

ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES DE SOPORTES CORTOS CON MASAS Y RESTRICCIONES ELÁSTICAS GENERALES

FREE VIBRATION ANALYSIS OF SHORT SUPPORTS WITH MASSES AND GENERAL ELASTIC CONSTRAINTS

Javier L.Raffo¹ y Maximiliano Carnelutto¹

¹Grupo de Mecánica Computacional, Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional, San Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar,
<https://www.frd.utn.edu.ar/grupo-de-mecanica-computacional>

Palabras clave: Timoshenko, masas puntuales, vibraciones, soporte, restricciones elásticas.

Resumen. En la industria en general se encuentran diferentes tipos de soportes cortos para tuberías u otros equipos. Este tipo de soportes son comúnmente vistos en los sectores nucleares, navales, químicos, etc. En el presente trabajo se desarrolla un modelo de viga Timoshenko con masas puntuales y condiciones elásticas generales para modelar diferentes comportamientos del soporte, incluso la presencia de una fisura. Se analizan las vibraciones libres luego de obtener las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno. Luego se obtienen resultados numéricos a partir de la solución exacta.

Keywords: Timoshenko, point masses, vibrations, supports, elastic constraints.

Abstract. In the general industry you will find different types of short supports for pipes or other equipment. These types of supports are common in different sectors like, nuclear, naval, paper and others. In this paper, a Timoshenko beam model with point masses and general elastic conditions is developed to model different behaviors of the support, including the presence of a crack. Free vibrations are analyzed after obtaining the differential equations and boundary conditions. Numerical results are obtained using the exact solution.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se propone un modelo generalizado para el estudio de las vibraciones de soportes comúnmente vistos en los sectores nucleares, navales, químicos, entre otros. Se utiliza la teoría de vigas cortas incluyendo la presencia de masas puntuales, restricciones elásticas generales y restricciones elásticas intermedias para representar la presencia de fisuras.

Se propone utilizar las técnicas del cálculo de variaciones para la obtención en forma natural del problema de contorno y ecuaciones diferenciales (Grossi, 2010).

El problema de vibraciones libres de vigas con restricciones elásticas intermedias, fue tratado en gran medida. Sin intención de realizar una revisión exhaustiva, se comentan algunos de los últimos trabajos. En los últimos años, Rossit y Laura (2001), obtienen una solución exacta de vibraciones libres, para una viga Euler-Bernoulli, en voladizo con un sistema de masa-resorte adosado en el extremo libre, para una amplia gama de parámetros físicos intervinientes. Loya et al. (2006) obtiene las frecuencias naturales para vigas Timoshenko flexionadas, con fisuras y condiciones de contorno simples. Khaji et al. (2009) propone identificar fisuras analíticamente a partir de resultados previos obtenidos mediante análisis con el método de elementos finitos, donde utiliza resortes rotacionales intermedios para modelar una fisura abierta.

Más adelante, Raffo y Grossi (2012) realizaron un estudio de sensibilidad sobre las primeras frecuencias naturales que consiste en la influencia de la posición y el valor de una restricción elástica intermedia en vigas con rótulas intermedias. Zhengou et al. (2014), utilizan una solución exacta para estudiar la vibración libre de vigas Timoshenko no uniformes acopladas con accesorios flexibles y múltiples discontinuidades. Se observa que la propuesta no es justificada desde el cálculo de variaciones en especial en las condiciones de los puntos intermedios, y en el presente año, Luo et al. (2022) presentan soluciones exactas de vibraciones libres de vigas Euler-Bernoulli y Timoshenko, apoyadas con una cantidad arbitraria de restricciones elásticas intermedias.

