

SÍNTESIS DE LA RESPUESTA DEL MODELO DE ESTRUCTURA SANA PARA LA IDENTIFICACIÓN DE DAÑO

SYNTHESIS OF THE HEALTHY STRUCTURE MODEL RESPONSE FOR DAMAGE IDENTIFICATION

Hernán Garrido, Martín Domizio, Oscar Curadelli y Daniel Ambrosini

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo - carloshernangarrido@gmail.com

CONICET

Palabras clave: daño, viga, curvatura, virgen, sana, monitoreo de la salud estructural.

Resumen. El monitoreo de la salud estructural se enfrenta a varios desafíos. Entre ellos, especialmente para la cuantificación del daño, se encuentran: (1) la incertidumbre en las condiciones de borde, (2) la necesidad de un modelo numérico calibrado, o de mediciones, de la estructura en su estado sano, (3) la variabilidad en las propiedades de la estructura y las condiciones de borde debido a las condiciones ambientales y operativas, y (4) la posibilidad de daños en la estructura virgen debido a defectos constructivos. Basándose en la condición de daño estructural ralo, este trabajo presenta un método que aborda estos retos simultáneamente. El método consiste en sintetizar la respuesta de un modelo de estructura sana, válida en las condiciones ambientales y operativas actuales, sólo dentro de una región de interés (RDI) que excluye los bordes y el resto de la macro-estructura. Esto se logra mediante una regresión robusta de la solución de un modelo analítico de la estructura sana, y su carga, sólo utilizando datos de ensayos de la estructura (posiblemente) dañada en esa RDI. En condiciones ideales, el método demostró ser exacto a la hora de detectar, localizar y cuantificar el daño; en algunos casos, mucho mejor que utilizando las mediciones de la estructura virgen.

Keywords: damage, beam, curvature, virgin, healthy, structural health monitoring.

Abstract. Structural Health Monitoring faces several challenges. Among them, especially for the quantification of damage, are: (1) the uncertainty in the boundary conditions, (2) the need for a calibrated numerical model, or measurements, of the structure in its healthy state, (3) the variability in the structure properties and boundary conditions due to environmental and operational conditions, and (4) the possibility of damage in the virgin structure due to construction defects. Based on the sparsity condition of structural damage, this work presents a method that tackles these challenges simultaneously. The method consists in synthesising the response of a healthy structure model, which is valid in the current environmental and operational conditions, only inside a region of interest (ROI) that excludes the boundaries and the rest of the full structure. This is accomplished by means of a robust regression of the solution of an analytical model of the healthy structure, and its loading, only using testing data of the (possibly) damaged structure in that ROI. Under ideal conditions, the method showed to be exact in detecting, locating and quantifying damage; in some cases much better than using measurements of the virgin structure.

1. INTRODUCCIÓN

Las estructuras pueden acumular daño a lo largo de su ciclo de vida. Estos pueden ser un problema grave, especialmente cuando se produce un colapso parcial o total inesperado. Por su evidente importancia, un enorme número de artículos y libros han abordado métodos bajo el término general de Monitoreo de la Salud Estructural (Figueiredo y Brownjohn, 2022). Estos métodos pueden producir información de distinto tipo. A este respecto, Rytter (1993) distingue cuatro niveles por la identificación de daño: (1) Detección, (2) Localización, (3) Cuantificación, y (4) Pronóstico (toma de decisiones).

Normalmente, los niveles 1 y 2 pueden alcanzarse utilizando enfoques heurísticos y/o metaheurísticos, como la detección de anomalía (de Almeida Cardoso et al., 2019; Alves et al., 2015). Estos métodos son muy atractivos para estructuras complejas ya que no se basan en modelos matemáticos detallados, sino en suposiciones sencillas, e.g. “la aparición de daño no está correlacionada con el cambio de las condiciones ambientales, operativas o de borde”. Así, la variabilidad debida a esas condiciones puede filtrarse estadísticamente.

