígida considerando múltiples condiciones iniciales para identificar las más críticas. Vardon y et al. (2017) realizaron varias simulaciones de ruptura de taludes desde el inicio hasta el desarrollo del movimiento para cuantificar mejor el riesgo y las consecuencias de estos eventos. Bhandari et al. (2016) utilizaron el MPM para simular la falla progresiva de un talud causada por un terremoto. Gabrieli & Ceccato (2016) simularon el impacto de un flujo granular seco sobre una pared rígida y compararon sus resultados con los obtenidos con el Método de Elementos Discretos (DEM) obteniendo buenas aproximaciones con ambos métodos. Llano et al. (2015) simularon el deslizamiento de un talud urbano para calcular variables de velocidad y energía que permitieran cuantificar la vulnerabilidad de estructuras y personas sujetas al impacto y Mast et al. (2014), utilizaron el MPM para simular rupturas de taludes desencadenadas por la gravedad y posteriormente evaluar la interacción de esos eventos con el ambiente construido.

Aprovechando las ventajas que ofrece el MPM, este artículo estudia la influencia del ángulo de fricción y la cohesión en la formación de mecanismos de ruptura y en el desarrollo de movimientos de masa.

## 2 MATERIALES Y MÉTODOS

Como se indicó anteriormente, el MPM desarrollado por Sulsky et al. (1994, 1995), se utilizó para realizar las simulaciones de este artículo. El MPM reúne ideas y procedimientos del Método de Partículas en Células (PIC) y el MEF. Los cuerpos se discretizan en un conjunto de partículas no conectadas que portan una masa cuyo valor se mantiene fijo para asegurar la conservación de la masa. También se asignan a los puntos materiales otros parámetros necesarios para definir el estado del cuerpo como la tensión, la densidad y el historial de variables (Zabala 2010). La interacción entre las partículas se realiza en los nodos de una malla computacional euleriana estacionaria como las utilizadas en el MEF, que permanece constante durante todo el cálculo eliminando el problema de distorsión. Esta malla se utiliza para determinar la solución incremental de las ecuaciones gobernantes a través de una descripción euleriana (Al-Kafaji, 2013).

En este método las ecuaciones de movimiento se resuelven en la malla de fondo que cubre todo el dominio del problema. En cada paso del análisis las cantidades transportadas por los puntos materiales se interpolan a los nodos de la malla utilizando las funciones asociadas a ellos como en el MEF. Las condiciones de contorno se imponen en los nodos de la malla y las ecuaciones se resuelven de forma incremental. En seguida, las magnitudes de las variables en los puntos materiales se actualizan ponderando los resultados de los nodos usando nuevamente las mismas funciones de forma. En el MPM la información almacenada en la malla no es necesaria en los siguientes pasos de análisis y puede descartarse (Zabala, 2010).

Para realizar los análisis mediante el MPM se estudió la influencia de la cohesión en el desarrollo de un movimiento de masa, variando sus valores entre 0 kPa y 20 kPa. Para ello fue necesario utilizar la geometría de la Figura 1 cuyo tamaño de cimentación es pequeño para forzar que la ruptura ocurra en el propio talud. Los otros parámetros del material como el ángulo de fricción, el módulo de Young, la densidad y el coeficiente de Poisson se mantuvieron inalterados (ver Tabla 1). Los resultados se evaluaron en tres puntos materiales ubicados en el pie, la mitad y la corona del talud.

