

## INTEGRACIÓN SEGMENTARIA DE ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS

### SEGMENTARY INTEGRATION OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Alberto J. Ferrari<sup>a</sup>, Luis P. Lara<sup>b</sup>, Mariela C. Olguin<sup>a</sup> y Eduardo A. Santillan Marcus<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Matemática, Escuela de Formación Básica, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Av. Pellegrini 250, S2000 Rosario, Argentina, aferrari@fceia.unr.edu.ar, mcolguin@fceia.unr.edu.ar, edus@fceia.unr.edu.ar*

<sup>b</sup>*Departamento de Sistemas, Universidad del Centro Educativo Latinoamericano, Av. Pellegrini 1332, S2000 Rosario, Argentina, lplara2014@gmail.com*

**Palabras clave:** Integración segmentaria, ecuaciones diferenciales fraccionarias, derivada fraccionaria de Caputo.

**Resumen.** Las ecuaciones diferenciales fraccionarias son de gran importancia en la modelización de fenómenos disipativos como puede verse en (L. Changpin, Z. Fanhai, Numerical Methods for Fractional Calculus, Taylor and Francis Group, (2015)). La solución explícita es muy poco frecuente, razón por la cual los métodos de aproximación y los numéricos son de gran importancia para su resolución. Existe una gran variedad de métodos para esto, por ejemplo los directos que se basan en discretizar la derivada o los que transforman la ecuación en una ecuación integral de Volterra. Aquí se realiza una variante del trabajo presentado en (A.J. Ferrari, L.P. Lara, M.C. Olguin, E.A. Santillan Marcus, *Oscilaciones transversales en un medio elástico unidimensional con memoria*, Mecánica Computacional (MECOM) 2021, pp. 159–166, (2021)), a partir de las funciones de Mittag-Leffler. Se desarrolla un método iterativo para determinar en forma explícita la solución segmentaria aproximada de ecuaciones diferenciales fraccionarias de la forma: derivada fraccionaria de Caputo de orden  $n$  ( $n$  entre 1 y 2) de  $y$  más  $g$  por  $y$  igual a 0, con condiciones iniciales y de contorno. Se presenta además un estudio de convergencia y se analiza el error de la aproximación a través de distintos ejemplos.

**Keywords:** Segmentary integration, fractional differential equations, Caputo fractional derivative.

**Abstract.** Fractional differential equations are of great importance in the modeling of dissipative phenomena as can be seen in (L. Changpin, Z. Fanhai, Numerical Methods for Fractional Calculus, Taylor and Francis Group, (2015)). The explicit solution is very rare, which is why approximation and numerical methods are of great importance for its resolution. There is a great variety of methods for this, for example the direct ones that are based on discretizing the derivative or those that transform the equation into a Volterra integral equation. Here is done a variant of the work presented in (A.J. Ferrari, L.P. Lara, M.C. Olguin, E.A. Santillan Marcus, *Oscilaciones transversales en un medio elástico unidimensional con memoria*, Mecánica Computacional (MECOM) 2021, pp. 159–166, (2021)), based on the Mittag-Leffler functions. An iterative method is developed to explicitly determine the approximate segmentary solution of fractional differential equations of the form: Caputo fractional derivative of order  $n$  ( $n$  between 1 and 2) of  $y$  plus  $g$  multiplied by  $y$  equal to 0, with initial and boundary conditions. A convergence study is also presented and the error of the approximation is analyzed through different examples.

## 1. INTRODUCCIÓN

En Odibat (2010) se realiza un estudio analítico de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales fraccionarios. En Baleanu et al. (1972); Changpin y Fanhai (2015); Ferrari et al. (2020a,b); Ghorbani (2008); Khana et al. (2011); Lara (2008); Odibat (2009); Wu (2011) se desarrollan métodos iterativos variacionales para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales y no lineales. Aquí se realiza una variante del trabajo presentado en Ferrari et al. (2021), a partir de las funciones de Mittag-Leffler. Se desarrolla un método segmentario para determinar en forma explícita la solución segmentaria aproximada de ecuaciones diferenciales fraccionarias de la forma  $D_a^\alpha y(x) = q(x) y(x)$ ,  $1 < \alpha \leq 2$  con condiciones iniciales.