Para alcanzar los niveles 3 y 4, dos modelos matemáticos suelen ser necesarios: el de la estructura posiblemente¹ *dañada* y el de la estructura *sana*. Esto se debe a que el daño se define comúnmente como una reducción local de la rigidez, por lo que deben compararse las rigideces actuales y de referencia. Clásicamente, hay cierto consenso en que la práctica ideal es calibrar el modelo de estructura sana con mediciones de la estructura virgen. El requisito de estas mediciones es realmente problemático por varias razones, algunas de las cuales raramente se mencionan en la literatura. Empezando por lo más obvio, la estructura puede haber pasado gran parte de su ciclo de vida sin que se hayan realizado mediciones en ella. También es posible que se disponga de mediciones en estado virgen; sin embargo, las condiciones de borde, ambientales y/o operativas, e incluso la tecnología de medición, pueden haber cambiado.

El concepto importante aquí es que *virgen* y *sana* no son términos equivalentes en general. *Virgen* es el estado en el que se *encontraba* la estructura justo después de su construcción, mientras que *sano* es el estado en el que *debería estar* la estructura.

Para superar los problemas relacionados con las mediciones del estado virgen, en este trabajo se propone no utilizarlas en absoluto. En su lugar, se define el Modelo de Estructura Sana (MES) como “el que presumiblemente se utilizó para diseñar la estructura” (en lugar de “el que representa la estructura luego de construida”). Es decir, el MES es un modelo de una estructura ficticia; el cual, además, sólo necesita definirse en una región de interés (RDI). Así se excluye del problema una posible macro-estructura y sus bordes.

Por otro lado, la Respuesta del Modelo de Estructura Sana (RMES) se define en este trabajo como “la solución de la ecuación diferencial del MES con la *carga actual* y con *unas nuevas condiciones de borde tales que los esfuerzos internos resultantes sean los mismos que los de la estructura actual*” (en lugar de *con las condiciones de borde de la estructura justo después de la construcción*). Más importante aún, para sintetizar la RMES no es necesario conocer esas nuevas condiciones de borde, basta con sus correspondientes constantes de integración.

Estas dos definiciones son muy convenientes por tres razones: (1) se pueden detectar defectos constructivos; (2) el problema inverso de encontrar la RMES puede quedar bien planteado utilizando muy poca información; (3) se puede identificar daño en elementos estructurales simples de estructuras complejas usando un modelos simples.

En lugar de medir la estructura sana, lo cual es imposible porque se trata de una estructura ficticia, se propone sintetizar la RMES. Las herramientas disponibles para realizar dicha síntesis

¹En adelante se omite la aclaración *posiblemente*

son: (1) las mediciones de la estructura dañada, (2) el MES, y (3) una representación para la carga actual. La RMES depende de *parámetros internos* (desconocidos) del MES, como la rigidez global. Por otro lado, la RMES depende además de *parámetros externos* (también desconocidos), como las constantes de integración asociadas a las condiciones de borde que el resto de la estructura impone a la RDI y la distribución de la carga.

Si se supone que el daño es ralo, todos esos parámetros pueden estimarse mediante una regresión robusta sobre la respuesta, utilizando las mediciones de la estructura *dañada* como puntos de datos. Esta es la idea clave del método aquí propuesto. Los detalles de esta síntesis y la forma en que se utiliza para identificar el daño se dan en la siguiente sección.

2. MÉTODO

2.1. Generalidades

Considere un segmento, o Región De Interés (RDI), de una viga de Euler-Bernoulli (posiblemente) dañada. Su campo de desplazamiento transversal $u(x, t)$ se rige por la siguiente ecuación diferencial:

$$(EI(x)u''(x, t))'' = q(x, t), x \in D_{\text{RDI}} \subset \mathbb{R} \quad (1)$$

donde: x es el eje de la viga; t es el tiempo; la marca de prima y el punto denotan $\frac{\partial}{\partial x}$ and $\frac{\partial}{\partial t}$, respectivamente; E es el módulo de Young del material; $I(x)$ es el segundo momento del área de la sección transversal de la viga; $m(x)$ es la densidad de masa lineal; y $q(x, t)$ es una carga distribuida arbitraria, que puede ser estática, dinámica o inercial (pseudo-fuerzas). Por ejemplo, en vibraciones libres:

$$q(x, t) = -m(x)\ddot{u}(x, t) \quad (2)$$

La Ec. (1) sigue siendo válida si el segmento de la viga pertenece a una macro-estructura más compleja, con condiciones de borde arbitrarias, y posiblemente bajo vibraciones forzadas. El efecto de la macro-estructura que rodea a la RDI puede modelarse como condiciones de borde variables en el tiempo para la Ec. (1).