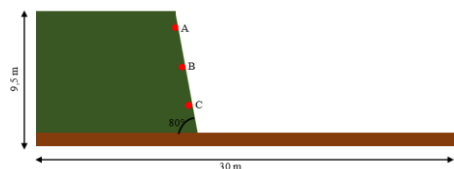


Figura 1: Geometría utilizada para evaluar la influencia de la cohesión

Material	Tipo	Parámetros	Valor
Suelo	Material Seco	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	2200
		Módulo de Young (MPa)	30
		Poisson	0.33
		Ángulo de atrito (°)	30
		Cohesión (kPa)	0
			5
			10
20			
Cimentación	Material Seco	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	2500
		Módulo de Young (GPa)	4
		Poisson	0.33

Tabla 1: Propiedades de los materiales para evaluar la influencia de la cohesión

En el modelo, se utilizaron cuatro puntos materiales por celda en el talud y la cimentación. La malla de fondo se generó con 78966 elementos tetraédricos y estructurados con un total de 124915 nodos. En las condiciones de contorno se restringieron los desplazamientos totales en la base de la cimentación, los verticales en la parte superior del problema, los horizontales en el lado del talud y los de profundidad en las caras de la geometría.

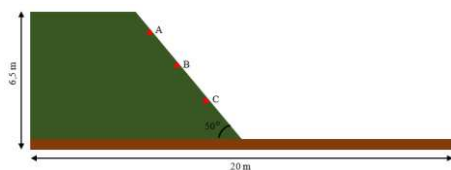


Figura 2: geometría utilizada para evaluar la influencia del ángulo de fricción

Material	Tipo	Parámetros	Valor
Suelo	Material Seco	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	2200
		Módulo de Young (MPa)	30
		Poisson	0,33
		Ángulo de atrito (°)	20
			25
			30
			35
Cohesión (kPa)	0		
Cimentación	Material Seco	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	2500
		Módulo de Young (GPa)	4
		Poisson	0.33

Tabla 2: Propiedades de los materiales para evaluar la influencia del ángulo de fricción

En una segunda etapa y con el fin de estudiar la influencia del ángulo de fricción, se

cambió el parámetro en el rango de  $20^\circ \leq \phi' \leq 40^\circ$ . Se utilizó la geometría de la Figura 2 y los parámetros presentados en la Tabla 2. Al igual que en el análisis de cohesión, se evaluaron los desplazamientos y velocidades de tres puntos materiales ubicados en el pie, la mitad y la corona del talud.

El modelo fue discretizado con cuatro puntos materiales por celda y una malla de fondo con 52290 elementos tetraédricos y estructurados generando 82999 nodos. En las condiciones de contorno se restringieron los desplazamientos totales en la base de la cimentación, los verticales en la parte superior del problema, los horizontales en el lado del talud y los de profundidad en las caras de la geometría.

### 3 RESULTADOS

#### 3.1 Influencia de la cohesión

La superficie de ruptura con diferentes valores de cohesión se muestra en la Figura 3. Se observa que la masa a ser desplazada tiene el mismo tamaño y forma en todos los casos, sin embargo, el tiempo de formación de dicha superficie disminuye cuando aumenta la cohesión o, visto de otra manera, el movimiento se acelera cuando la cohesión tiende a ser baja.

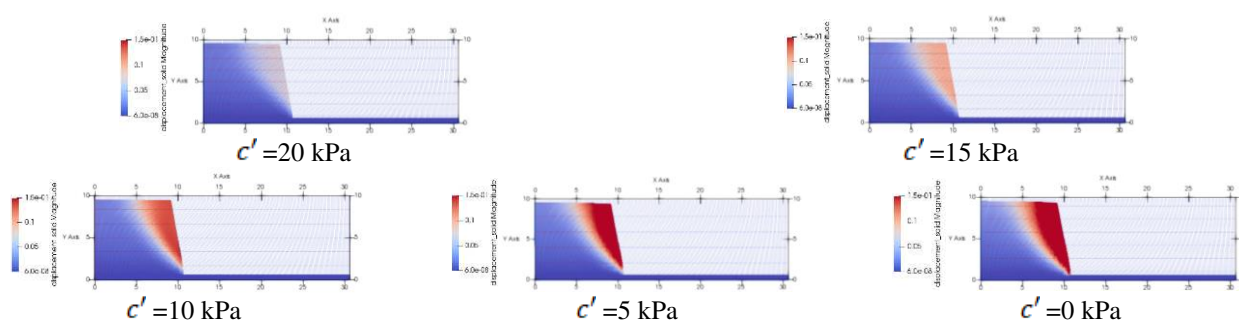


Figura 3: Formación de la superficie de ruptura con diferentes valores de cohesión