En la Sección 2 se realiza la descripción del método de integración segmentaria (MIS) mediante el cual se obtiene una solución aproximada del problema presentado. En la Sección 3 se obtiene un resultado de convergencia. En la Sección 4 este resultado se corrobora mediante dos ejemplos: un problema con condiciones iniciales a partir de la ecuación de Mathieu y en el que además se muestra gráficamente el comportamiento de la solución aproximada con respecto a cambios en el orden de derivación fraccionario en la ecuación; y un segundo ejemplo a partir de la ecuación de Hermite con condiciones iniciales en el que se repite este estudio. En la Sección 5 se considera un problema en el cual la ecuación que gobierna el sistema es no lineal con condiciones iniciales. Finalmente, en la Sección 6, se establecen las conclusiones.

### 1.1. Definición de derivada fraccionaria de Caputo

Sea  $\alpha$  un número real positivo y denotemos con  $n = \lceil \alpha \rceil$  al menor entero mayor que  $\alpha$ . Se define la derivada fraccionaria de Caputo de una función  $y(x)$  de variable real,  $n$  veces derivable y se nota  $D_a^\alpha y(x)$ , como (Diethelm, 2010; Kilbas et al., 2006):

$$D_a^\alpha y(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(s)}{(x - s)^{\alpha - n + 1}} ds, \quad (1)$$

donde  $y^{(n)}(s)$  indica la derivada clásica  $n$ -ésima de la función  $y$  y  $\alpha$  es el orden de derivación fraccionario. Como se mencionó en la introducción, se considerará  $1 < \alpha \leq 2$ , por lo que el único valor posible de  $n$  es  $n = 2$ .

## 2. MÉTODO DE INTEGRACIÓN SEGMENTARIA

El objetivo de este trabajo es hallar una solución aproximada del siguiente problema, que consta de una ecuación en derivada de orden fraccionario  $\alpha$  con  $1 < \alpha \leq 2$  sujeta a condiciones iniciales (Narahari et al., 2001; Tofighi, 2003):

$$\begin{cases} D_a^\alpha y(x) = q(x) y(x), & x \in [a, b], \\ y(a) = y_a, \\ y'(a) = y'_a, \end{cases} \quad (2)$$

donde  $y'(x)$  es la derivada primera clásica de la función  $y(x)$  y la función  $q$  es una función real definida sobre el intervalo  $[a, b]$ , con  $q(x) \in C^1[a, b]$ .

Se considera una grilla uniforme sobre el intervalo  $[a, b]$ , dada por los nodos  $x_k = a + hk$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$  para  $N$  dado y  $h = \frac{b-a}{N}$ . Se definen  $y_k = y(x_k)$  e  $y'_k = y'(x_k)$  para  $k = 0, 1, \dots, N$  y los subintervalos  $I_k = [x_k, x_{k+1})$  para  $k = 0, 1, \dots, N - 2$  y el subintervalo  $I_{N-1} = [x_{N-1}, b]$ .

En el intervalo  $[a, b]$  se establece la función  $Q$  seccionalmente constante de modo tal que  $Q(x) = q_k$  si  $x \in I_k$  para  $k = 0, \dots, N - 1$ , con  $q_k$  definida como:

$$q_k = \frac{1}{h} \int_{x_k}^{x_{k+1}} q(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \tag{3}$$

Ahora, se considera el siguiente problema a valores iniciales en el intervalo  $I_0$ :

$$\begin{cases} D_a^\alpha \tilde{y}_0(x) = q_0 \tilde{y}_0(x), & x \in I_0, \\ \tilde{y}_0(a) = y_a, \\ \tilde{y}'_0(a) = y'_a. \end{cases} \tag{4}$$

A continuación, para  $k = 1, \dots, N - 1$ , se consideran los siguientes problemas en los intervalos  $I_k$  cuyos valores iniciales están dados a partir de la solución aproximada obtenida en el intervalo  $I_{k-1}$ .

