

DETERMINACIÓN DEL EQUILIBRIO MAGNETOHIDRODINÁMICO A PARTIR DEL PERFIL DEL ÁNGULO DE INCLINACIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO

DETERMINATION OF THE MAGNETOHYDRODYNAMIC EQUILIBRIUM FROM THE PROFILE OF THE MAGNETIC PITCH ANGLE

Nicolás M. Morgan^a y Pablo L. García-Martínez^{a,b}

^a*Instituto Balseiro, UNCuyo - Centro Atómico Bariloche, Av. Bustillo 9500 (8400) S.C. de Bariloche - Río Negro, Argentina*

^b*CONICET, Gerencia de Física - Centro Atómico Bariloche, Av. Bustillo 9500 (8400) S.C. de Bariloche - Río Negro, Argentina*

Palabras clave: Plasmas, Fusión Nuclear, Magnetohidrodinámica, Tokamak, Problema Inverso.

Resumen. La condición de equilibrio magnetohidrodinámico (MHD) en configuraciones toroidales como el tokamak, suele expresarse en términos de la ecuación de Grad-Shafranov. Esta ecuación involucra dos perfiles con información exógena a la condición de equilibrio y cuya variable independiente es la incógnita del problema diferencial. Como la determinación de estos perfiles no es directa, todos los esquemas de resolución de equilibrio MHD son de naturaleza iterativa. En este trabajo, presentamos un método para determinar estos perfiles externos a partir de información experimental resolviendo una secuencia de problemas directos. En particular, utilizamos el perfil del ángulo de inclinación del campo magnético y una estimación de la distribución de la presión en el radio menor del toroide. Finalmente, mostramos que el método converge rápidamente al equilibrio objetivo para un caso realista basado en los parámetros del proyecto ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor).

Keywords: Plasmas, Nuclear Fusion, Magnetohydrodynamics, Tokamak, Inverse Problem.

Abstract. Magnetohydrodynamic (MHD) force balance in toroidal configurations is usually handled by the Grad-Shafranov equation. This equation involves the prescription of two exogenous profiles with information that can not be obtained from equilibrium physics. Since direct measurement of these profiles is not possible, in particular due to the fact that their independent variable is the unknown of the differential problem, numerical schemes to solve this problem are iterative by nature. In this work, we present a method to find these profiles from experimental information by solving a sequence of direct equilibrium problems. In particular, we use magnetic field pitch angle profile and an estimation of the pressure distribution along the minor radius of the torus. Finally, we show that the scheme rapidly converges to the target equilibrium for a realistic case based on the ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) project parameters.

1. INTRODUCCIÓN

En plasmas totalmente ionizados, la condición de equilibrio magnetohidrodinámico (MHD) determina la configuración de campo. Esta información es vital para el diseño y operación de experimentos de confinamiento magnético orientados a fusión nuclear controlada, como los tokamaks (Wesson, 2011). Utilizando un complejo sistema de bobinas, la configuración tipo tokamak confina un plasma de alta temperatura mediante la combinación de un intenso campo magnético toroidal y una corriente toroidal (que da una contribución de campo poloidal). A la fecha, se encuentra en construcción el reactor ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), que es el resultado de un proyecto de colaboración a gran escala y que basa su funcionamiento en este tipo de configuración (www.iter.org). En configuraciones axisimétricas como esta, el balance de fuerzas se determina por medio de la ecuación de Grad-Shafranov, que es una ecuación elíptica de segundo grado no-lineal y no estándar porque incluye dos perfiles de información del plasma que van derivados respecto de la incógnita del problema, el flujo magnético poloidal.

Una dificultad de este enfoque es que los perfiles dato (distribución de presión y corriente poloidal) que determinan el problema del equilibrio, no son medibles en forma directa. Debido a esta dificultad, la práctica usual es recurrir a algoritmos de reconstrucción del equilibrio que estiman la distribución de flujo que mejor ajusta una serie de observables (problema de minimización con restricciones) en lugar de resolver el problema diferencial (Ferron y colab., 1998). Si bien existen varios métodos numéricos capaces de resolver el problema diferencial (Palha et al., 2016), estos requieren como dato de entrada la distribución de corriente poloidal y la presión como función de la propia incógnita, por eso todos los esquemas son iterativos por naturaleza, y se vuelve muy difícil obtener soluciones de equilibrio realistas sin un método adecuado (Zakharov y Pletzer, 1999).