Se observa de la bibliografía que no se ha presentado al momento las ecuaciones diferenciales y el problema de contorno obtenido en forma natural mediante las técnicas del cálculo de variaciones y a la vez resuelto por medio de la solución exacta, para la obtención de resultados de vibraciones libres de vigas Timoshenko con restricciones elásticas contra rotación y traslación en sus extremos, con una masa puntual en un extremo y con dos masas puntuales ubicadas arbitrariamente en puntos intermedios junto con restricciones rotacionales conectadas a ambos lados de la viga para representar la presencia de fisuras. Se presentan resultados numéricos del coeficiente de frecuencias y formas modales. Se comparan resultados con otros autores comprobando un correcto funcionamiento del modelo y algoritmo. Finalmente, se presentan nuevos resultados para diferentes valores de las masas puntuales y restricciones elásticas.

2. OBTENCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTORNO Y SOLUCIÓN EXACTA PARA UNA VIGA

Sea una viga de longitud l y altura h dividida en tres tramos o subdominios $(0, c_1)$, (c_1, c_2) y (c_2, l) . En el extremo derecho de cada subdominio se encuentra una masa puntual m_i con $i = 1, 2, 3$. Existen dos resortes rotaciones intermedios r_{12} y r_{23} , conectando ambos lados de la viga como se observa en la figura 1.

Los extremos de la viga se encuentran restringidos elásticamente, contra rotación por los resortes definidos por los parámetros r_1 y r_2 , y traslación por resortes traslacionales definidos por t_1 y t_2 . Adoptando valores adecuados de r_1 , r_2 , t_1 y t_2 se pueden generar todas las combinaciones posibles de restricciones de apoyo clásicas (empotrado, simplemente apoyado, libre).

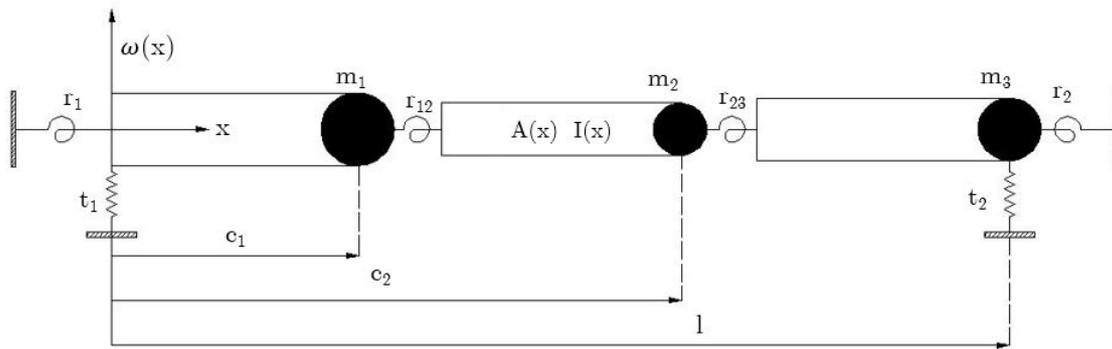


Figura 1: Viga de tres tramos analizada

Por otra parte, utilizando r_{12} y r_{23} se pueden considerar los efectos de restricciones elásticas intermedias en $x = c_1$ y en $x = c_2$, como ser la presencia de una fisura abierta.

Para analizar el desplazamiento transversal de la viga, se supone que la posición de la viga en cualquier instante t está descrita por la función $w = w(x, t), \forall x \in [0, l]$.

Por otro lado la función que describe las rotaciones de la sección perpendicular a la línea neutra por flexión es: $\psi = \psi(x, t), \forall x \in ([0, c_1), (c_1, c_2), (c_2, l])$.

Para el desarrollo y obtención de la ecuación diferencial que describe el comportamiento de la viga, se tendrá en cuenta la teoría Timoshenko, la cual consiste en considerar los efectos de deformación por corte e inercia rotatoria sumada a las rotaciones debidas a la flexión. El principio de Hamilton establece que de todas las configuraciones posibles que el sistema puede tener, al pasar por una configuración inicial dada en un instante t_0 a otra dada en un instante t_1 , la que realmente adopta el sistema es la que hace estacionario al funcional:

$$F(w, \psi) = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \tag{1}$$

donde $L = E_c - E_p$, es el Lagrangeano compuesto por E_c , la energía cinética total que considera la energía cinética de la viga y la energía cinética de las masas adosadas y E_p que es la energía potencial que incluye la energía de deformación de la viga, energía potencial de la carga, energía correspondiente a los resortes rotacionales y traslacionales. En consecuencia, el funcional energético a considerar para la viga es:

$$\begin{aligned}
 F(w, \psi) = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} & \left[\sum_{i=1}^3 \left[\int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[(\rho I)_i(x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) \right)^2 + (\rho A)_i(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right)^2 \right. \right. \right. \\
 & - (EI)_i(x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) \right)^2 - (\kappa GA)_i(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x}(x, t) - \psi(x, t) \right)^2 \Big] dx + m_i \left(\frac{\partial w}{\partial t}(c_i, t) \right)^2 \\
 & - r_{i,i+1} (\psi(c_i^+, t) - \psi(c_i^-, t))^2 \Big] - t_1 w(0^+, t)^2 - t_2 w(l^-, t)^2 - r_1 \psi(0^+, t)^2 \\
 & \left. - r_2 \psi(l^-, t)^2 \right] dt \tag{2}
 \end{aligned}$$

Donde $(\rho A)_i(x)$ denota la masa por unidad de longitud de cada tramo $i, c_0 = 0, c_3 = l, (\rho I)_i(x)$ es el valor de la función resultante del producto de la densidad por el momento de inercia de la sección, $(EI)_i(x)$ denota la rigidez a la flexión de cada tramo, $(\kappa GA)_i(x)$ denota

la rigidez axial en cada tramo i , $r_{34} = 0$ y la notación 0^+ , c_i^+ , c_i^- y l^- denota el uso de límites y derivadas laterales. Se puede observar que la energía potencial debido a la restricción elástica rotacional intermedia

$$r_{i,i+1} (\psi (c_i^+, t) - \psi (c_i^-, t))^2$$

implica que el resorte está conectado en el lado derecho del tramo ubicado a la izquierda de c_i , y a la izquierda del tramo ubicado a la derecha de c_i .

Al aplicar la técnica del cálculo de variaciones (Grossi, 2010), se obtiene que w y ψ tienen que satisfacer las ecuaciones diferenciales

$$(\kappa GA)_i(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x}(x, t) - \psi(x, t) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_i(x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) \right) \right) - (\rho I)_i(x) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x, t) \right) = 0, \\ \forall x \in (c_{i-1}, c_i), i = 1, 2, 3, \forall t \geq 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((\kappa GA)_i(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x}(x, t) - \psi(x, t) \right) \right) - (\rho A)_i(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \right) = 0, \\ \forall x \in (c_{i-1}, c_i), i = 1, 2, 3, \forall t \geq 0, \quad (4)$$

con las siguientes condiciones de contorno obtenidas en forma natural:

$$-t_1 w(0^+, t) + (\kappa GA)_1(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x}(0^+, t) - \psi(0^+, t) \right) = 0, \quad (5)$$

$$-r_1 \psi(0^+, t) + (EI)_1(x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(0^+, t) \right) = 0, \quad (6)$$

$$w(c_i^-, t) - w(c_i^+, t) = 0, i = 1, 2, \quad (7)$$

$$(\kappa GA)_i(x) \left(\psi(c_i^-, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) - m_i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(c_i^-, t) \right) + (\kappa GA)_{i+1}(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \psi(c_i^+, t) \right) = 0, i = 1, 2, \quad (8)$$

$$r_{i,i+1} (\psi(c_i^+, t) - \psi(c_i^-, t)) - (EI)_i(x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(c_i^-, t) \right) = 0, i = 1, 2, \quad (9)$$

$$r_{i,i+1} (\psi(c_i^-, t) - \psi(c_i^+, t)) + (EI)_{i+1}(x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(c_i^+, t) \right) = 0, i = 1, 2, \quad (10)$$

$$-t_2 w(l^-, t) + (\kappa GA)_3(x) \left(\psi(l^-, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(l^-, t) \right) - m_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(l^-, t) \right) = 0, \quad (11)$$

$$r_2 \psi(l^-, t) + (EI)_3(x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(l^-, t) \right) = 0. \quad (12)$$

De esta manera el problema de contorno quedaría resuelto si satisface: Las ecuaciones diferenciales (3) y (4), y las condiciones de contorno (5) a (12).

3. MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLE

Para realizar un análisis de vibraciones libres y determinar los modos normales de vibración del sistema mecánico descripto, se deben determinar los valores de las frecuencias naturales para los cuales las ecuaciones diferenciales tienen como solución:

$$w(x, t) = L\bar{W}(x)e^{j\omega t} \quad (13)$$

$$\psi(x, t) = \Psi(x)e^{j\omega t} \quad (14)$$

donde $\bar{W}(x) = \frac{W(x)}{L}$ son las formas modales, que por simplicidad de ahora en adelante se adopta $\bar{W} = W$, $\Psi(x)$ es el giro de la sección y ω representa la frecuencia de oscilación en su estado libre. Luego, en virtud de la continuidad de la función exponencial y de sus derivadas, las funciones dadas por (13) y (14) son continuas junto con sus derivadas de cualquier orden respecto de t .

Se considera que $(\rho A)_i$, $(\rho I)_i$, $(EI)_i$, $(\kappa GA)_i$ son constantes entre c_{i-1} y c_i con $i = 1, 2, 3$.

Reemplazando (13) y (14) en (3) a (4), y aplicando el cambio de variable $\bar{x} = x/l$, se obtiene:

$$\lambda_i^4 W_i(\bar{x}) + l^2 \frac{(\kappa GA)_i}{(EI)_i} \left(\frac{d^2 W_i}{d\bar{x}^2}(\bar{x}) - \frac{d\Psi_i}{d\bar{x}}(\bar{x}) \right) = 0, \quad (15)$$

$i = 1, 2, 3, t \geq 0$.

$$\lambda_i^4 \Psi_i(\bar{x}) + l^2 \frac{A_i}{I_i} \frac{d^2 \Psi_i}{d\bar{x}^2}(\bar{x}) + l^4 \frac{A_i}{I_i} \frac{(\kappa GA)_i}{(EI)_i} \left(\frac{dW_i}{d\bar{x}}(\bar{x}) - \Psi_i(\bar{x}) \right) = 0 \quad (16)$$

$i = 1, 2, 3, t \geq 0$.

Donde: $(\lambda)_i^4 = \lambda^4 \frac{(EI)_1 (\rho A)_i}{(\rho A)_1 (EI)_i}$ y λ denota al coeficiente de frecuencias $\lambda^4 = \frac{(\rho A)_1}{(EI)_1} l^4 \omega^2$, comúnmente usado en los trabajos sobre vibraciones de vigas.

Introduciendo (13) y (14) en las condiciones de contorno (5) a (12), se obtienen las expresiones que describen las condiciones mencionadas para el problema de vibraciones naturales:

$$-T_1 W(0^+) + \frac{(\kappa GA)_1}{(EI)_1} l^2 \left(\frac{dW}{d\bar{x}}(0^+) - \Psi(0^+) \right) = 0, \quad (17)$$

$$-R_1 \Psi(0^+) + \frac{d\Psi}{d\bar{x}}(0^+) = 0, \quad (18)$$

$$w(\bar{c}_i^-, t) - w(\bar{c}_i^+, t) = 0, i = 1, 2, \quad (19)$$

$$R_{i,i+1} (\Psi(\bar{c}_i^+) - \Psi(\bar{c}_i^-)) - \frac{d\Psi}{dx}(\bar{c}_i^-) = 0, i = 1, 2, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\kappa GA)_i}{(EI)_i} l^2 \left(\Psi(\bar{c}_i^-) - \frac{dW}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^-) \right) + M_i \lambda_i^4 W(\bar{c}_i^-) + \frac{(\kappa GA)_{i+1}}{(EI)_i} l^2 \left(\frac{dW}{dx}(\bar{c}_i^+) \right. \\ & \left. - \Psi(\bar{c}_i^+) \right) = 0, i = 1, 2, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{d\Psi}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^+) + R_{i,i+1} \frac{(EI)_i}{(EI)_{i+1}} (\Psi(\bar{c}_i^-) - \Psi(\bar{c}_i^+)) = 0, i = 1, 2, \quad (22)$$