$$\begin{cases} D_a^\alpha \tilde{y}_k(x) = q_k \tilde{y}_k(x), & x \in I_k, \\ \tilde{y}_k(x_k) = \tilde{y}_{k-1}(x_k), \\ \tilde{y}'_k(x_k) = \tilde{y}'_{k-1}(x_k). \end{cases} \tag{5}$$

Por lo tanto, la solución del problema planteado en (2) es aproximada por la función  $\tilde{y}$  definida de modo tal que:

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_k(x) \text{ si } x \in I_k \text{ para } k = 0, \dots, N - 1,$$

siendo  $\tilde{y}_0(x)$  la solución de (4) e  $\tilde{y}_k(x)$  las soluciones de (5) para  $k = 1, \dots, N - 1$ .

La característica principal de este método segmentario, radica en que las ecuaciones en derivadas fraccionarias en (4) y (5) poseen solución explícita en términos de la función de Mittag-Leffler (Diethelm, 2010; Kilbas et al., 2006) siendo la misma de la forma:

$$\tilde{y}_k(x) = c_{1k} E_{\alpha,1}(q_k x^\alpha) + c_{2k} x E_{\alpha,2}(q_k x^\alpha), \tag{6}$$

con la función de Mittag Leffler  $E_{\alpha,\beta}$  definida como:

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \beta)} x^k. \tag{7}$$

### 3. RESULTADOS DE CONVERGENCIA

En esta sección se muestra que la solución aproximada segmentaria  $\tilde{y}(x)$  converge a  $y(x)$  que es la solución de la Ec. (2), cuando el parámetro  $h$  tiende a 0.

Aplicando la integral de Riemann-Liouville de orden  $\alpha$  en ambos miembros de la Ec. (2), resulta una ecuación integral de Volterra de segunda especie (Diethelm, 2010):

$$y(x) = y_a + y'_a(x - a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} q(t) y(t) dt, \quad x \in [a, b]. \tag{8}$$

De igual manera, teniendo en cuenta que  $\tilde{y}(x)$  por definición satisface el siguiente problema a valores iniciales:

$$\begin{cases} D_a^\alpha \tilde{y}(x) = Q(x) \tilde{y}(x), & x \in [a, b], \\ \tilde{y}(a) = y_a, \\ \tilde{y}'(a) = y'_a, \end{cases} \quad (9)$$

con  $Q$  definida a partir de (3), resulta para  $\tilde{y}(x)$  la siguiente ecuación integral de Volterra:

$$\tilde{y}(x) = y_a + y'_a (x - a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} Q(t) \tilde{y}(t) dt, \quad x \in [a, b]. \quad (10)$$

Trabajando algebraicamente a partir de las Ec. (8) y (10) resulta que, dado  $x \in [a, b]$ :

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) - y(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} [Q(t) - q(t)] \tilde{y}(t) dt \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} [\tilde{y}(t) - y(t)] q(t) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Luego, aplicando el valor absoluto en Ec. (11):

$$\begin{aligned} |\tilde{y}(x) - y(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |x - t|^{\alpha-1} |Q(t) - q(t)| |\tilde{y}(t)| dt \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |x - t|^{\alpha-1} |\tilde{y}(t) - y(t)| |q(t)| dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Considerando que la variable  $x \in [a, b]$  y que el orden de derivación fraccionario  $\alpha$  es mayor que 1, se tiene que  $|x - t|^{\alpha-1} \leq (b - a)^{\alpha-1}$  y dado que  $q \in C^1(a, b)$ , se tiene que existen constantes positivas  $K$  y  $D$  tales que:

$$|q(t)| \leq K, \quad |q'(t)| \leq D, \quad \forall t \in [a, b], \quad (13)$$

de donde resulta:

$$\begin{aligned} |\tilde{y}(x) - y(x)| &\leq \frac{(b - a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |Q(t) - q(t)| |\tilde{y}(t)| dt \\ &+ \frac{(b - a)^{\alpha-1} K}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |\tilde{y}(t) - y(t)| dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Por otro lado, puesto que  $q(x) \in C^1[a, b]$ , se le puede aplicar Taylor alrededor de  $x_k$  resultando  $q(x) = q(x_k) + q'(x_k)(x - x_k) + \dots$ . Luego aplicando esto en Ec. (3) e integrando es fácil ver que si  $x \in I_k$ , entonces  $Q(x) = q(x_k) + \frac{1}{2}q'(x_k)h + \dots$ . Por lo tanto resulta:

$$|Q(x) - q(x)| \leq \frac{3}{2}Dh, \quad (15)$$

de donde:

$$\begin{aligned} |\tilde{y}(x) - y(x)| &\leq \frac{3}{2} \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} Dh \int_a^x |\tilde{y}(t)| dt \\ &+ \frac{(b-a)^{\alpha-1} K}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |\tilde{y}(t) - y(t)| dt. \end{aligned} \quad (16)$$

A partir de la Ec. (10) y aplicando la desigualdad triangular, se tiene:

$$|\tilde{y}(x)| \leq A_1 + B_1 \int_a^x |\tilde{y}(t)| dt, \quad (17)$$

con  $A_1 = |y_a| + |y'_a|(b-a)$  y  $B_1 = \frac{(b-a)^{\alpha-1}K}{\Gamma(\alpha)}$ .

Luego, utilizando el Lema de Gronwall en Ec. (17) resulta:

$$|\tilde{y}(x)| \leq A_1 e^{B_1(x-a)} \leq A_1 e^{B_1(b-a)}. \quad (18)$$

Aplicando (18) en la acotación (16), resulta:

$$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leq A_2 h + B_2 \int_a^x |\tilde{y}(t) - y(t)| dt, \quad (19)$$

con  $A_2 = \frac{3}{2} \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} DA_1 e^{B_1(b-a)}(b-a)$  y  $B_2 = \frac{(b-a)^{\alpha-1}K}{\Gamma(\alpha)}$ .

Nuevamente utilizando el Lema de Gronwall en Ec. (19) resulta:

$$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leq A_2 h e^{B_2(x-a)} \leq A_2 h e^{B_2(b-a)}. \quad (20)$$

Por lo tanto, el orden de convergencia del método de integración segmentaria resulta ser lineal. Más aún, la convergencia es uniforme.

#### 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Se considera en primer lugar un problema en el cual aparece la ecuación de Mathieu para un orden de derivación fraccionario (Chicone, 1991; Farkas, 1994). Esta ecuación tiene aplicaciones en muchos campos de las ciencias físicas, como la óptica, la mecánica cuántica y la relatividad general. Suele aparecer en problemas que involucran movimiento periódico, o en el

análisis de problemas de valores de frontera de ecuaciones diferenciales parciales que poseen simetría elíptica. Entonces, el problema a tratar, queda planteado como:

$$\begin{cases} D_0^\alpha y(x) + [a - 2b \cos(2x)] y(x) = 0, & x \in (0, 10), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Se obtiene una solución aproximada de este problema aplicando el Método de Integración Segmentaria (MIS) descrito antes, considerando  $N$  intervalos uniformes, con  $N$  algún número natural. El valor de los parámetros  $a$  y  $b$  utilizados es:  $a = 2$ ,  $b = 0.1$ .

Para el valor del orden de derivación fraccionario  $\alpha = 1.8$  se halla la solución aproximada de (21) considerando, como paso espacial, los valores  $h = \frac{10}{N} : 1, 10^{-1}, 10^{-2}$  como se observa en la Figura 1.

Puede verse que efectivamente se corrobora el comportamiento convergente de la solución aproximada cuando el parámetro  $h = \frac{10}{N}$  decrece.

A continuación, en la Figura 2 se visualiza el comportamiento de la solución aproximada para el problema descrito en (21) cuando, con el paso espacial  $h = 10^{-1}$ , se consideran distintos valores para el orden de derivación fraccionario  $\alpha$ : 1.8, 1.9, 1.93, 1.96, 1.99. Este proceso se repite pero estableciendo  $\alpha$ : 1.99, 1.999 y comparando con la gráfica de la solución clásica del problema con orden de derivación  $\alpha = 2$ , como puede verse en la Figura 3.