En este trabajo presentamos un esquema iterativo para obtener la distribución de corriente poloidal a partir del perfil de ángulo de inclinación del campo magnético, que es un dato que se obtiene rutinariamente en forma directa y no invasiva en muchos tokamaks. Nuestro esquema puede verse como la resolución de un problema inverso: determinar la ecuación diferencial que satisface el equilibrio MHD a partir de información y perfiles que pueden medirse en forma directa.

En la sección 2 se introduce la representación utilizada normalmente para el campo magnético en configuraciones toroidales. Se deduce la ecuación de Grad-Shafranov que luego es adimensionalizada y normalizada para formular el problema del equilibrio MHD bidimensional con frontera fija. En la sección 3 se formula adecuadamente el problema inverso a partir del perfil del ángulo del campo magnético y describe en detalle el método iterativo desarrollado. En la sección 4 se describen los resultados de convergencia obtenidos para un equilibrio correspondiente a un escenario avanzado previsto para ITER (Shimada y colab., 2007). Por último, en la sección 5 se resumen las conclusiones del trabajo.

2. EQUILIBRIO MHD

2.1. Representación del campo magnético

Dado que el campo magnético \mathbf{B} es solenoidal, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, es posible expresarlo en términos de un potencial vector, es decir, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. En coordenadas cilíndricas (R, ϕ, Z) , $\mathbf{B} = (B_R, B_\phi, B_Z)$. Como el tokamak es una configuración axisimétrica, $\partial/\partial\phi = 0$, es posible

representar al campo como

$$\mathbf{B} = \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \frac{F}{R}, \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right), \quad (1)$$

donde $\Psi(r, z) = rA_\phi(r, z)$ actúa como una función corriente que determina completamente la componente poloidal de campo $\mathbf{B}_p = (B_R, B_Z)$. Esta función se denomina comúnmente función de flujo poloidal y resulta de gran relevancia para los esquemas de confinamiento magnético ya que es proporcional al flujo magnético poloidal

$$\Psi_{pol} = \int \mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r B_Z(r, Z) dr = 2\pi \Psi \quad (2)$$

es decir Ψ da el flujo magnético por radian que atraviesa un círculo de radio mayor R ubicado a altura Z . Las superficies magnéticas, o superficies de flujo, se definen como los contornos de Ψ , o sea, las curvas en el plano poloidal que satisfacen $\Psi(R, Z) = \text{constante}$. Estas curvas en el plano poloidal tienen simetría de revolución, de modo que representan superficies cerradas en el espacio las cuáles son topológicamente equivalentes a un toroide. Las líneas de campo magnético yacen sobre estas superficies, dado que $\nabla \Psi \cdot \mathbf{B} = 0$. Las superficies de flujo se encuentran una dentro de la otra, alrededor de una línea central denominada eje magnético (Wesson, 2011).

La función R que aparece en la Ec. (1) determina la componente toroidal del campo, pues $F = RB_\phi(R, Z)$. Notar que F tiene la misma relación con B_ϕ que Ψ con A_ϕ . Por otro lado, la densidad de corriente \mathbf{j} , se relaciona con el campo magnético a través de la ley de Ampere, $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío. De esto último se deduce que F puede interpretarse como una función corriente para la componente poloidal de \mathbf{j} , de modo que la densidad de corriente resulta

$$\mu_0 \mathbf{j} = \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial Z}, -\frac{\Delta^* \Psi}{R}, \frac{1}{\mu_0 R} \frac{\partial F}{\partial R} \right), \quad (3)$$

donde

$$\Delta^* \Psi = R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi}{R^2} \right), \quad (4)$$

es un operador diferencial elíptico, de segundo orden, conocido como operador de Grad-Shafranov.

2.2. Ecuación de Grad-Shafranov

El equilibrio de las fuerzas que actúan sobre el plasma, o equilibrio MHD, se puede expresar, en su versión más simple, como

$$\nabla P = \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (5)$$

donde P es la presión termodinámica del plasma (considerada isotrópica por simplicidad). Esta condición representa el equilibrio estático, es decir, no se considera el efecto de la rotación del plasma.

Si reemplazamos la Ec. (1) para \mathbf{B} y la Ec. (3) para \mathbf{j} en la condición de equilibrio (5) y tomamos la proyección en la dirección de cada uno de los vectores $\nabla \phi$, \mathbf{B} y $\nabla \Psi$, obtenemos las condiciones (Jardin, 2010)

$$F = F(\Psi), \quad (6)$$

$$P = P(\Psi), \quad (7)$$

$$\Delta^* \Psi = -\mu_0 R^2 \frac{dP}{d\Psi} - F \frac{dF}{d\Psi}, \quad (8)$$

respectivamente. Las primeras dos condiciones indican que, en equilibrio, P y F son únicamente función del flujo poloidal, pero son arbitrarias, es decir, no están determinadas por la física del equilibrio. La tercera relación es la ecuación de Grad-Shafranov (G-S).

