

## UNA TEORÍA GENERAL PARA LA ESTIMACIÓN DE BANDGAPS EN LA VIBRACIÓN FLEXO-TORSIONAL DE VIGAS VLASOV

### A GENERAL THEORY FOR ESTIMATING BANDGAPS IN FLEXURAL- TORSIONAL VIBRATIONS OF VLASOV BEAMS

Víctor H. Cortínez<sup>a,b,c</sup> y Patricia N. Domínguez<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada CIMTA, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, [vcortine@hotmail.com](mailto:vcortine@hotmail.com)*

<sup>b</sup>*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, [pdoming@uns.edu.ar](mailto:pdoming@uns.edu.ar)*

<sup>c</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET*

**Palabras clave:** vigas Vlasov, atenuación de vibraciones, vigas localmente resonantes, resonadores múltiples.

**Resumen.** En este trabajo se presenta un estudio sobre la dinámica flexo-torsional de vigas finitas con sección transversal arbitraria, acopladas a un gran número de resonadores adosados a lo largo de su longitud. Para ello, se desarrolla una formulación homogeneizada de la teoría de Vlasov que incorpora el efecto de los resonadores mediante propiedades seccionales inerciales generalizadas dependientes de la frecuencia. Se demuestra la existencia de bandgaps, es decir de rangos de frecuencias con ausencia de frecuencias naturales, que son de gran importancia para la atenuación de vibraciones forzadas. Se desarrolla un enfoque general para estimar las localizaciones de los bandgaps en función de las propiedades seccionales transversales equivalentes. La metodología presenta gran potencial en el diseño de sistemas de resonadores para el control de vibraciones en diversas aplicaciones técnicas (puentes, edificios, etc.).

**Keywords:** Vlasov beams, vibration attenuation, locally resonant beams, multiple resonators.

**Abstract.** This paper deals with a study on the flexural-torsional dynamics of finite beams with an arbitrary cross-section, coupled with a large number of resonators attached along their lengths. To do this, a homogenized formulation of the Vlasov theory, incorporating the effect of the resonators by means of generalized inertial cross-sectional properties, depending on the frequency, is developed. It is demonstrated the existence of bandgaps, that is to say frequency ranges free of natural frequencies. Such bandgaps are very important for attenuating forced vibrations. A general theoretical approach for estimating the bandgap locations as functions of the equivalent cross-sectional properties is developed. The methodology presents a great potential in the design of resonator system for controlling vibrations in diverse technical applications (bridges, buildings, etc.).

## 1 INTRODUCCIÓN

Los metamateriales localmente resonantes constituyen una nueva clase de materiales artificiales consistentes en una matriz que incorpora microresonadores distribuidos de manera aproximadamente periódica (Liu et al., 2000). En los últimos años hubo un interés creciente en el desarrollo de tales materiales debido a su capacidad para atenuar vibraciones a partir de la vibración interna de los microresonadores que actúan como absorbedores dinámicos. Asimismo, este concepto ha sido utilizado para la construcción de estructuras esbeltas localmente resonantes constituidas por vigas o placas suportando una gran cantidad de resonadores (o absorbedores dinámicos) que pueden ser materializados con metodologías constructivas relativamente simples (Cveticanin y Mester, 2016; Sun et al., 2010). Estas estructuras localmente resonantes, encuentran aplicación en diversas áreas de ingeniería mecánica y civil (Casalotti et al., 2018; Fonseca Dal Poggeto, et al. 2019).

La propiedad remarcable de las estructuras o materiales localmente resonantes, relacionada con la atenuación de vibraciones, es la formación de bandas de atenuación o “bandgaps”. Éstas corresponden a rangos de frecuencia libres de resonancias y consecuentemente con amplitudes atenuadas de la vibración forzada.

Se han realizado varios estudios sobre la dinámica de vigas localmente resonantes considerando movimientos flexionales, longitudinales o torsionales (Sun et al., 2010; Xiao et al., 2013; Sugino et al., 2017; Wang et al., 2018). En particular, se han desarrollado fórmulas o metodologías numéricas para la estimación de los mencionados bandgaps a partir de estudios de propagación de ondas en estructuras infinitas y, en menor medida, del análisis de vibraciones estacionarias en estructuras finitas (Sugino et al., 2017; El-Borgi et al., 2020). Fang et al., (2009) han estudiado la formación de bandgaps en las vibraciones flexo-torsionales de vigas de pared delgada con materiales de diferente rigidez alternados periódicamente, aunque no para vigas localmente resonantes. Recientemente, se ha estudiado la dinámica flexo-torsional acoplada de vigas rectas localmente resonantes de paredes delgadas a partir de un análisis de vibración forzada (Dominguez y Cortínez, 2019).