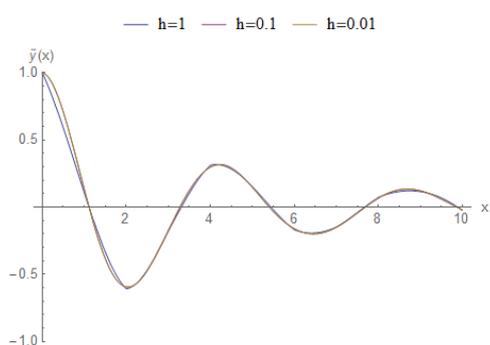


Figura 1: Solución aproximada de (21) para distintos valores de  $h$ .

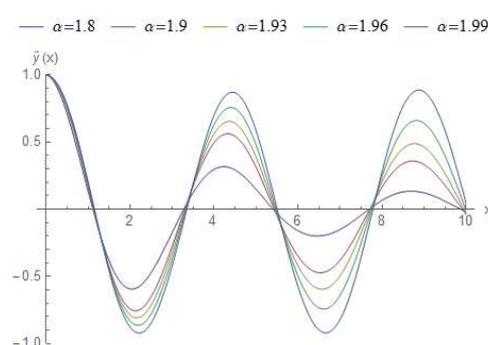


Figura 2: Solución aproximada de (21) para distintos valores de  $\alpha$ .

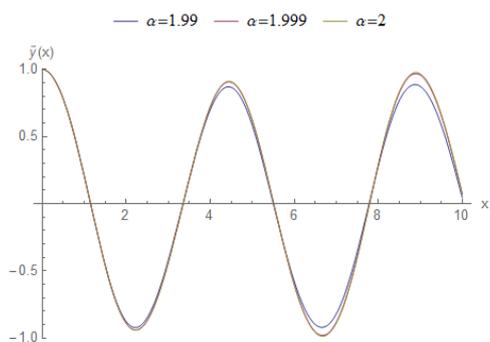


Figura 3: Solución aproximada de (21) para distintos valores de  $\alpha$ .

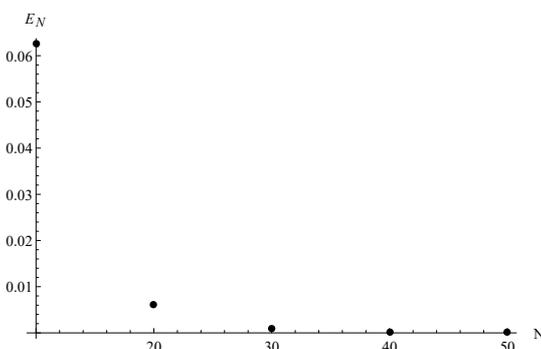


Figura 4: Comportamiento del error global.

Para tener una idea del comportamiento global del error en la resolución aproximada del problema, se define, para  $N$  natural:

$$E_N = \int_0^{10} (\tilde{y}_N(x) - \tilde{y}_{N+10}(x))^2 dx . \quad (22)$$

Considerando en (21) el orden de derivación  $\alpha = 1.8$  y  $h = \frac{10}{N}$  para diferentes valores de  $N$ , en la Tabla 1 se muestran los resultados que además se representan en la Figura 4.

$N$	$E_N$
10	$6,253 \cdot 10^{-2}$
20	$6,219 \cdot 10^{-3}$
30	$8,128 \cdot 10^{-4}$
40	$1,721 \cdot 10^{-4}$
50	$5,115 \cdot 10^{-5}$

Tabla 1: Comportamiento del error global.

Un segundo ejemplo está basado en la ecuación de Hermite (Abramowitz y Stegun, 1972). Se define el problema con condiciones iniciales que se describe a continuación:

$$\begin{cases} D_0^\alpha y(x) + \left(1 - \frac{1}{10} x^2\right) y(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

donde el orden de derivación fraccionario  $\alpha$  se encuentra entre 1 y 2. A continuación, en la Figura 5, se muestra el comportamiento de la solución aproximada cuando el orden de derivación es  $\alpha = 1.8$  y el paso en la variable espacial toma los valores  $h = \frac{1}{N} : 1, 10^{-1}, 10^{-2}$ .