El desarrollo final de los desplazamientos se muestra en la Figura 4. El comportamiento de los movimientos fue inesperado y se especula que la causa es la limitación del modelo constitutivo (elástico perfectamente plástico) para representar el deslizamiento una vez alcanzadas las deformaciones plásticas. En la ruptura se espera que los valores de ángulo de fricción y cohesión varíen hasta alcanzar un valor residual. Autores como Vardon et al. (2017) y Wang et al. (2018) trabajaron con el concepto de cohesión residual empleando otros modelos constitutivos para estudiar su influencia en algunos movimientos de masa obteniendo óptimos resultados.

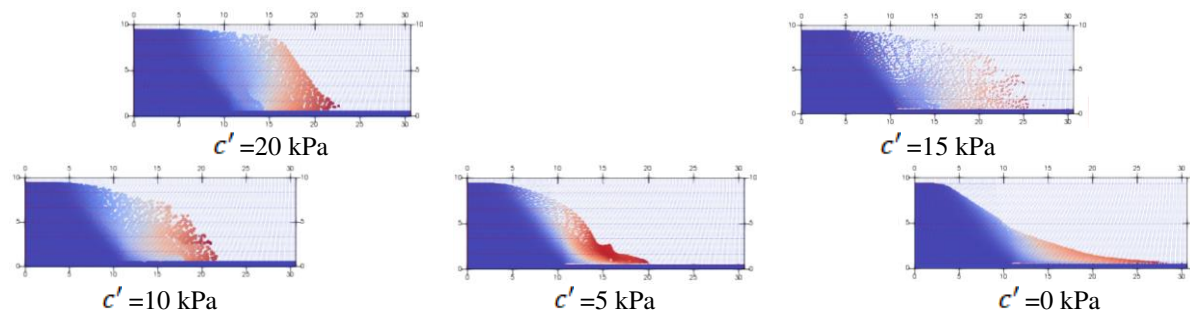


Figura 4: Desarrollo del movimiento con diferentes valores de cohesión

En el caso del talud analizado con cohesión de 0 kPa, el mecanismo de ruptura es plano y

su desarrollo se produce como se esperaba: deslizando sobre la superficie de ruptura hasta que se estabiliza (Figura 5).

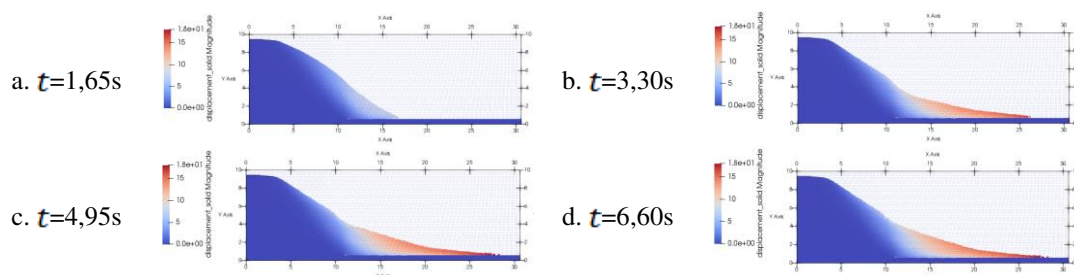


Figura 5: Mecanismo de ruptura y desarrollo del movimiento con  $c' = 0$  kPa

El talud analizado con cohesión de 5 kPa tiene un comportamiento inesperado si se considera el pequeño incremento en el valor de la propiedad. Se observa un pico (vértice) al inicio de la simulación y continúa hasta que el movimiento se estabiliza en una geometría también inesperada (Figura 6).