En este trabajo, se presenta una extensión de la investigación previamente mencionada (Dominguez y Cortínez, 2019) dirigida al desarrollo de una metodología general para la determinación de bandgaps múltiples en vigas de sección de pared delgada arbitraria. El modelo matemático se formula a partir de la teoría de Vlasov (Vlasov, 1961) para vigas, en conjunto con la hipótesis de distribución continua de resonadores a lo largo de su longitud. De esta manera, se obtienen ecuaciones homogeneizadas para las vigas localmente resonantes. La diferencia fundamental de estas ecuaciones respecto a las correspondientes a la estructura sin resonadores reside en el hecho de que las propiedades inerciales seccionales resultan dependientes de la frecuencia de excitación. Se discute la formación de bandgaps y su correspondiente determinación a partir del análisis de tales propiedades inerciales seccionales generalizadas, adaptando la metodología propuesta por Ávila et al. (2008) y Rohan et al. (2009) para materiales continuos localmente resonantes. Se verifica la validez de la estimación de bandgaps a partir de un análisis de vibración forzada para diferentes tipos de cargas.

## 2 DINÁMICA FLEJO-TORSIONAL DE VIGAS DE PARED DELGADA LOCALMENTE RESONANTES

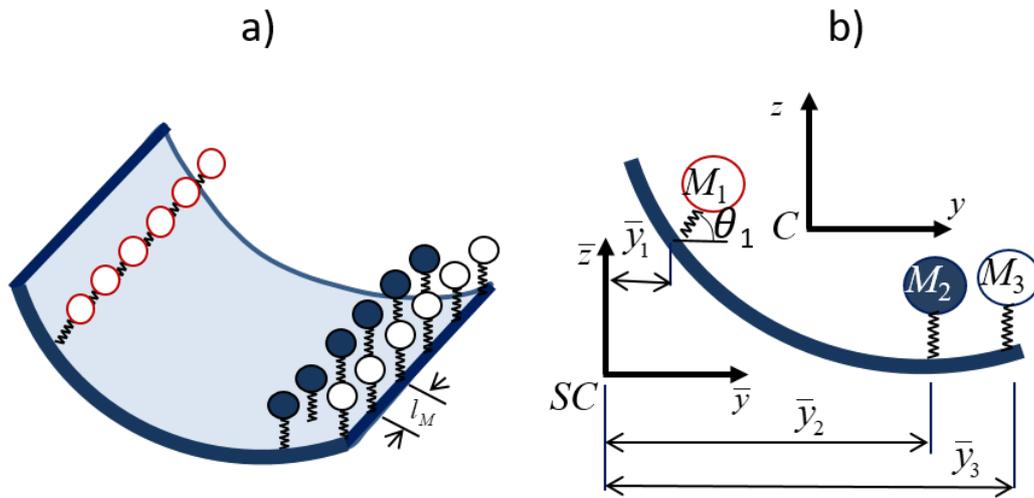


Figura 1: Viga de pared delgada con resonadores periódicamente distribuidos.

### 2.1 Ecuaciones gobernantes para la dinámica del sistema viga-resonadores

Se considera la viga de pared delgada con resonadores masa-resorte vinculados en  $N_s$  secciones equidistantes, sujeta a cargas armónicas transversales (Figura 1). Cada sección transversal tiene  $N_r$  resonadores orientados según una dirección que forma un ángulo  $\theta$  con respecto al eje  $y$ , como se muestra en la Figura 1b. Se asume que las  $N_s$  secciones indicadas tienen idéntica configuración de resonadores (posteriormente se relajará esta hipótesis). La dinámica flexo-torsional de tal sistema se describe mediante la teoría de Vlasov (Vlasov, 1961):

$$\begin{aligned}
 EI_y \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} - \rho A y_s \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_r} K_j (\xi_{ij} - D_{ij}) S_j \delta(x - x_i) + \bar{q}_z \cos(\omega t) \\
 EI_z \frac{\partial^4 v_s}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} + \rho A z_s \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_r} K_j (\xi_{ij} - D_{ij}) C_j \delta(x - x_i) + \bar{q}_y \cos(\omega t) \\
 EC_w \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - GJ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{I_s}{A} \phi + z_s v_s - y_s w_s \right) &= \\
 = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_r} \left( K_j \bar{y}_j (\xi_{ij} - D_{ij}) S_j - K_j \bar{z}_j (\xi_{ij} - D_{ij}) C_j \right) \delta(x - x_i) + \bar{m}_x \cos(\omega t) \\
 M_j \frac{d^2 \xi_{ij}}{dt^2} + K_j \xi_{ij} &= K_j D_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N_s \quad j = 1, 2, \dots, N_r
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde:

$$D_{ij} = v_{si} C_j + w_{si} S_j + \phi_i r_j, \quad S_j = \text{sen}(\theta_j), \quad C_j = \text{cos}(\theta_j), \quad r_j = \bar{y}_j S_j - \bar{z}_j C_j \tag{2}$$