2.3. Adimensionalización

Además de μ_0 , para adimensionalizar la ecuación de G-S se necesita una escala de longitud y una escala de campo magnético. En este trabajo se utilizó el radio menor del tokamak, a , para la primera y el campo toroidal de referencia en el eje geométrico, B_0 , para la última. Por análisis dimensional, se obtiene

$$\tilde{\Psi} = \frac{\Psi}{B_0 a^2}, \quad \tilde{P} = \frac{P \mu_0}{B_0^2}, \quad \tilde{\mathbf{j}} = \frac{\mathbf{j} \mu_0 a}{B_0}, \quad \tilde{I} = \frac{I \mu_0}{B_0 a}, \quad \tilde{F} = \frac{F}{B_0 a}.$$

De ahora en más, en el desarrollo del presente trabajo se utilizarán variables adimensionalizadas a menos que se especifique lo contrario, por lo que se omitirán las tildes.

2.4. Problema directo

La ecuación de G-S incluye derivadas respecto de la incógnita que se busca hallar. Esto resulta inconveniente no sólo por los problemas de convergencia numérica (LoDestro y Pearlstein, 1994). Por ejemplo, si se debe especificar que la presión vale p_0 en el eje magnético, la condición es $P(\Psi_0) = P_0$. Pero como no se conoce aún el valor de Ψ_0 , no es posible definir una dependencia funcional correcta para P .

Para evitar este tipo de dificultades, normalizamos la incógnita del problema

$$\psi = \frac{\Psi}{\Psi_0}, \quad (9)$$

Ψ_0 es el valor máximo de la función de flujo poloidal (adimensional) que se alcanza en el eje magnético. Redefiniendo las funciones arbitrarias como $p(\psi) = P(\Psi)$ y $f(\psi) = F(\Psi)$, podemos formular el problema diferencial directo del equilibrio como, hallar ψ que verifique

$$\begin{cases} -\Delta^* \psi = \frac{1}{\Psi_0^2} (R^2 p' + f f'), & \text{en } \Omega \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{máx}(\psi) = 1, \end{cases} \quad (10)$$

donde Ψ_0 actúa en forma similar a un autovalor, su valor debe ser tal que el máximo de ψ sea 1. En la sección 3 se introduce un método para determinar Ψ_0 durante el proceso iterativo de resolución. El problema (10) requiere la especificación de la forma de la separatriz, $\partial\Omega$, que es la última superficie de flujo que separa al plasma del vacío. A este enfoque se lo denomina problema de frontera fija y es el utilizado en este trabajo. Cuando no se conoce la forma de la separatriz se formula el problema de frontera libre que requiere la especificación de las corrientes en las bobinas externas (Pérez Winter, 2019). Dado que las funciones arbitrarias p y f son en general no-lineales, utilizamos iteraciones de Newton-Raphson. La solución del problema diferencial se efectúa mediante el método de elementos finitos, implementado en FreeFem++ (Hecht, 2012).

La Fig. 1 (a) muestra los contornos de la solución del problema directo (10), tomando la separatriz objetivo para ITER (Shimada y colab., 2007). Las funciones $f f'$ y p' del mismo equilibrio se muestran en los paneles (b) y (c). Estos resultados fueron obtenidos mediante un método iterativo a partir del perfil de presión en función del radio menor (ρ , definido más abajo) y del factor de seguridad (Montes, 2017; Garcia-Martinez y Montes, 2020).

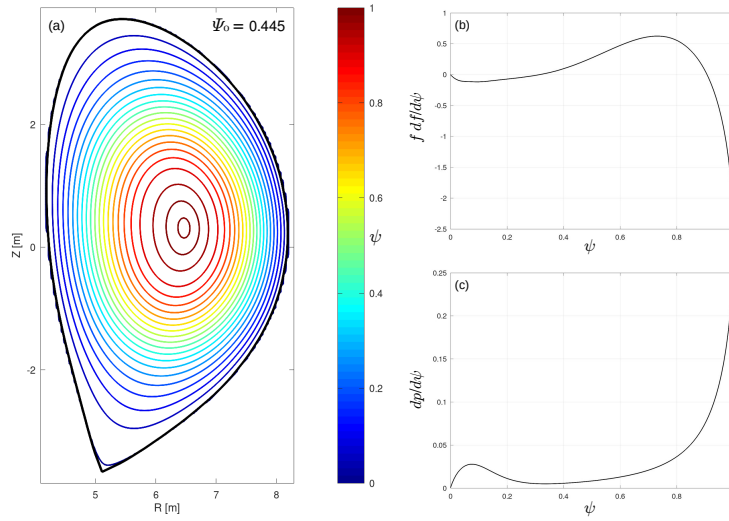


Figura 1: (a) Mapa de contornos de flujo para un equilibrio tipo ITER, y la dependencia de las derivadas de las funciones (b) f^2 y (c) p correspondientes. El valor de la función de flujo que normaliza la solución en este problema es $\Psi_0 = 0,445$.