Puede verse el comportamiento convergente de la solución aproximada cuando el parámetro  $h = \frac{1}{N}$  decrece.

A continuación, en la Figura 6, se visualiza el comportamiento de la solución aproximada para el problema descrito en (23) cuando, con el paso espacial  $h = 10^{-1}$ , se consideran distintos valores para el orden de derivación fraccionario  $\alpha$ : 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.99 y luego se repite el proceso cuando  $\alpha$  se acerca a 2, como puede observarse en la Figura 7.

## 5. MÉTODO DE INTEGRACIÓN SEGMENTARIA APLICADO A UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL NO LINEAL

Se considera el problema de valores iniciales:

$$D_a^\alpha y(x) = F(x, y(x)), \quad y(a) = 1, y'(a) = 0, \quad (24)$$

con  $a \leq x \leq b$ ,  $1 < \alpha \leq 2$  y  $F$  una función continua. Se supone que la ecuación diferencial se puede reescribir como:

$$D_a^\alpha y(x) = G(x, y(x)) y(x), \quad (25)$$

donde  $G(x, y(x))$  es una función continua en su dominio. Considerando las definiciones hechas al describir el método en el párrafo 2, la solución de la Ec. (25) es aproximada por una función  $Y$  tal que en cada intervalo  $I_k$  es solución del problema

$$D_a^\alpha y_k(x) = q_k y_k(x), \quad x \in I_k, \quad (26)$$

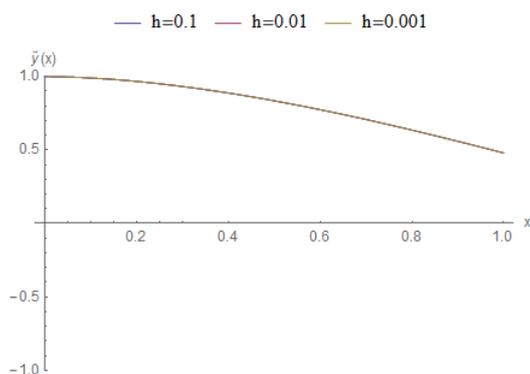


Figura 5: Solución aproximada de (23) para distintos valores de  $h$ .

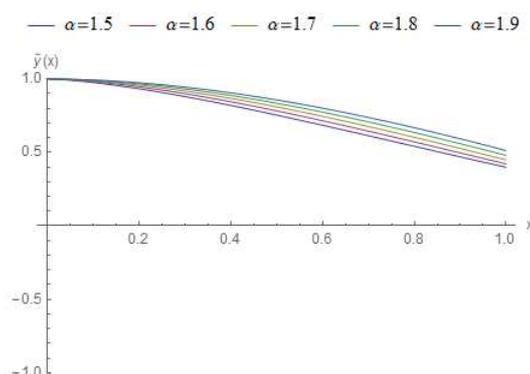


Figura 6: Solución aproximada de (23) para distintos valores de  $\alpha$ .

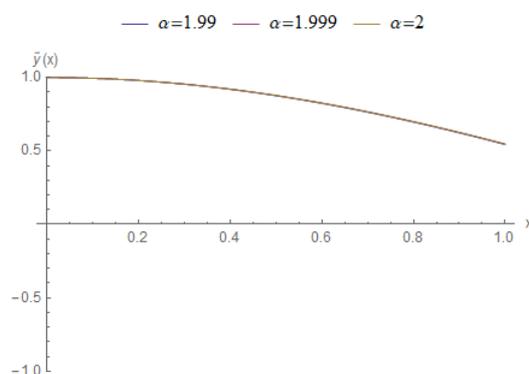


Figura 7: Solución aproximada de (23) para distintos valores de  $\alpha$ .