$$\frac{(\kappa GA)_3}{(EI)_3} l^2 \left(\Psi(1^-) - \frac{dW}{d\bar{x}}(1^-) \right) - T_2 W(1^-) + M_3 \lambda_3^4 W(1^-) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{d\Psi}{d\bar{x}}(1^-) + R_2 \Psi(1^-) = 0. \quad (24)$$

donde: $\bar{c}_i = c_i/l$, $R_{i,i+1} = \frac{r_{i,i+1}l}{(EI)_i}$, $M_i = \frac{m_i}{l(\rho A)_i}$, con $i = 1, 2$, $T_1 = \frac{t_1 l^3}{(EI)_1}$, $R_1 = \frac{r_1 l}{(EI)_1}$,
 $M_3 = \frac{m_3}{l(\rho A)_3}$, $R_2 = \frac{r_2 l}{(EI)_3}$, $T_2 = \frac{t_2 l^3}{(EI)_3}$.

4. SOLUCIÓN EXACTA PARA EL PROBLEMA DE VIBRACIONES NATURALES

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales (15) y (16), están dadas por (Khaji et al. (2009) y Zhengou et al. (2014)):

$$W_i(\bar{x}) = C_{1,i} \cosh(\beta_{1,i} \bar{x}) + C_{2,i} \sinh(\beta_{1,i} \bar{x}) + C_{3,i} \cos(\beta_{2,i} \bar{x}) + C_{4,i} \sin(\beta_{2,i} \bar{x}), i = 1, 2, 3. \quad (25)$$

$$\Phi_i(\bar{x}) = C_{1,i} m_{1,i} \sinh(\beta_{1,i} \bar{x}) + C_{2,i} m_{1,i} \cosh(\beta_{1,i} \bar{x}) + C_{3,i} m_{2,i} \sin(\beta_{2,i} \bar{x}) - C_{4,i} m_{2,i} \cos(\beta_{2,i} \bar{x}), i = 1, 2, 3. \quad (26)$$

donde

$$m_{1,i} = \frac{(\Omega_i)^2 \hat{s}_i + (\beta_{1,i})^2}{\beta_{1,i}}, m_{2,i} = \frac{(\Omega_i)^2 \hat{s}_i + (\beta_{2,i})^2}{\beta_{2,i}},$$

$$\beta_{1,i} = \sqrt{\sqrt{(a_i)^2 - b_i} - a_i}, \beta_{2,i} = \sqrt{\sqrt{(a_i)^2 - b_i} + a_i},$$

$$a_i = \frac{(\Omega_i)^2 (\hat{r}_i + \hat{s}_i)}{2}, b_i = (\Omega_i)^2 ((\Omega_i)^2 \hat{r}_i \hat{s}_i - 1),$$

siendo $\hat{r}_i = \frac{I_i}{A_i l^2}$ y $\hat{s}_i = \frac{E_i}{\kappa_i G_i} \hat{r}_i$, con $i = 1, 2, 3$.

El coeficiente $\Omega_i = \sqrt{\frac{(\rho A)_i}{(EI)_i} \omega l^2}$, está relacionado con λ_i de la forma $\Omega_i = (\lambda_i)^2$.

Reemplazando (25) y (26) en las condiciones de contorno y transición, (17) a (24), se obtiene un sistema de 12 ecuaciones homogéneas para las constantes $C_{j,i}$, $j = 1, \dots, 12$. Dado que este sistema es homogéneo, para existencia de solución no trivial, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser nulo. Esto conduce a la ecuación de frecuencias

$$G(T_1, T_2, R_1, R_2, M_i, R_{i,i+1}, E_i, I_i, A_i, \kappa_i, G_i, \bar{c}_i, i = 1, 2, \lambda) = 0. \quad (27)$$

Cada raíz de (27) corresponde a un valor del coeficiente λ . Para determinar estas raíces es suficiente con aplicar el método clásico de bisección.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS Y DISCUSIONES

En el presente apartado, se presentan los resultados numéricos de la solución exacta propuesta en este trabajo y se los compara con los obtenidos por otros autores.