En las expresiones previas,  $v_s$  y  $w_s$  corresponden a las componentes del desplazamiento transversal del centro de corte (en las direcciones  $y$  y  $z$ , respectivamente),  $\phi$  a la rotación

torsional,  $\xi_{ij}$  es el desplazamiento, en la dirección del resorte  $j$ -ésimo, de la masa  $j$ -ésima ubicada en la sección  $x_i$ ,  $D_{ij}$  es el desplazamiento del punto de anclaje del resorte  $j$ -ésimo en la dirección del mismo,  $w_{si}$ ,  $v_{si}$  y  $\phi_i$  corresponden a los valores de  $w_s$ ,  $v_s$  y de  $\phi$  en la coordenada  $x_i$ ,  $EI_y$ ,  $EI_z$ ,  $EC_w$  y  $GJ$  son las rigideces de flexión, torsión por alabeo y torsión pura respectivamente,  $\rho$  es la densidad,  $A$ ,  $I_s$ ,  $y_s$ ,  $z_s$  corresponden al área de la sección transversal, el momento de inercia con respecto al centro de corte y las coordenadas del centro de corte con respecto al centroide respectivamente,  $K_j$  y  $M_j$  son la rigidez y la masa del resonador  $j$ -ésimo,  $\bar{y}_j$  y  $\bar{z}_j$  son las coordenadas del punto de anclaje del resonador  $j$ -ésimo con respecto al centro de corte,  $\bar{q}_z$ ,  $\bar{q}_y$ ,  $\bar{m}_x$  corresponden a las amplitudes de las cargas distribuidas en las direcciones  $z$  e  $y$ , y al momento torsor distribuido con respecto al eje  $x$ , respectivamente, y  $\delta(x-x_i)$  es la función de Dirac. El sistema se complementa con las correspondientes condiciones de borde.

## 2.2 Formulación homogeneizada: teoría de Vlasov para la dinámica de vigas localmente resonantes

Se considera que el sistema bajo estudio tiene un número  $N_s$  de secciones transversales muy grande. Consecuentemente, puede suponerse que la viga está en contacto con infinitos resonadores de masa y rigidez distribuidas  $M_j/l_M$  y  $K_j/l_M$  ( $j=1,2,\dots,N_r$ ) respectivamente, donde  $l_M$  es la distancia entre resonadores. Con la ayuda de tal idealización y asumiendo vibraciones armónicas ( $w_s = W(x)\cos(\omega t)$ ,  $v_s = V(x)\cos(\omega t)$ ,  $\phi = \psi(x)\cos(\omega t)$ ,  $\xi_{ij} = \bar{\xi}_{ij}\cos(\omega t)$ ), el sistema anterior puede ser escrito, después de eliminar las variables  $\xi_{ij}$  en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} EI_y \frac{d^4 W}{dx^4} - \overline{\rho A_1} \omega^2 W + \overline{\rho A y_s} \omega^2 \psi - \overline{\rho A_{12}} \omega^2 V &= \bar{q}_z \\ EI_z \frac{d^4 V}{dx^4} - \overline{\rho A_2} \omega^2 V - \overline{\rho A z_s} \omega^2 \psi - \overline{\rho A_{12}} \omega^2 W &= \bar{q}_y \\ EC_w \frac{d^4 \psi}{dx^4} - GJ \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \overline{\rho A y_s} \omega^2 W - \overline{\rho A z_s} \omega^2 V - \overline{\rho I_s} \omega^2 \psi &= \bar{m}_x \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\overline{\rho A_1}$ ,  $\overline{\rho A_2}$ ,  $\overline{\rho A y_s}$ ,  $\overline{\rho A z_s}$  y  $\overline{\rho I_s}$  son propiedades inerciales seccionales generalizadas expresadas como:

$$\begin{aligned} \overline{\rho A_1} &= \rho A \left( 1 + \sum_{j=1}^{N_r} \frac{\alpha_j S_j^2}{1 - (\omega/\omega_j)^2} \right), & \overline{\rho A_2} &= \rho A \left( 1 + \sum_{j=1}^{N_r} \frac{\alpha_j C_j^2}{1 - (\omega/\omega_j)^2} \right) \\ \overline{\rho A_{12}} &= \rho A \sum_{j=1}^{N_r} \frac{\alpha_j S_j C_j}{1 - (\omega/\omega_j)^2}, & \overline{\rho I_s} &= \rho I_s \left( 1 + \frac{A}{I_s} \sum_{j=1}^{N_r} \alpha_j \frac{r_j^2}{1 - (\omega/\omega_j)^2} \right) \\ \overline{\rho A y_s} &= \rho A y_s - \rho A \sum_{j=1}^{N_r} \frac{\alpha_j r_j S_j}{1 - (\omega/\omega_j)^2}, & \overline{\rho A z_s} &= \rho A z_s + \rho A \sum_{j=1}^{N_r} \frac{\alpha_j r_j C_j}{1 - (\omega/\omega_j)^2} \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\omega_j = \sqrt{K_j / M_j}$  es la frecuencia natural local del resonador  $j$ -ésimo y  $\alpha_j = M_j / (\rho A l_M)$  es el cociente entre la masa total de los resonadores  $j$  y la de la viga. Como puede observarse, la formulación homogeneizada (3) es formalmente idéntica a aquella correspondiente a la teoría de Vlasov sin resonadores aunque con propiedades seccionales inerciales (4), dependientes de la frecuencia de excitación  $\omega$ , que codifican el efecto de los resonadores. Esta forma de escribir la ecuación gobernante puede ser de utilidad para obtener soluciones analíticas y numéricas más simples que aquellas del sistema original (Dominguez y Cortínez, 2019) y también para estudiar la existencia de bandas de atenuación (bandgaps) de vibraciones forzadas, como se verá en la sección siguiente. Debe observarse que el sistema anterior es válido también cuando se tienen 2 (o más) sistemas de resonadores equidistantes intercalados como se muestra en la Figura 2a.