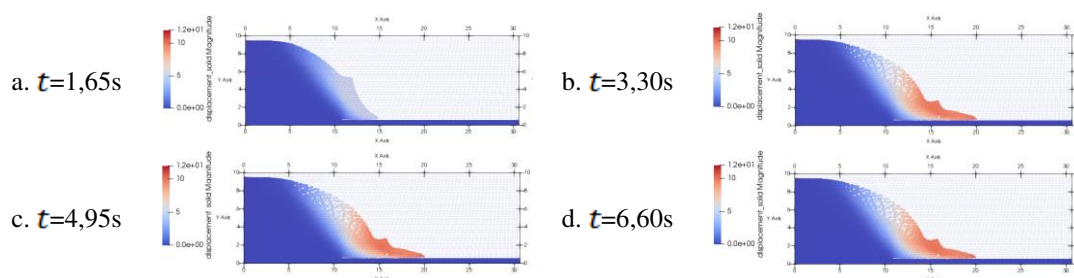


Figura 6: Mecanismo de ruptura y desarrollo del movimiento con  $c' = 5$  kPa

Con 10 kPa inicialmente hay un proceso de deslizamiento similar al anterior (Figura 7a). Sin embargo, al llegar a la superficie plana (Figura 7b), estos puntos tienden a estabilizarse y la masa superpuesta permanece en movimiento (Figura 7c). Debido al valor de la cohesión la masa permanece adherida generando un movimiento de rotación similar a un volcamiento (Figura 7d). Si el modelo constitutivo permitiera la reducción del valor de cohesión con deformaciones plásticas, se esperaría que este movimiento no ocurriera y que el mecanismo de ruptura se asemejara al esperado, es decir, un movimiento tipo “deslizamiento”.

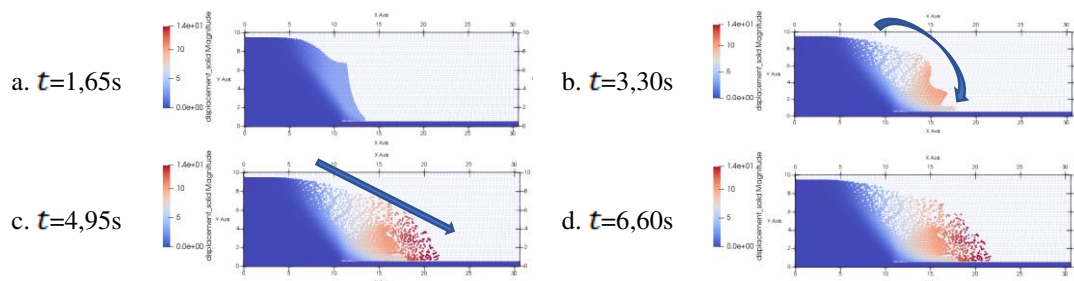


Figura 7: Mecanismo de ruptura y desarrollo del movimiento con  $c' = 10$  kPa

El talud analizado con cohesión de 15 kPa presenta nuevamente un volcamiento, esta vez más definido y evidente, sin embargo, desarrollándose un poco más lento (Figura 8).

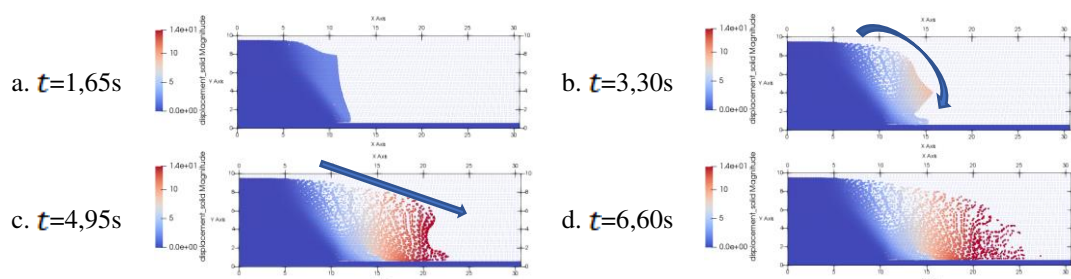


Figura 8: Mecanismo de ruptura y desarrollo del movimiento con  $c' = 15$  kPa

La Figura 9 muestra el movimiento de masa cuando el talud se simula con una cohesión de 20 kPa. Se observa que el movimiento es más lento que los demás y la distancia recorrida es menor en comparación con la simulación hecha con  $c' = 15$  kPa. La masa deslizante en este caso hace una curvatura inesperada cuando los primeros puntos golpean la superficie plana. Lo que se espera en todos los casos es que se produzca un proceso de deslizamiento continuo y no un movimiento de rotación.