siendo ahora

$$q_k = G(x_k, y_k), \tag{27}$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} y_k(x_{k+1}) &= y_{k+1}(x_{k+1}), \\ y'_k(x_{k+1}) &= y'_{k+1}(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \tag{28}$$

Para ilustrar la descripción anterior, en (24) se considera la ecuación homogénea de Duffing:

$$D_0^\alpha y(x) + y(x) + \gamma y^3(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \tag{29}$$

En este caso, la función  $G$  es:  $G(x, y) = -1 - \gamma y^2(x)$ . En la Figura 8, se observa primero qué ocurre con la solución aproximada del problema considerando distintos valores de  $N$  que es la cantidad de subintervalos espaciales tomando  $\gamma = 0.1$  y  $\alpha = 1.8$ . A continuación, en las Figuras 9 y 10 se muestra cómo se comporta la solución aproximada del problema planteado cuando, para  $N = 60$ , el orden de derivación fraccionario  $\alpha$  cambia entre 1.8 y 2.

Es interesante remarcar que si se considera el problema con derivada clásica y se incluye un término disipativo  $\delta y'(x)$ :

$$y''(x) + \delta y'(x) + y(x) + \gamma y^3(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \tag{30}$$

con  $\delta > 0$ , y empleando las mismas condiciones iniciales y parámetros, se puede estimar un valor de  $\delta$  de manera que la solución  $\tilde{y}(x)$  del problema con derivada fraccionaria (29) y la

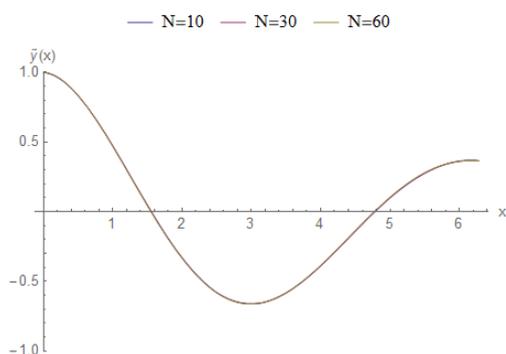


Figura 8: Gráfica de la solución aproximada de (29) para distintos valores de  $N$ .

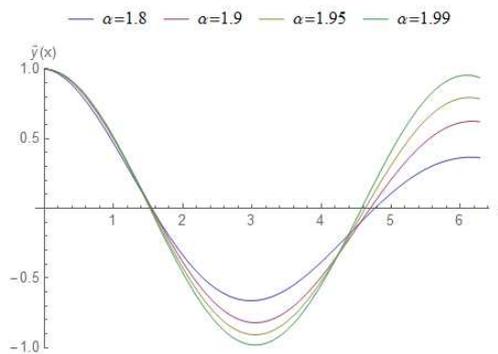


Figura 9: Gráfica de la solución aproximada de (29) para distintos valores de  $\alpha$ .

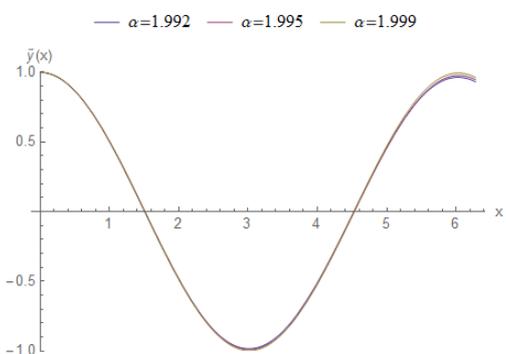


Figura 10: Gráfica de la solución aproximada de (29) para distintos valores de  $\alpha$ .

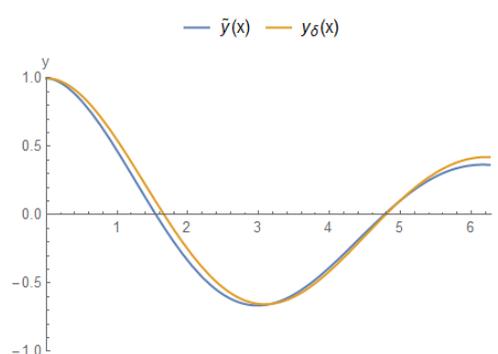


Figura 11: Gráfica de las soluciones aproximadas de (29) y (30) para  $\delta = 0,28$ .

solución  $y_\delta(x)$  del problema con derivada clásica (30) no difieran significativamente. Mediante experimentos numéricos, considerando  $\alpha = 1.8$  y  $N = 60$ , se obtuvo que para  $\delta = 0.28$  las soluciones de ambos problemas resultan muy similares como se muestra en la Figura 11.