El Modelo de Estructura Sana (MES) se construye simplemente reemplazando a $EI(x)$ por $EI_h(x)$ y a $u(x, t)$ por $u_h(x, t)$, con lo cual se obtiene:

$$(EI_h(x)u_h''(x, t))'' = q(x, t), x \in D_{\text{RDI}} \quad (3)$$

donde $EI_h(x)$ es la rigidez flexional de la versión sana de la viga en la RDI, y $u_h''(x, t)$ es la curvatura que presentaría la viga en su versión sana si estuviera *sometida al mismo momento flector* que produjo $u''(x, t)$ en la viga dañada. Note que la carga es la misma en ambos modelos.

El objetivo final de la identificación de daño en vigas, tal y como se plantea tradicionalmente, es identificar la rigidez flexional $EI(x)$; o, con utilidad equivalente, identificar la reducción de la rigidez flexional respecto a la de una versión sana de la viga en la RDI, es decir:

$$H_{EI}(x) = \frac{EI(x)}{EI_h(x)} \quad (4)$$

donde $H_{EI}(x)$ es un índice de salud que va de 0 (reducción total de la rigidez) a 1 (estado sano).

Partiendo de la suposición de igual momento flector, puede demostrarse que:

$$H_{EI}(x) = \frac{u_h''(x, t)}{u''(x, t)} \quad (5)$$

donde $u_h''(x, t)$ es la Respuesta del Modelo de Estructura Sana en términos de curvatura (RMES) y $u''(x, t)$ es el campo de curvatura de la viga dañada. Los detalles de la demostración pueden encontrarse en (Garrido et al., 2022). Un aspecto interesante es que las condiciones de borde de la RDI sana no tienen por qué ser las mismas que las de la RDI dañada. Además, las condiciones de borde de desplazamiento y giro son irrelevantes para la identificación de rigidez.

También se demostró que, si el daño es ralo, $u_h''(x, t)$ puede sintetizarse simplemente a partir de: (i) la curvatura de la viga dañada $u''(x, t)$, y (ii) la forma (a menos de un factor constante) de la carga distribuida que produce dicha curvatura $\alpha q(x, t)$.

Una RDI se define como *con daño ralo* si:

$$EI(x) = EI_h(x), \forall x \in D_h \subset D_{\text{RDI}}, \quad (6)$$

tal que $\mu(D_h) > \frac{1}{2}\mu(D_{\text{RDI}})$; donde $\mu(D)$ es la medida del conjunto D , y D_h es el subconjunto de D_{RDI} donde la viga está sana. El coeficiente 0.5 es solamente un umbral que indica *la mayoría*. En la práctica, es preferible que $\mu(D_h) \gg \frac{1}{2}\mu(D_{\text{RDI}})$.

De la combinación de las Ecs. (4, 5, 6), se obtiene el siguiente corolario:

$$u_h''(x, t) = u''(x, t), \forall x \in D_h \subset D_{\text{RDI}}. \quad (7)$$

En palabras simples: Si la viga dañada y la sana están sometidas al mismo momento flector en toda la RDI, y la rigidez flexional de ambas vigas es la misma en la mayoría de la RDI, entonces la curvatura de ambas vigas será la misma en la mayoría de la RDI.