Estos resultados justifican la necesidad de implementar un modelo constitutivo que permita reducir el valor de la cohesión una vez que se producen deformaciones plásticas durante la ruptura. En este caso sería posible evaluar una influencia más real de esta propiedad en los movimientos de masa.

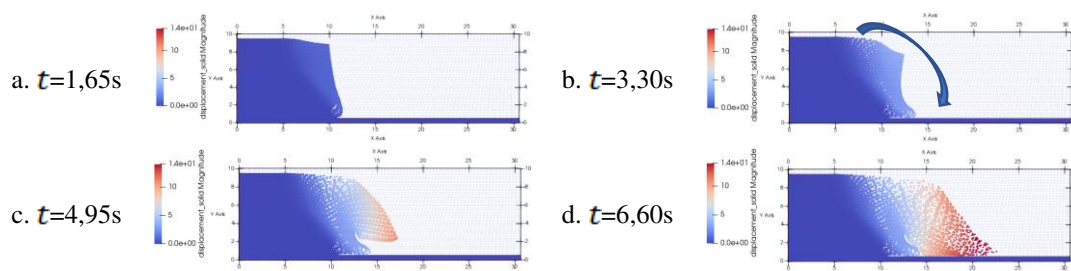


Figura 9: Mecanismo de ruptura y desarrollo del movimiento con  $c' = 20$  kPa

Para facilidad del lector son presentados los desplazamientos y las velocidades del punto en la corona del talud (Figura 10) que presentan un comportamiento totalmente heterogéneo de acuerdo con lo que se muestra en los mecanismos de ruptura y desarrollo del movimiento. Aunque los mayores desplazamientos corresponden a una cohesión de 0 kPa, los puntos con 10 kPa, 15 kPa y 20 kPa también alcanzan magnitudes elevadas con valores máximos muy cercanos alcanzados en diferentes momentos, motivo por el cual las velocidades alcanzan valores máximos y comportamientos diferentes con los valores más altos de cohesión. También se observa que existen dos picos de velocidad debido al volcamiento generado en el desarrollo del movimiento.

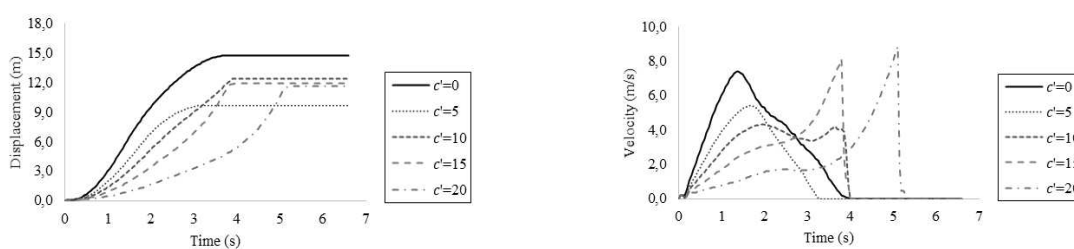


Figura 10: Desplazamiento y velocidad del punto A para diferentes cohesiones

### 3.2 Influencia del ángulo de fricción

En todos los casos estudiados el movimiento de masa evaluado con diferentes valores de ángulo de fricción fue progresivo. En la Figura 11 es posible observar la formación de la superficie de ruptura cuando el parámetro aumenta. Nótese que la superficie y los desplazamientos que se presentan ante la inminencia de la ruptura son mayores con bajos valores de ángulo de fricción.