Al igual que en el trabajo Ferrari et al. (2022), experimentalmente se determina una analogía entre la derivación ordinaria con un término disipativo y la derivación fraccionaria.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló un método de integración segmentaria para hallar la solución explícita aproximada de una ecuación diferencial fraccionaria de la forma  $D^\alpha y + g(x, y)y = 0$ .  $D^\alpha$  es el operador diferencial fraccionario de Caputo de orden  $\alpha$  con  $1 < \alpha \leq 2$ . Se consideraron condiciones iniciales para el problema. Se presentó además un estudio de convergencia obteniendo convergencia uniforme lineal. A continuación, este resultado se corroboró mediante dos ejemplos: un problema con condiciones iniciales a partir de la ecuación de Mathieu y en el que además se mostró gráficamente el comportamiento de la solución aproximada con respecto a cambios en el orden de derivación fraccionario en la ecuación; y un segundo ejemplo a partir de la ecuación de Hermite con condiciones iniciales en el que se repitió este estudio. Se consideró además un problema en el cual la ecuación que gobierna el sistema es no lineal con condiciones iniciales comprobando una vez más el buen desempeño del método numérico presentado.

## REFERENCIAS

- Abramowitz M. y Stegun I. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1972.
- Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., y Trujillo J. *Fractional Calculus, Models and Numerical Methods*. Word Scientific, New Jersey, 1972.
- Changpin L. y Fanhai Z. *Numerical Methods for Fractional Calculus*. Taylor and Francis Group, 2015.
- Chicone C. *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- Diethelm K. *The analysis of fractional differential equations. An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer-Verlag, Braunschweig, Germany, 2010.
- Farkas M. *Periodic Motions*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- Ferrari A., Gadella M., Lara L., y Santillan Marcus E. Approximate solutions of one dimensional systems with fractional derivative. *International Journal of Modern Physics C*, 31(7), 2020a.
- Ferrari A., Lara L., Olguin M., y Santillan Marcus E. Oscilaciones transversales en un medio elástico unidimensional con memoria. *Mecánica Computacional (MECOM) 2021*, páginas 159–166, 2021.
- Ferrari A., Lara L., Olguin M., y Santillan Marcus E. Comparative study of some numerical schemes for a fractional order model of hiv infection treatment. *Trends in Computational and Applied Mathematics (aceptado)*, 2022.
- Ferrari A., Lara L., y Santillan Marcus E. Convergence analysis and parity conservation of a new form of a quadratic explicit spline with applications to integral equations. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 28(30), 2020b.
- Ghorbani A. Toward a new analytical method for solving nonlinear fractional differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:4173–4179, 2008.
- Khana Y., Faraz N., Yildirim A., y Wua Q. Fractional variational iteration method for fractional initial-boundary value problems arising in the application of nonlinear science. *Computers and Mathematics with Applications*, 62:2273–2278, 2011.
- Kilbas A., Srivastava H., y Trujillo J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- Lara L. One-step recursive method for solving systems of differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 216:210–216, 2008.
- Narahari R., Hanneken J., Enck T., y Clarke T. Dynamics of the fractional oscillator. *Physica A*, 297:361–367, 2001.
- Odibat Z. Computing eigenelements of boundary value problems with fractional derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, 215:3017–3028, 2009.
- Odibat Z. Analytic study on linear systems of fractional differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 59:1171–1183, 2010.
- Tofighi A. The intrinsic damping of the fractional oscillator. *Physica A*, 329:29–34, 2003.
- Wu G. A fractional variational iteration method for solving fractional nonlinear differential equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 61:2186–2190, 2011.