3. DETERMINACIÓN DEL EQUILIBRIO A PARTIR DEL PERFIL DEL ÁNGULO DE INCLINACIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO

En general, la definición de un escenario de operación o la determinación de la configuración de equilibrio en un experimento se hace en términos de perfiles con información del plasma que no son los que figuran en el RHS de la ecuación de G-S. Como las reformulaciones del problema del equilibrio en términos de otros perfiles conducen típicamente a problemas con dificultades de convergencia numérica (LoDestro y Pearlstein, 1994), se suele iterar en las funciones $f(\psi)$ y $p(\psi)$ hasta obtener un resultado que ajusta el dato del problema.

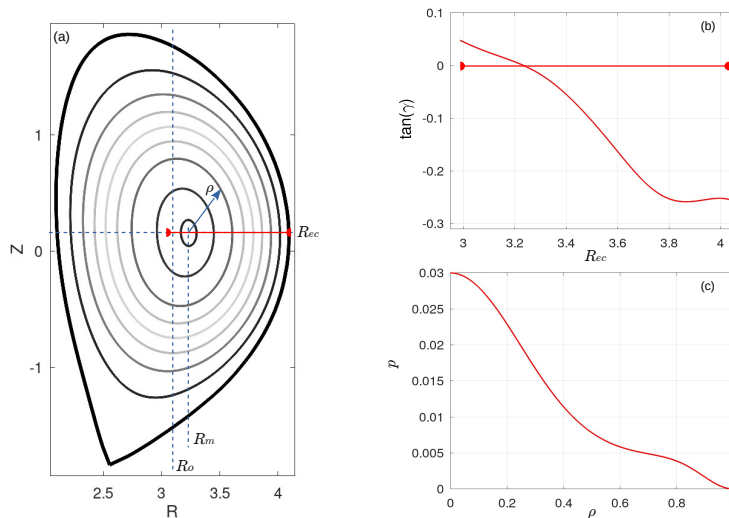


Figura 2: (a) Contornos de flujo. Se indica el radio ecuatorial R_{cc} que es el segmento donde se mide el ángulo de inclinación del campo magnético, γ . También se indica el R_0 y la posición del eje magnético R_m y ρ es el radio menor, coordenada basada en el contenido de flujo toroidal. (b) Perfil de γ . (c) Perfil de presión en función de ρ .

En este trabajo introducimos un esquema iterativo para hallar las funciones f y p del problema de G-S, a partir del perfil del ángulo del campo magnético, γ medido en el plano ecuatorial

y la forma del perfil de presión en función de la coordenada de flujo toroidal, ρ . El perfil $\gamma(R_{ec})$ se puede medir mediante una técnica basada en MSE (motional Stark effect) (Conway y colab., 2010). Por otro lado, el radio menor se define a partir del contenido de flujo toroidal Φ de cada contorno

$$\rho^2 = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (11)$$

donde Φ_0 es el flujo toroidal total encerrado por la separatriz. Esta coordenada vale cero en el eje magnético y uno en la separatriz, como se esquematiza en la Fig. 2 (a).

3.1. Planteo del problema

En este caso, planteamos el problema del equilibrio de la siguiente manera

Problema γ -solver: dada la forma de la separatriz $\partial\Omega$, hallar $\{\Psi_0, f(\psi), \tilde{p}(\psi), p_0\}$ tal que la solución del problema (10) satisfaga $\gamma(R_{ec}) = \gamma_{dato}(R_{ec})$ y el perfil de presión normalizado sea $p(\rho)/p_0 = \tilde{p}_{dato}(\rho)$,

donde la presión dato está normalizada a uno, pues p_0 (la amplitud del perfil de presión) pasa a ser parte del problema a resolver: el valor de p_0 adecuado es el que da un equilibrio con la posición del eje magnético determinada por el cruce por cero de γ_{dato} . En la Fig. 2 se muestra un ejemplo de los perfiles dato.