Las tablas 1 y 2, muestran los primeros cinco valores de λ , para una viga empotrada con $M_3 = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 5$ y 10 , en el extremo libre, y se los compara con los valores obtenidos por [Rossit y Laura \(2001\)](#).

M_3	0.2		0.4		0.6		0.8	
Modo	Sol.exacta	Ref.	Sol.exacta	Ref.	Sol.exacta	Ref.	Sol.exacta	Ref.
1	1,6164	1,6164	1,4723	1,4724	1,3756	1,3757	1,3041	1,3041
2	4,2670	4,2671	4,1444	4,1444	4,0866	4,0866	4,0530	4,0531
3	7,3183	7,3184	7,2154	7,2155	7,1724	7,1725	7,1490	7,1490
4	10,4014	10,402	10,3177	10,3180	10,2848	10,2850	10,2674	10,2670
5	13,5064	13,507	13,4364	13,4370	13,4099	13,4100	13,3960	13,3960

Tabla 1: Comparación de los primeros cinco valores de λ con [Rossit y Laura \(2001\)](#), para valores de $M_3 < 1$.

M_3	1		1.2		1.4		5		10	
Modo	Sol.exacta	Ref.								
1	1,2478	1,2479	1,2021	1,2021	1,1635	1,1636	0,8700	0,87002	0,7357	0,73578
2	4,0312	4,0311	4,0157	4,0157	4,0042	4,0042	3,9500	3,9500	3,9384	3,9385
3	7,1341	7,1341	7,1238	7,1239	7,1164	7,1164	7,0824	7,0825	7,0756	7,0756
4	10,2565	10,2570	10,2491	10,2490	10,2437	10,2440	10,2198	10,2200	10,2149	10,215
5	13,3875	13,3880	13,3817	13,3820	13,3775	13,3780	13,3589	13,3590	13,3553	13,3550

Tabla 2: Comparación de los primeros cinco valores de λ con [Rossit y Laura \(2001\)](#), para valores de $M_3 > 1$.

En la tabla 3, se presentan los primeros cuatro valores de λ , para una viga con R_{12} igual a 9.6689, 2.9396 y 0.5185, cuyos valores representan fisuras abiertas de 20 %, 35 % y 70 % de la altura de la viga, [Raffo y Grossi \(2012\)](#), ubicado en $\bar{c} = 0,5$ para $h/l = 0,25$, y distintas condiciones de borde. Dichos valores se comparan con los obtenidos por [Khaji et al. \(2009\)](#).

R_{12}	9.6689		2.9396		0.5185		
BC	Modo	Sol.exacta	Ref.	Sol.exacta	Ref.	Sol.exacta	Ref.
SS	1	2,8763	2,8768	2,6664	2,6669	2,0667	2,0670
	2	5,4452	5,4462	5,4452	5,4462	5,4452	5,4462
	3	7,2204	7,2217	6,9926	6,9938	6,6276	6,6288
	4	8,9776	8,9792	8,9776	8,9792	8,9776	8,9792
SC	1	3,4676	3,4682	3,3317	3,3323	3,0318	3,0324
	2	5,7458	5,7467	5,7388	5,7399	5,7235	5,7245
	3	7,3686	7,3699	7,1415	7,1428	6,7867	6,7879
	4	9,0401	9,0416	9,0375	9,0391	9,0327	9,0343

Tabla 3: Comparación de los primeros cuatro valores de λ con [Khaji et al. \(2009\)](#).

En la tabla 4 se comparan los primeros tres valores de λ de una viga uniforme para $R_0 = R$, $R_l = 0$, $T_0 = 10^8$, $T_l = T$, con los obtenidos por [Kocatürk y Simsek \(2005\)](#), donde $h/l = 0,005$.