### 3 FORMACIÓN DE BANDGAPS

Se demuestra a continuación que el sistema anteriormente formulado presenta bandgaps definidos como intervalos de frecuencia donde no pueden existir resonancias o intervalos donde el sistema no presenta frecuencias naturales. Tales bandas resultan independientes de las condiciones de borde.

Resolviendo el sistema (3) para el problema de vibraciones libres ( $\bar{q}_y = \bar{q}_z = \bar{m}_x = 0$ ) con las correspondientes condiciones de borde, se obtienen las frecuencias naturales  $\omega_m$  y los desplazamientos modales asociados ( $V_m, W_m, \psi_m$ ). Tales magnitudes deben verificar la fórmula de Rayleigh (que puede ser obtenida a partir de (3)):

$$\omega_m^2 = \frac{L_{S_m}}{L_{K_m}} \quad (5)$$

donde  $L_{S_m}$  y  $L_{K_m}$  son las expresiones modales de las energías de deformación y cinética dadas por:

$$L_{S_m} = \int_0^L \left( EI_y (W_m'')^2 + EI_z (V_m'')^2 + EC_w (\psi_m'')^2 + GJ (\psi_m')^2 \right) dx$$

$$L_{K_m} = \int_0^L \left( W_m \left( \overline{\rho A_1} W_m - \overline{\rho A y_s} \psi_m + \overline{\rho A_{12}} V_m \right) + V_m \left( \overline{\rho A_2} V_m + \overline{\rho A z_s} \psi_m + \overline{\rho A_{12}} W_m \right) + \psi_m \left( \overline{\rho A z_s} V_m - \overline{\rho A y_s} W_m + \overline{\rho I_s} \psi_m \right) \right) dx \quad (6)$$

Puesto que  $\omega_m^2$  y  $L_{S_m}$  son cantidades positivas, la expresión (5) tiene sentido sólo si la energía cinética también lo es:  $L_{K_m} > 0$ . Es conveniente reescribir esta última de la siguiente manera:

$$L_{K_m}(\omega_m) = \int_0^L \mathbf{U}_m^T \mathbf{M}(\omega_m) \mathbf{U}_m dx \quad (7)$$

donde:

$$\mathbf{U}_m = [W_m, V_m, \psi_m]^T, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \overline{\rho A_1} & \overline{\rho A_{12}} & -\overline{\rho A y_s} \\ \overline{\rho A_{12}} & \overline{\rho A_2} & \overline{\rho A z_s} \\ -\overline{\rho A y_s} & \overline{\rho A z_s} & \overline{\rho I_s} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$\mathbf{U}_m$  corresponde al vector de desplazamientos modales, mientras que  $\mathbf{M}$  se denomina aquí “matriz seccional inercial generalizada”. Puesto que esta última es una matriz cuadrada y simétrica puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{G}\mathbf{P}^T \quad (9)$$

siendo:

$$\mathbf{G} = [\gamma_i \delta_{ij}], \quad \mathbf{P} = [Z_{ij}] \quad (10)$$

donde  $\gamma_i$  ( $i=1,2,3$ ), son los autovalores de  $\mathbf{M}$  y  $Z_{ij}$  los elementos  $j$  ( $j=1,2,3$ ) de los correspondientes autovectores  $\mathbf{Z}_i$  ( $i=1,2,3$ ) y  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker. Es decir, tales autovalores y autovectores se obtienen resolviendo la siguiente ecuación:

$$(\mathbf{M}(\omega) - \gamma(\omega)\mathbf{I})\mathbf{Z}(\omega) = 0 \quad (11)$$

Reemplazando la expresión (9) en la de energía cinética (7) y considerando (10) se llega a la siguiente expresión:

$$L_{K_m} = \sum_{i=1}^3 \gamma_i (Z_{i1}W_m + Z_{i2}V_m + Z_{i3}\psi_m)^2 \quad (12)$$