3.2. Relaciones para el ángulo de inclinación

El perfil del ángulo de inclinación del campo magnético, medido en el plano ecuatorial, verifica

$$\tan[\gamma(R_{ec})] = \frac{B_{\theta,ec}}{B_{\phi,ec}}, \quad (12)$$

es decir, es proporcional al cociente entre las componentes poloidal y toroidal del campo magnético. Para la componente poloidal tenemos

$$B_{\theta,ec} = \frac{1}{R_{ec}} \frac{d\Psi}{dR} \Big|_{ec}, \quad (13)$$

donde la derivada radial está restringida al plano ecuatorial y por eso puede escribirse como un diferencial total. La componente toroidal se puede obtener simplemente como $B_{\phi,ec} = F/R_{ec}$. Reemplazando estas últimas relaciones en la Ec. (12) obtenemos

$$\tan(\gamma) = \frac{d\Psi}{d\rho} \left(\frac{1}{F} \frac{d\rho}{dR} \Big|_{ec} \right), \quad (14)$$

que resulta ser una expresión de mucha utilidad para la formulación de un método de resolución iterativo.

3.3. Mapeo del dato a coordenadas de flujo

Partimos de un equilibrio de referencia obtenido especificando la dependencia lineal para $f(\psi)$ y $p(\psi)$ descrita en la tesis de Montes (2017), en el problema (10). Empleamos valor de corriente y presión compatibles con el escenario del que provienen los perfiles dato. En este paso se especifica la forma de la separatriz, por lo cual, la forma de los contornos de flujo ya es bastante buena. Sin embargo, la distribución del flujo magnético, densidad de corriente y presión están muy lejos del equilibrio objetivo.

Para actualizar la terna $\{\Psi_0, f(\psi), p(\psi)\}$ utilizando el perfil de ángulo de inclinación utilizamos la expresión (14), pero primero es necesario mapear adecuadamente los valores de γ (que están especificados en función de la coordenada radial) a una coordenada de flujo. Para esto definimos la coordenada radial normalizada como

$$r_n = \frac{R_{ec} - R_m}{R_{max} - R_m}, \quad (15)$$

donde R_m es la posición del eje magnético y R_{max} la posición radial extrema (sobre la separatriz) en el plano ecuatorial, de modo que $r_n \in [0, 1]$. Está claro que podemos definir r_n tanto para el dato $\gamma(R_{ec})$ como para equilibrio en la iteración k , denotada por r_n^k .

Entonces, en primer lugar evaluamos el dato en la coordenada normalizada. Formalmente esto corresponde a la asignación

$$\tilde{\gamma}[r_n(R_{ec})] = \gamma_{dato}(R_{ec}), \quad (16)$$

aunque en la práctica tenemos valores discretos de γ y R_{ec} , así que basta con agregar la columna r_n e interpolar consistentemente.

Por último, construimos el perfil de γ objetivo para este nivel de iteración, mediante la siguiente asignación

$$\gamma_{obj,k}[\rho_k(r_n^k)] = \tilde{\gamma}(r_n^k), \quad (17)$$

es decir, fijamos la dependencia de $\gamma(\rho)$, evaluando tanto la coordenada de flujo como el dato en la coordenada radial normalizada del equilibrio en la iteración k . Esta asignación debe repetirse para el equilibrio en cada nivel de iteración. Es claro que la aproximación va mejorando en la medida que el equilibrio k -ésimo reproduce mejor los perfiles dato.

3.4. Actualización de iterativa de $f(\psi)$ y $p(\psi)$

Partiendo de una aproximación lineal para estas funciones arbitrarias empleamos un método iterativo para corregirlas hasta que los perfiles del equilibrio reproduzcan los perfiles dato con un nivel de aproximación adecuado. La iteración tiene dos niveles. En el primer nivel, el más interno se busca reproducir los perfiles magnéticos usando el perfil γ_{dato} . Como no se conoce el valor de la presión máxima, se ejecuta un segundo nivel iterando sobre p_0 para lograr que el equilibrio calculado tenga la posición adecuada del eje magnético.

3.4.1. Primer nivel de iteración

Empleando el mapeo del dato radial a coordenada de flujo (17), podemos utilizar la relación (14) para actualizar la relación de flujos de la siguiente forma

$$\left(\frac{d\Psi}{d\rho}\right)_{k+1} = \frac{\tan(\gamma_{obj,k})}{\tan(\gamma_k)} \left(\frac{d\Psi}{d\rho}\right)_k \quad (18)$$

donde suponemos que la variación de F y $\rho(R_{ec})$ es despreciable para la corrección de la relación entre los flujos poloidal y toroidal. Es importante notar que esta aproximación no implica que F y $\rho(R, Z)$ se mantienen fijos, pues al actualizar el equilibrio en la iteración $k + 1$ se actualizan todos los perfiles.