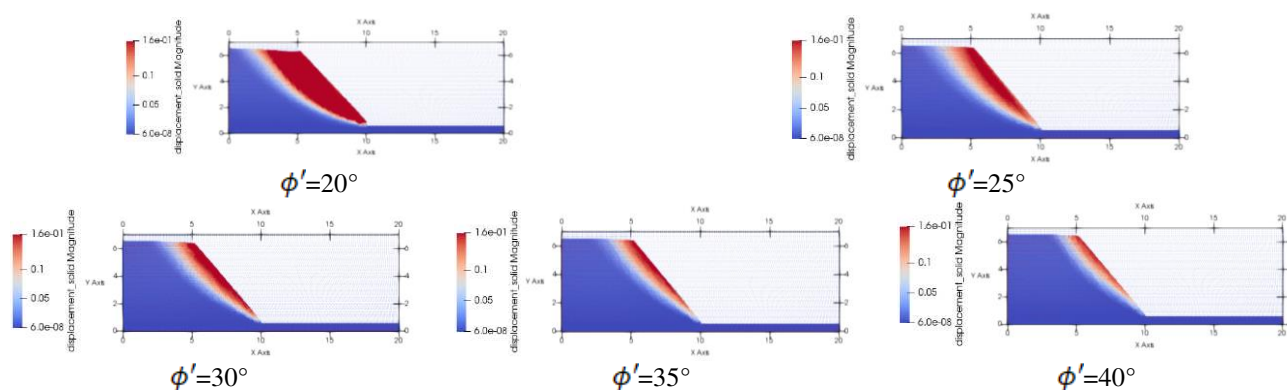


Figura 11: Formación de la superficie de ruptura con diferentes ángulos de fricción

La Figura 12 muestra la distancia recorrida por la masa inestable en cada caso analizado. En este caso se puede observar que el ángulo de fricción determina el número de puntos plastificados haciendo con que la rigidez cortante tienda a cero. Cuando aumenta el ángulo de fricción el número de puntos plastificados es menor disminuyendo el tamaño de la superficie de ruptura. Con el menor ángulo ( $\phi' = 20^\circ$ ) el material alcanza la distancia máxima de 20 m delimitada por el dominio, que puede ser mayor si su borde se extendiera ya que el material termina acumulándose en la esquina de la geometría. Cuando aumenta el ángulo, la resistencia al movimiento es mayor y, por tanto, la distancia recorrida disminuye. Con los ángulos de fricción de  $20^\circ$  y  $25^\circ$  se presenta un efecto de borde que puede comprometer los resultados, sin embargo, por razones de comparación, se mantuvo la misma geometría en todos los casos para evaluar mejor las diferencias. También se observa que la estabilidad en todos los casos se logra cuando se forma el ángulo de reposo que corresponde al mismo valor del ángulo de fricción.

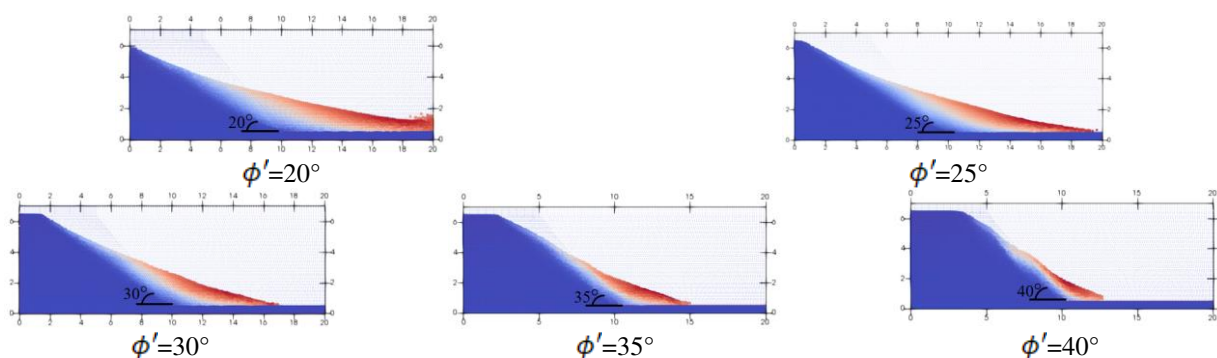


Figura 12: Distancia alcanzada con diferentes ángulos de fricción

Como en el análisis de cohesión, para facilidad del lector, son presentados los desplazamientos y velocidades del punto ubicado en la corona del talud (Figura 13). Con baja fricción, los desplazamientos son hasta tres veces mayores que los presentados con fricción