Debe observarse que la expresión (12) es positiva si  $\gamma_i > 0$  ( $i=1,2,3$ ), que indica que  $\mathbf{M}$  es definida positiva. Si, en cambio, los autovalores son negativos ( $\gamma_i < 0$ ,  $i=1,2,3$ ), que corresponde a la matriz  $\mathbf{M}$  definida negativa, la energía cinética es negativa y, en consecuencia, no existe ninguna frecuencia  $\omega_m$  que verifique la ecuación (5). Luego, el rango de frecuencias para el cual  $\gamma_i < 0$  (inexistencia de frecuencias naturales de vibración) se denomina “bandgap fuerte (BGF)”. Por otra parte, si los autovalores tienen diferente signo ( $\mathbf{M}$  indefinida), pueden existir frecuencias naturales aunque con una probabilidad menor, ya que surgen restricciones adicionales para las formas modales correspondientes. Tales rangos se denominan “bandgaps débiles (BGD)”. Es posible demostrar, siguiendo un procedimiento similar al de [Ávila et al. \(2008\)](#) y al de [Rohan et al. \(2009\)](#), que  $\gamma_{\max}(\omega)$  y  $\gamma_{\min}(\omega)$  son funciones monótonas crecientes y que  $\gamma_{\min}(\omega) \rightarrow -\infty$  cuando  $\omega \rightarrow \omega_j^+$  y que  $\gamma_{\max}(\omega) \rightarrow +\infty$  cuando  $\omega \rightarrow \omega_j^-$ . Como corolario, existe siempre un bandgap inmediatamente a la derecha de cada frecuencia de resonador  $\omega_j$  (puede ser un BGD o un BGF seguido de un BGD). Por lo tanto, los bandgaps asociados a cada frecuencia de resonador  $\omega_j$  pueden ser expresados como:

$$BGF_j = \left\{ \omega: \omega > \omega_j \text{ y } \gamma_{\max}(\omega) < 0 \right\}$$

$$BGD_j = \left\{ \omega: \omega > \omega_j, \gamma_{\max}(\omega) > 0 \text{ y } \gamma_{\min}(\omega) < 0 \right\}$$
(13)

En consecuencia, para determinar los bandgaps posibles, correspondientes a cada frecuencia local de los resonadores  $j$ -ésimos, debe efectuarse un barrido de frecuencias  $\omega$ , resolviendo el problema de autovalores (11) y usando las definiciones (13).

#### 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se consideran las vibraciones flexo-torsionales  $(W, \psi)$  de la viga monosimétrica simplemente apoyada, acoplada a resonadores tipo voladizo (Figura 2). El sistema intercala dos tipos de resonadores ( $Nr=4$ ), 2 resonadores tipo I (oscuros) y 2 resonadores tipo II (claros).

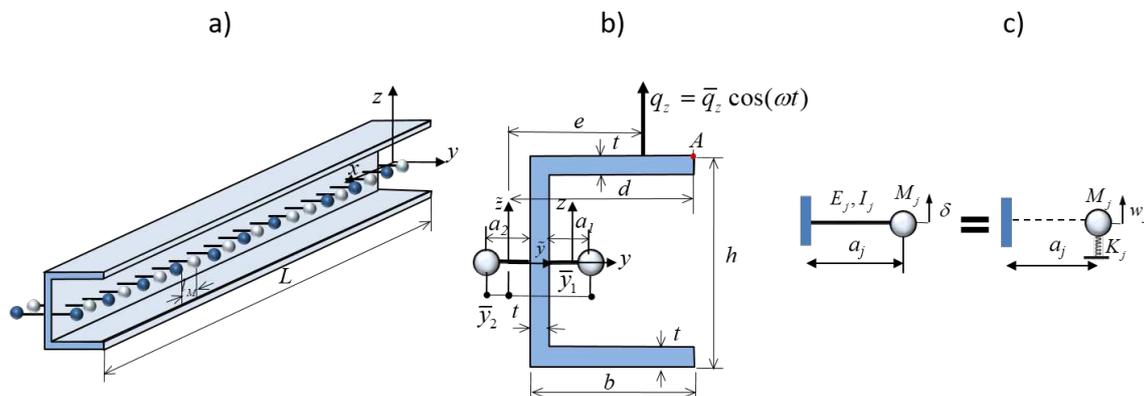


Figura 2: Viga localmente resonante analizada. a) viga con resonadores distribuidos longitudinalmente, b) sección transversal de la estructura considerada, c) resonador masa-resorte equivalente.

El uso práctico de las vigas localmente resonantes es la atenuación de las amplitudes de vibración en comparación con aquellas de la estructura base (sin resonadores) en cierto rango de frecuencias. Usualmente, el rango de frecuencias incluye a las frecuencias naturales de la estructura base. Las propiedades de esta estructura (sin resonadores) son las siguientes:  $L = 2\text{ m}$ ,  $E = 4.5E10\text{ Pa}$ ,  $G = 1.8E10\text{ Pa}$ ,  $\rho = 2650\text{ kg/m}^3$ ,  $h = 0.1\text{ m}$ ,  $b = 0.04\text{ m}$ ,  $t = 0.006\text{ m}$ ,  $y_s = -0.020816\text{ m}$ .