Una vez que contamos con la actualización de $d\Psi/d\rho$, podemos integrarla para hallar Ψ_0^{k+1} , luego normalizarla para obtener $(d\psi/d\rho)_{k+1}$. Entonces podemos actualizar el gradiente de presión mediante

$$\left(\frac{dp}{d\psi}\right)_{k+1} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{dato} \left(\frac{d\psi}{d\rho}\right)_{k+1}^{-1}. \quad (19)$$

y la función de corriente poloidal, usando la ecuación de G-S promediada en superficies de flujo (Blum, 1989)

$$\left(\frac{df^2}{d\psi}\right)_{k+1} = -\frac{2}{\langle R^{-2} \rangle} \left\{ \left(\frac{dp}{d\psi}\right)_{k+1} + \frac{(\Psi_0^{k+1})^2}{V_\rho} \frac{d}{d\rho} \left[V_\rho \left\langle \frac{|\nabla\rho|^2}{R^2} \right\rangle \left(\frac{d\psi}{d\rho}\right)_{k+1} \right] \right\}, \quad (20)$$

donde $V(\rho)$ es el volumen encerrado por el contorno de flujo ρ , $V_\rho = dV/d\rho$ y $\langle \cdot \rangle$ denota promediado en cada superficie magnética. Una vez actualizado el RHS de la Ec. de G-S podemos recalculamos el equilibrio y completar el paso $k + 1$.

La iteración continúa hasta minimizar la diferencia $\|\gamma_k(R_{ec}) - \gamma_{dato}(R_{ec})\|$. En este caso, no resulta conveniente imponer de antemano una tolerancia como criterio de parada de la iteración porque el nivel de aproximación logrado será variable, de acuerdo a qué tan buena fue la aproximación de p_0 empleada. Para completar la solución del problema se requiere un segundo nivel de iteración para hallar el mejor valor de p_0 .

3.4.2. Segundo nivel de iteración

El primer nivel de iteración (en k) descrito anteriormente requiere la especificación de la amplitud del perfil de presión y procede ajustando la relación de flujos $d\Psi/d\rho$ en base al perfil de γ . Debido al uso de coordenadas de flujo, impuesto mediante el mapeo (16) y (17), la iteración no corrige la posición del eje magnético, sólo ajusta lo mejor posible el perfil usando coordenadas normalizadas.

Para corregir este problema usamos un segundo nivel de iteración, en el que variamos p_0 , con el objetivo de que la posición del eje magnético del equilibrio calculado coincida con R_m . Dado que la dependencia de R_m con p_0 es monótona y casi lineal, es posible hallar una buena aproximación a la solución en pocas iteraciones con el método de la secante.

Adoptando el índice n para la iteración en p_0 , efectuamos el primer nivel de iteración en k , con una primera estimación $p_0^{n=1}$. La siguiente estimación de p_0 se basa en el resultado de la primera. Usamos $p_0^{n=2} = 1,1p_0^{n=1}$ si $R_m^{n=1} < R_m^{dato}$, o bien, $p_0^{n=2} = 0,9p_0^{n=1}$ si $R_m^{n=1} > R_m^{dato}$.

Una vez que se tienen dos iteraciones completas en p_0 , podemos continuar con el método de la secante

$$p_0^{n+1} = p_0^n - \frac{p_0^n - p_0^{n-1}}{R_m^n - R_m^{n-1}} (R_m^n - R_m^{dato}), \quad (21)$$

hasta que $|R_m^n - R_m^{dato}|/R_0$ cae por debajo de un valor de tolerancia adecuado para la resolución de la malla que se utilice (típicamente en el orden de 10^{-4}).

En resumen, la resolución del problema “ γ -solver” mencionado en la Subsección 3.1 tiene tres niveles de iteración: el más externo (en n) para determinar la amplitud de la presión que mejor ajusta la posición del eje magnético, que en cada paso requiere completar la iteración en k para ajustar lo mejor posible la dependencia de γ mapeada a coordenadas de flujo, que a su vez requiere la solución del problema directo, que por ser no-lineal involucra las iteraciones de Newton-Raphson.

4. RESULTADOS

Para probar el método de cálculo, utilizamos como los datos de la Fig. 2 para definir el problema del equilibrio. Sólo requerimos la forma de la separatriz, el perfil $\gamma(R_{eq})$ y la forma del perfil $p(\rho)$. Partiendo de una solución de equilibrio con perfiles p' y ff' lineales en ψ , que permiten resolver fácilmente el problema (10), y una estimación inicial para la presión $p_0^{n=1} = 0,2$.