La tabla 5, muestra valores de λ obtenidos para una viga uniforme, con $R_1 = R_2 = T_1 = T_2 = 1$, $R_{12} = R_{23} = 0,1$, $M_1 = 2$, $M_2 = 3$, y $M_3 = 4$, $\bar{c}_1 = 0,25$, $\bar{c}_2 = 0,5$ y $h/l = 0,005$.

T		10		1	
R	Modo	Sol.exacta	Ref.	Sol.exacta	Ref.
10	1	2,5387	2,5388	1,8793	1,8793
	2	4,5157	4,5157	4,4106	4,4106
	3	7,4739	7,4739	7,4524	7,4524
1	1	2,3264	2,3265	1,5358	1,5358
	2	4,1845	4,1844	4,0459	4,046
	3	7,1610	7,1611	7,1360	7,1361

Tabla 4: Comparación de los primeros tres valores de λ con los valores de referencia obtenidos por [Kocatürk y Simsek \(2005\)](#).

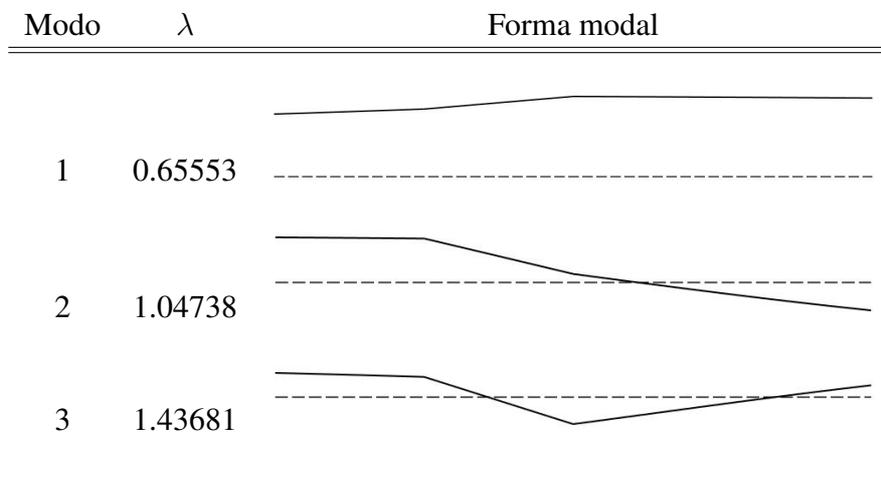


Tabla 5: Primeros tres valores de λ , para viga elasticamente restringida con masas adosadas, con $M_1 = 2$, $M_2 = 3$, y $M_3 = 4$.

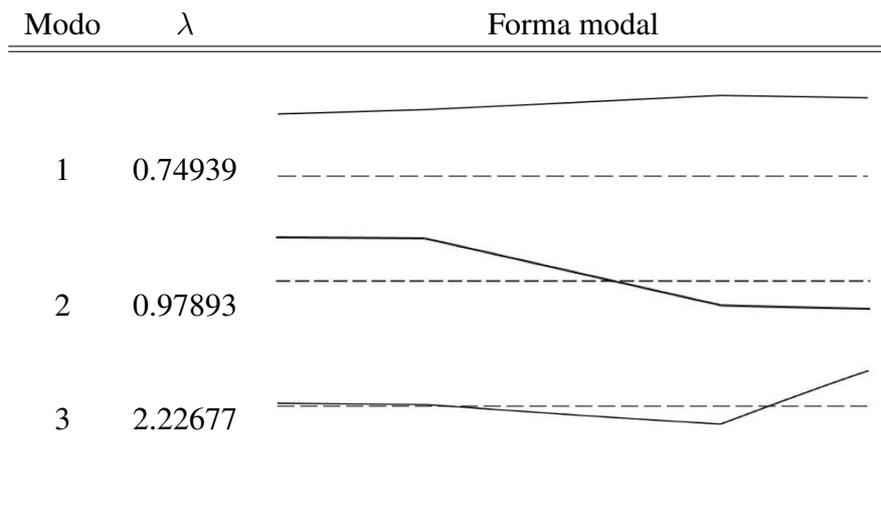


Tabla 6: Primeros tres valores de λ , para viga elasticamente restringida con masas adosadas, con $M_1 = M_2 = 2$, y $M_3 = 1$

La tabla 6, muestra valores de λ obtenidos para una viga uniforme, con $R_1 = R_2 = T_1 = T_2 = 1$, $R_{12} = R_{23} = 0,1$, $M_1 = M_2 = 2$, $M_3 = 1$, $\bar{c}_1 = 0,25$, $\bar{c}_2 = 0,5$ y $h/l = 0,005$.