En los ejemplos que siguen, se pretende atenuar, simultáneamente, las respuestas forzadas en cercanías de dos frecuencias naturales del sistema original. En primer lugar se consideran las frecuencias naturales de la viga sin resonadores  $\omega_{n1} = 292.3\text{ rad/s}$  y  $\omega_{n2} = 494.3\text{ rad/s}$ . Para ello, los resonadores se seleccionan de la siguiente manera: dos resonadores tipo I con frecuencia local  $\omega_I = 286.5\text{ rad/s}$  ( $\omega_I = 0.98\omega_{n1}$ ), relaciones de masa  $(\alpha_1)_I = (\alpha_2)_I = 0.125$  y ubicados en  $(\bar{y}_1)_I = 0.03\text{ m}$  y  $(\bar{y}_2)_I = -0.03\text{ m}$ , y dos resonadores tipo II con frecuencia local  $\omega_{II} = 484.4\text{ rad/s}$  ( $\omega_{II} = 0.98\omega_{n2}$ ), relaciones de masa  $(\alpha_1)_{II} = (\alpha_2)_{II} = 0.125$  y ubicados en  $(\bar{y}_1)_{II} = 0.03\text{ m}$  y  $(\bar{y}_2)_{II} = -0.03\text{ m}$ .

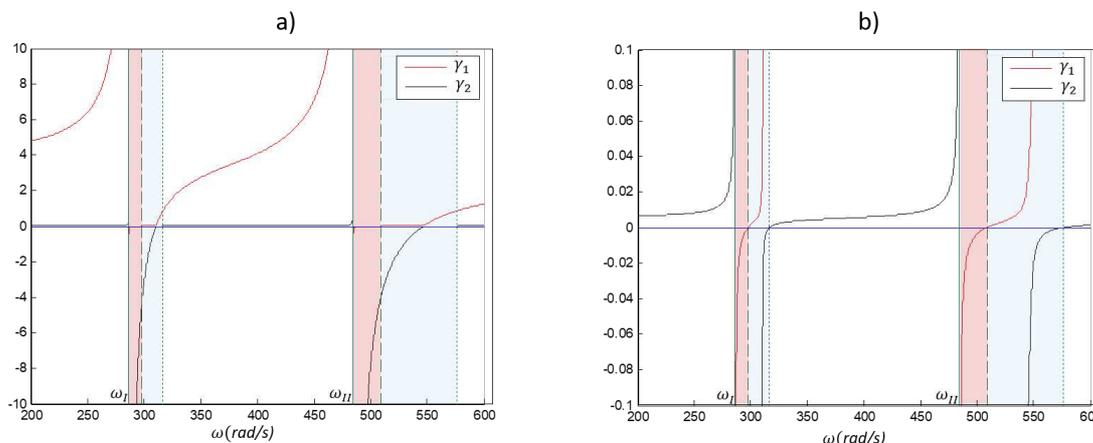


Figura 3: Autovalores  $\gamma_1(\omega)$  y  $\gamma_2(\omega)$  de la matriz seccional inercial  $\mathbf{M}$ .

Como se consideran solamente las vibraciones flexo-torsionales ( $W \neq 0, \psi \neq 0, V = 0$ ) los autovalores involucrados en la ecuación (11) son dos,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . Los valores de tales autovalores en función de la frecuencia  $\omega$  entre 200 y 600  $rad/s$  se muestran en la Figura 3. En la Figura 3b se muestra una versión ampliada de la Figura 3a para ver con mayor claridad los lugares donde  $\gamma_1(\omega)$  y  $\gamma_2(\omega)$  cruzan el eje de las abscisas ( $\omega$ ). Se puede ver claramente que inmediatamente a la derecha de  $\omega_I = 286.5 \text{ rad/s}$  ambos autovalores van creciendo desde  $-\infty$  hasta  $\omega_{BGF_I} = 298.5 \text{ rad/s}$  donde se anula  $\gamma_1$ . Por lo tanto el rango de frecuencias (286.5  $rad/s$ , 298.5  $rad/s$ ), en el cual ambos autovalores son negativos, constituye un BGF. Asimismo, en el rango (298.5  $rad/s$ , 316.9  $rad/s$ ),  $\gamma_1$  es positivo y  $\gamma_2$  es negativo constituyendo un BGD. Un comportamiento similar puede apreciarse a la derecha de la frecuencia local del resonador tipo II,  $\omega_{II} = 484.4 \text{ rad/s}$ , aunque en este caso los anchos de bandgaps son mayores.

Resulta de interés verificar la atenuación predicha mediante el concepto de bandgap a partir de un análisis de vibración forzada. Para ello se considera la estructura previamente descrita, con los tipos de resonadores indicados, sometida a una carga distribuida armónica de amplitud  $\bar{q}_z = 1000 \text{ N/m}$  aplicada en el centro de corte. Las vibraciones forzadas se describen a partir de una solución analítica (series de Fourier) del sistema de ecuaciones (3) (Dominguez y Cortínez, 2019). En la Figura 4 se muestra la respuesta en frecuencia para los desplazamientos (en escala logarítmica) correspondientes al centro de corte de la sección media de la viga  $W(L/2)$  (Figura 4a) y también para los desplazamientos del punto A mostrado en la Figura 2:  $\psi(L/2) d$  ( $d=0.05 \text{ m}$ ). Este último punto se utiliza para ilustrar la respuesta torsional.