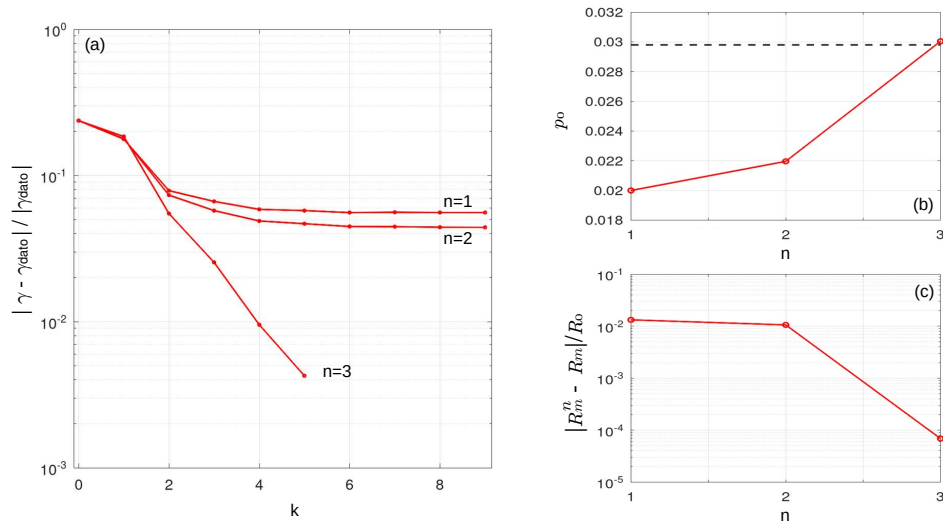


Figura 3: (a) Convergencia del perfil de ángulo de inclinación en función de k para tres estimaciones de p_0 . (b) Estimaciones de p_0 del segundo nivel de iteración. $p_0 = 0,0297$ para el equilibrio objetivo (línea de trazos). (c) Convergencia de la posición del eje magnético.

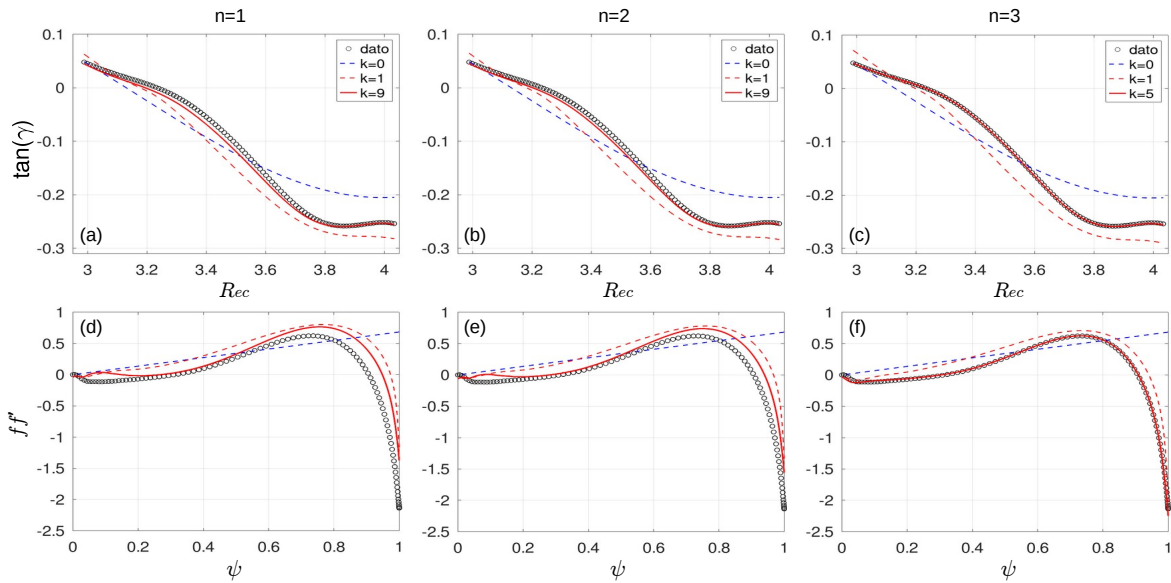


Figura 4: Evolución de los perfiles de $\gamma(R_{cc})$ (a-c) y $f f'(\psi)$ (d-f) durante los dos niveles de iteración (rojo). Los perfiles del equilibrio inicial (lineal) se muestran en línea de trazos azul; los perfiles objetivo, con círculos negros.