$\phi \geq 30^\circ$ . La velocidad no muestra grandes diferencias en las magnitudes máximas alcanzadas, aunque aumenta progresivamente a medida que disminuye la fricción. El pico de magnitudes y la subsiguiente disminución de velocidades corresponden al cambio de inclinación hacia el plano horizontal (cimentación).

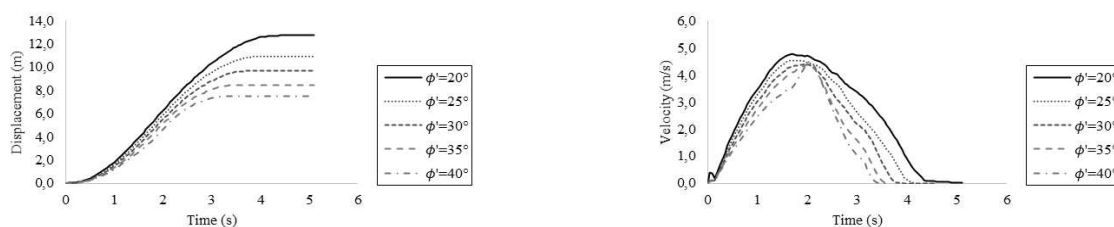


Figura 13: Desplazamiento y velocidad del punto A para diferentes ángulos de fricción

#### 4 CONCLUSIONES

Los estudios demostraron que pequeñas variaciones en la cohesión determinan la evolución de un movimiento de masa. Cuando la ruptura es alcanzada en un modelo elástico perfectamente plástico como el de Mohr-Coulomb, la rigidez tiende a cero y el factor que determina las distancias recorridas o las velocidades alcanzadas es la cohesión según los casos analizados. El aumento o disminución de la cohesión en pequeñas magnitudes determinará la formación del mecanismo de ruptura y el desarrollo del movimiento de masa.

Sin embargo, el estudio de la cohesión en una geometría diferente con valores hasta 20 veces superiores a los inicialmente utilizados no arrojó resultados concluyentes. El aumento en la magnitud de este parámetro hizo que los taludes modelados presentaran un volcamiento y no el tipo de deslizamiento esperado. El tiempo en el que se desarrolló el movimiento aumentó o disminuyó sin un patrón aparente, ya que las variables de distancia y velocidad eran difíciles de predecir. Según la revisión de la literatura, estos resultados pueden ser el efecto de utilizar un modelo elástico perfectamente plástico que no contempla la reducción de la cohesión a un valor residual cuando se alcanzan deformaciones plásticas después de la ruptura, es decir, puede ser una respuesta a la limitación del modelo constitutivo.

La influencia del ángulo de fricción se explicó mediante una geometría poco inclinada que permitió estudiar los valores de  $\phi$  en un rango considerable. En este caso, el ángulo de fricción determina la estabilidad de un movimiento si su valor es alto y, en su desarrollo, definirá la distancia recorrida por la masa inestable. En un material puramente friccional, se encontró que después de la ruptura, el movimiento se estabiliza cuando se forma el ángulo de reposo correspondiente al mismo valor del ángulo de fricción.