Como puede apreciarse, las respuestas resonantes correspondientes a la estructura base son atenuadas sustancialmente en los BGF previamente obtenidos. Asimismo, en inmediaciones de la frecuencia más baja, se logra una atenuación razonable en la banda débil, no así en cercanías de la frecuencia más alta.

Debe notarse que la definición de bandgaps es independiente de la carga y de las frecuencias naturales de la estructura base. Para ilustrar este concepto, en la Figura 5a se muestra la respuesta en frecuencia  $W(L/2)$  para la misma estructura, sujeta a una carga puntual armónica de amplitud 3000  $N$  aplicada en el punto A señalado en la Figura 2 correspondiente a

la sección  $x=L/4$  ( $\bar{q}_z = 3000 \delta(x-L/4)$ ),  $\bar{m}_x = 3000 \delta(x-L/4) e$ , con  $e=d=0.05$ ). Como se puede apreciar, de igual manera que en el caso anterior, las respuestas del sistema base son adecuadamente atenuadas en los BGF previamente obtenidos.

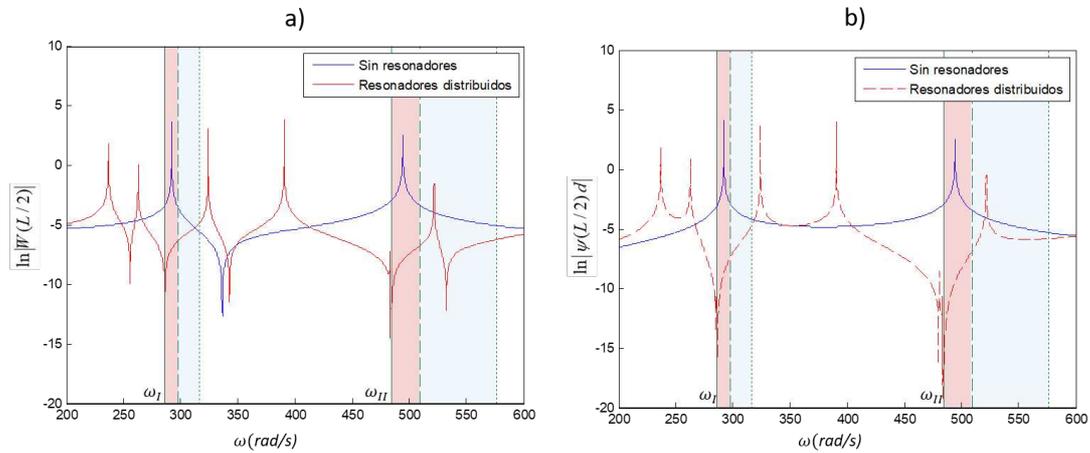


Figura 4: Respuesta dinámica de la viga localmente resonante ( $\omega_I = 286.5 \text{ rad/s}$  y  $\omega_{II} = 484.4 \text{ rad/s}$ ) y de la estructura huésped correspondiente a una carga distribuida  $\bar{q}_z = 1000 \text{ N/m}$ : a)  $\ln|W_s(L/2)|$ ; b)  $\ln|\psi(L/2)d|$ .

Asimismo, en la Figura 5b se muestra la respuesta en frecuencia  $W(L/2)$  de la misma estructura, sometida a una carga armónica de amplitud  $\bar{q}_z = 1000 \text{ N/m}$  aplicada en el centro de corte, con la frecuencia de excitación variando entre  $2800 \text{ rad/s}$  y  $4800 \text{ rad/s}$ , rango que contiene a dos frecuencias naturales de la viga base,  $3062.8 \text{ rad/s}$  y  $3942.3 \text{ rad/s}$ . En este caso, para atenuar las correspondientes respuestas resonantes, las frecuencias locales de los resonadores tipos I y II se adoptan como  $3032 \text{ rad/s}$  y  $3824 \text{ rad/s}$ , ligeramente inferiores a tales frecuencias naturales. Se observa la adecuada atenuación de respuesta en los BGF calculados.