En la Fig. 3 se muestra la convergencia de la doble iteración planteada. Para cada estimación de p_0 (iteración n) se parte del equilibrio lineal de referencia. Cuando la estimación de p_0 no es buena ($n = 1$ y $n = 2$), la aproximación del perfil de γ es deficiente. Los perfiles al comienzo y al final de cada iteración se muestran en la Fig. 4.

Mientras la estimación de la presión es baja, el eje magnético se mantiene a la izquierda de la posición definitiva, y el perfil de γ por debajo del objetivo. Una vez completados dos niveles de iteración, se aplica el método de la secante que en una iteración encuentra un valor de presión suficientemente bueno para reducir el error en la posición del eje magnético por debajo de la tolerancia (10^{-4} , como se ve en la Fig. 3c). Con este valor de presión, la iteración en k requiere sólo 5 pasos para satisfacer la tolerancia, fijada en 0,005 en este ejemplo.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo describimos detalladamente un esquema iterativo para resolver el problema inverso de equilibrio MHD en configuraciones de confinamiento bidimensionales (con simetría de revolución), es decir, determinar la ecuación diferencial que da lugar a la configuración real a partir de datos que pueden ser determinados experimentalmente. En particular, usando una solución del problema lineal de equilibrio como semilla para la iteración, el esquema permite inferir las funciones arbitrarias $p'(\psi)$ y $f f'(\psi)$, el valor del flujo poloidal Ψ_0 y la presión máxima del plasma p_0 a partir del perfil de ángulo de inclinación del campo magnético en el plano ecuatorial y la forma (o una estimación) de la distribución de la presión como función del radio menor. La prueba de convergencia realizada con un ejemplo realista de equilibrio previsto en escenarios avanzados de ITER, muestra que son necesarias unas pocas iteraciones para hallar la solución. Cabe destacar que en cada paso de iteración deben realizarse las iteraciones de Newton-Raphson, pues se trata de una secuencia de problemas no lineales. El esquema desarrollado tiene muchas aplicaciones potenciales entre las que se cuentan el análisis de descargas a partir de información experimental, caracterización de escenarios de operación de distintas máquinas y el diseño de esquemas de control de perfiles del plasma.

REFERENCIAS

- Blum J. *Numerical Simulation and Optimal Control in Plasma Physics: With Applications to Tokamaks*. Wiley-Gauthier-Villars, 1989.
- Conway N. y colab. The MAST motional Stark effect diagnostic. *Review of Scientific Instruments*, 81, 10D738, 2010, <https://doi.org/10.1063/1.3494254>
- Ferron J. y colab. Real time equilibrium reconstruction for tokamak discharge control. *Nuclear Fusion*, 38(7):1055–1066, 1998, <https://doi.org/10.1088/0029-5515/38/7/308>
- Garcia-Martinez P. y Montes P. An efficient MHD equilibrium solver for control oriented transport models. *Fusion Engineering and Design*, 152:111455, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2020.111455>
- Hecht F. New development in freefem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4):251–265, 2012, <https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013>
- Jardin S. *Computational Methods in Plasma Physics*. CRC Press, 2010.
- LoDestro L. y Pearlstein L. On the Grad–Shafranov equation as an eigenvalue problem, with implications for q solvers. *Physics of Plasmas*, 1(1):90–95, 1994, <https://doi.org/10.1063/1.870464>
- Montes P.E. Cálculo de equilibrios toroidales en plasmas de fusión nuclear. *Universidad Nacional de Cuyo, Instituto Balseiro*, 2017, <http://ricabib.cab.cnea.gov.ar/657/1/Montes.pdf>
- Palha A., Koren B., y Felici F. A mimetic spectral element solver for the Grad–Shafranov equation. *Journal of Computational Physics*, 316:63–93, 2016, <https://doi.org/10.48550/arXiv.1512.05989>
- Pérez Winter A.E. Equilibrio magnetohidrodinámico con frontera libre y su aplicación a plasmas de fusión. *Universidad Nacional de Cuyo, Instituto Balseiro*, 2019, http://ricabib.cab.cnea.gov.ar/824/1/1Perez_Winter.pdf
- Shimada M. y colab. Chapter 1: Overview and summary. *Nuclear Fusion*, 47(6):S1–S17, 2007, <https://doi.org/10.1088/0029-5515/47/6/s01>
- Wesson J. *Tokamaks, 4th ed.* Oxford University Press, 2011.
- Zakharov L.E. y Pletzer A. Theory of perturbed equilibria for solving the Grad–Shafranov equation. *Physics of Plasmas*, 6(12):4693–4704, 1999, <https://doi.org/10.1063/1.873756>