#### REFERENCIAS

- Abe, K., Soga, K., and Bandara, S. (2013). Material point method for coupled hydromechanical problems. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 140(3), 2013.
- Al-Kafaji, I. Formulation of a dynamic material point method (MPM) for geomechanical problems [Dissertation, Universität Stuttgart]. Online Publikationen der Universität Stuttgart, 2013.
- Beneyto, P., Gutierrez, G., Mroginski, J., Di Rado, H and Awruch, A. Análisis de estabilidad de taludes mediante técnicas de optimización heurística. *Mecánica computacional*. XXXI: 845-856, 2011.
- Bhandari, T., Hamad, F., Moormann, C., Sharma, K and Westrich, B. Numerical modelling of seismic slope failure using MPM. *Computers and Geotechnics*, 75:126-134, 2016.

- Coetzee, C. J., Basson, A. H., and Vermeer, P. A. Discrete and continuum modelling of excavator bucket filling. *Journal of Terramechanics*, 44(2):177-186, 2006.
- Coetzee, C. J., Vermeer, P. A., and Basson, A. H. The modeling of anchors using the material point method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29(9):879-895, 2005.
- Gabrieli, F. and Ceccato, F. Impact of dry granular flows on a rigid wall: discrete and continuum approach. In *VI Italian conference of researchers in Geotechnical Engineering*, Padova, Italia, 2016.
- González Acosta, L., Pantev, I., Vardon P.J. and Hicks M.A. The use of MPM to estimate the behaviour of rigid structures during landslides. *Numerical Methods in Geotechnical Engineering IX*. Porto, Portugal, 2018.
- Johansson, J. and Konagai, K. Fault induced permanent ground deformations: experimental verification of wet and dry soil, numerical findings' relation to field observations of tunnel damage and implications for design. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27(10):938-956, 2007.
- Konagai, K., Johansson, J. and Itoh, H. (2004) Pseudo-three dimensional lagrangian particle finite difference method for modeling earthquake induced soil flows. *13th World Conference on Earthquake Engineering*. No 547, 2004.
- Llano, M., Farias, M. M. and Martinez, H. (2015). Numerical modeling of the High Green slip using the material point method. *DYNA* 82 (193):150-159.
- Lorenzo, R., Cunha, R., Cordão-Neto, M. P. and Nairn, J. Numerical Simulation of the Installation of Jacked Piles in Sand with the Material Point Method. *Canadian Geotechnical Journal* 4:55-65, 2017.
- Mast, C., Arduino, P., Miller, G. and Mackenzie, P. Avalanche and landslide simulation using the material point method: flow dynamics and force interaction with structures. *Computational Geosciences*, 18(5):817-830, 2014.
- Nazem, M., & Sheng, D. Arbitrary lagrangian-eulerian method for consolidation problems in geomechanics. In *Proceedings of the International Conference on Computational Plasticity (COMPLAS)* (Vol. 8), Barcelona, 2005.
- Nazem, M., Sheng, D. and Carter, J.P. (2006). Stress integration and mesh refinement for large deformation in geomechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(7):1002-1027, 2006.
- Sulsky, D., Chen, Z. and Schreyer, H.L. A particle method for history-dependent materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 118(1-2):179-196, 1994.
- Sulsky, D., Zhou, S.J., and Schreyer, H.L. (1995). Application of a particle-in-cell method to solid mechanics. *Computer Physics Communications*, 87(1-2):236-252, 1995
- Vardon, P., Wang, B. and Hicks, M. Slope failure simulations with MPM. 1st International Conference on the Material Point Method. *Procedia Engineering*, 175:258-264, 2017.
- Wang, B., Vardon, P. & Hicks, M. Rainfall-induced slope collapse with coupled material point method. *Engineering Geology* 239:1-12, 2018.
- Wieckowski, Z. Modelling of silo discharge and filling problems by the material point method. *TASK Quarterly*. 7(4):701-21, 2003.
- Zabala, F. Modeling of hydromechanical geotechnical problems using the material point method [Doctoral thesis]. Polytechnic University of Catalonia, 2010.
- Zhou, S., Stormont, J. and Chen, Z. Simulation of Geomembrane Response to Settlement in Landfills by using the Material Point Method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 23(15): 1977-1994, 1999.