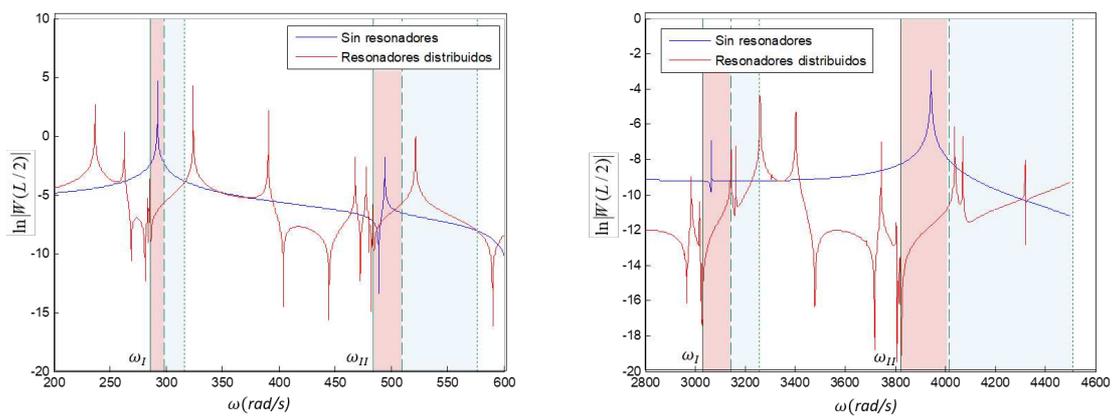


Figura 5: Respuesta dinámica  $\ln|W_s(L/2)|$  de la viga localmente resonante: a) carga puntual de  $3000 \text{ N}$  aplicada en el punto A de la sección  $x=L/4$  ( $\omega_I = 286.5 \text{ rad/s}$  y  $\omega_{II} = 484.4 \text{ rad/s}$ ); b)  $\bar{q}_z = 1000 \text{ N/m}$  aplicada en el centro de corte ( $\omega_I = 3032 \text{ rad/s}$  y  $\omega_{II} = 3824 \text{ rad/s}$ )

## 5 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un enfoque general para la estimación de la localización de múltiples bandgaps (fuertes y débiles) en la vibración flexo-torsional de vigas Vlasov localmente resonantes sometidas a cargas armónicas. Este enfoque constituye la primera metodología que permite obtener tales brechas de banda en la dinámica flexo-torsional de vigas. Se trata de un enfoque más simple y general que otros propuestos en la literatura. Tal desarrollo se ha basado en una formulación homogeneizada de la teoría de Vlasov y en el análisis de la definición positiva o negativa de la matriz seccional inercial generalizada, adaptando ideas previas utilizadas en la dinámica de materiales continuos localmente resonantes (Ávila et al., 2008 y Rohan et al., 2009).

## REFERENCIAS

- Ávila, A., Griso, G., Miara, B. y Rohan, E. Multi-scale modelling of elastic waves. Theoretical justification and numerical simulation of band gaps, *SIAM Multi-scale modelling and simulation* 7, 1-21, 2008.
- Casalotti, A., El-Borgi, S. y Lacarbonara, W. Metamaterial beam with embedded nonlinear vibration absorbers. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 98, 32-42, 2018.
- Cveticanin, L. y Mester, G. Theory of Acoustic Metamaterials and Metamaterial beams: an overview, *Acta Polytechnica Hungarica* 13 (7), 2016.
- Dominguez, P.N. y Cortínez, V. H. Bandas de atenuación de vibraciones flexo-torsionales en vigas localmente resonantes, *Mecánica Computacional* 37, 715-724, 2019.
- El-Borgi, S., Fernandes, R., Rajendran, P., Yazbecka, R., Boydb, J.G. y Lagoudas, D.C. Multiple bandgap formation in a locally resonant linear metamaterial beam: Theory and experiments. *Journal of Sound and Vibration* 488 115647, 2020.
- Fang Jian-Yu, Yu Dian-Long, Han Xiao-Yun y Cai Li. Coupled flexural-torsional vibration band gap in periodic beam including warping effect, *Chinese Physics B*, 18 (4), 1674-1056/2009/18(04)/1316-06, 2009.
- Fonseca Dal Poggetto, V., Serpa, A. y Arruda, J.R.F. Optimization of local resonators for the reduction of lateral vibrations of a skyscraper. *Journal of Sound and Vibration* 446, 57-72. 2019.
- Liu, Z. Y., Zhang, X. X., Mao, Y. W., Zhu, Y. Y., Yang, Z. Y., Chan, C. T. y Sheng, P., Locally resonant sonic materials. *Science*, 289(5485), 1734–1736, 2000.
- Rohan, E., Miara, B., Seifrt, F. Numerical simulation of acoustic band gaps in homogenized elastic composites, *International Journal of Engineering Science* 47(4):573-594, 2009.
- Sugino, C., Xia, Y., Leadham, S., Ruzzene, M. y Erturk, A., A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures, *Journal of Sound and Vibration* 406, 104-123, 2017.
- Sun, H., Du, X. y Frank Pai, P. Theory of Metamaterial beams for Broadband Vibration Absorption, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 21, 1086-1101, 2010.
- Vlasov, V.Z. Thin-walled elastic beams, *Israel program for scientific translations*, 2<sup>nd</sup> Revised edition, 1961.
- Wang, K., Zhou, J., Xu, D. y Ouyang, H. Tunable low-frequency torsional-wave band gaps in a meta-shaft. *Journal of Physics D: Applied Physics* 52(5), 055104, 2018.
- Xiao, Y., Wen, J. y Wen, X. Broadband locally resonant beams containing multiple periodic arrays of attached resonators. *Physics Letters A*, 376(16), 1384–90, 2012.