La tabla 7, muestra valores de λ obtenidos para una viga uniforme, con $R_1 = R_2 = 0,5$, $T_1 = T_2 = 1$, $R_{12} = R_{23} = 0,1$, $M_1 = M_3 = 4$, $M_2 = 2$, $\bar{c}_1 = 0,25$, $\bar{c}_2 = 0,5$ y $h/l = 0,005$.

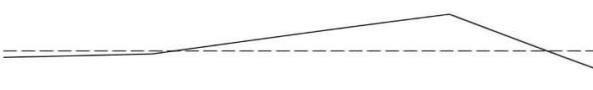
Modo	λ	Forma modal
1	0.64097	
2	0.82114	
3	1.65949	

Tabla 7: Primeros tres valores de λ , para viga elásticamente restringida con masas adosadas, con $M_1 = M_3 = 4$ y $M_2 = 2$

6. CONCLUSIONES

Se presentaron las ecuaciones diferenciales y el problema de contorno y transición obtenidos de la aplicación de las técnicas del cálculo de variaciones, y se obtuvo en forma exacta el comportamiento de una viga Timoshenko con los extremos elásticamente restringidos de rotaciones y traslaciones y una masa adosada en el extremo derecho. A la vez, la viga presenta dos puntos intermedios ubicados arbitrariamente con una masa puntual y un resorte rotacional conectado a ambos lados de la viga en cada transición.

Los resultados numéricos se obtuvieron luego de proponer la solución exacta y resolver la ecuación característica. El algoritmo desarrollado permitió obtener resultados numéricos para diferentes combinaciones de los parámetros del sistema estudiado.

Se observa una buena concordancia en los resultados obtenidos al compararlos con diferentes autores para diferentes condiciones de borde clásicas y valores de masa, que permitió verificar el correcto funcionamiento del algoritmo.

Finalmente se presentaron valores de los primeros valores del coeficiente de frecuencia y sus correspondientes formas modales para casos de restricciones generales no presentados en la bibliografía actual

REFERENCIAS

- Grossi R. *Cálculo de variaciones. Teoría y Aplicaciones*. CIMNE, Barcelona, 2010.
- Khaji N., Shafiei M., y Jalalpour M. Closed-form solutions for crack detection problem of timoshenko beams with various boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 51:667–681, 2009.
- Kocatürk T. y Simsek M. Free vibration analysis of elastically supported timoshenko beams. *Journal of Engineering and Natural Sciences*, 3:79–93, 2005.
- Loya J., Rubio L., y Fernández-Sáez J. Natural frequencies for bending vibrations of timoshenko cracked beams. *Journal of Sound and Vibration*, 290:640–653, 2006.
- Luo J., Zhu S., y Zhai W. Exact closed-form solution for free vibration of euler-bernoulli and timoshenko beams with intermediate elastic supports. *International Journal of Mechanical Sciences*, 213, 2022.
- Raffo J. y Grossi R. Variational approach of timoshenko beams with internal elastic restraints. *12th Pan-American Congress of Applied Mechanics*, 2012.
- Rossit C. y Laura P. Free vibrations of a cantilever beam with a spring-mass system attached to the free end. *Ocean Engineering*, 28:933–939, 2001.
- Zhengou Z., Feng C., Zhiyi Z., y Hongxing H. Vibration analysis of non-uniform timoshenko beams coupled with flexible attachments and multiple discontinuities. *International Journal of Mechanical Sciences*, 80:131–143, 2014.