2.2. Síntesis de la respuesta del modelo de estructura sana

Integrando dos veces la Ec. (3), se obtiene que:

$$u_h''(x, t) = \frac{p_1^*}{EI_h(x)} \int_0^x \int_0^\chi \alpha q(\psi, t) d\psi d\chi + p_2^* x + p_3^*, x \in D_{\text{RDI}}, \quad (8)$$

donde p_1^* , p_2^* , y p_3^* son parámetros a ajustar. Note que p_1^* representa la relación entre la magnitud de la carga y la rigidez flexional global de la viga sana en la RDI. Por otra parte, p_2^* , y p_3^* son parámetros externos que representan las condiciones de borde de Neumann de la RDI.

Si el daño es ralo en la RDI, el vector de parámetros $\mathbf{p}^* = [p_1^* \ p_2^* \ p_3^*]^\top$ puede estimarse resolviendo el siguiente problema de optimización ²:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^* &= \arg \min_{\mathbf{p}} \sum_{n=1}^N |u''(x_n, t) - [q^{(-2)}(x_n, t) \ x_n \ 1] \mathbf{p}| \\ q^{(-2)}(x_n) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (q^{(-1)}(x_k) + q^{(-1)}(x_{k+1})) \Delta x \\ q^{(-1)}(x_k, t) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} (q(x_j, t) + q(x_{j+1}, t)) \Delta x \end{aligned} \quad (9)$$

donde la función objetivo a minimizar es la norma 1 del error entre las curvaturas de la viga dañada y de la viga sana en la RDI; y la doble integral de la Eq. (8) se ha resuelto numéricamente por el método de los trapecios.

El hecho de utilizar la norma 1 del error es particularmente importante porque hace que el ajuste sea robusto ante datos anómalos, los cuales corresponden a los puntos donde la viga está dañada. Fuera de esos puntos, el error entre ambas curvaturas debería ser 0 debido a la Ec. (7).

²El código en Python está disponible si se solicita al primer autor.

2.3. Aplicación al análisis modal experimental

El método hasta aquí descripto puede aplicarse a vigas con cualquier tipo de carga. En el caso particular, y de amplia difusión, de contar con las formas modales de la viga dañada, puede hacerse la siguiente adaptación.

Sea $\phi(x)$ una forma modal, en términos de desplazamiento, con frecuencia natural ω de una viga dañada. La Eq. (2) en el dominio de la frecuencia se reduce a:

$$q(x, t) = m(x)\omega^2\phi(x), \quad (10)$$

y la curvatura de la viga dañada a:

$$u(x, t)'' = \phi''(x). \quad (11)$$

Note que ya que no es necesario conocer la amplitud de la carga, si no sólo su forma, la frecuencia natural de la viga dañada resulta irrelevante. Es decir:

$$\alpha q(x, t) = m(x)\phi(x). \quad (12)$$

La interpretación de estas últimas tres ecuaciones es que una forma modal contiene implícitamente una descripción de la carga y de la respuesta de una viga con carga estática equivalente (pseudo fuerzas de origen inercial).

2.4. Identificación del daño

Una vez sintetizada la RMES, el índice $H_{EI}(x)$ puede calcularse con la Ec. (5). Con este indicador se pueden alcanzar los tres primeros niveles de Rytter simultáneamente:

1. Si $\exists x : H_{EI}(x) < 1$, se *detecta* daño.
2. Si $H_{EI}(x) < 1$, se *localiza* daño en x .
3. $H_{EI}(x)$ *cuantifica* el daño en x .

3. EJEMPLO NUMÉRICO

Para ilustrar el método propuesto, la Fig. 1(a) muestra una viga virgen escalonada y doblemente empotrada, cuya carga tiene una distribución que sigue la forma modal del 2º modo de vibración ponderada con su distribución de masas. Los modos de vibración se calcularon numéricamente utilizando la formulación de elementos finitos del tipo Euler-Bernoulli y una matriz de masas concentradas (A J M Ferreira, 2008). Los desplazamientos estáticos resultantes no se muestran: pero son proporcionales a los de la forma modal (por definición de modo de vibración).

Cuando la estructura se daña, la rigidez de algunos elementos disminuye, como se muestra en la Fig. 1(b). En este caso, la forma modal cambia, al igual que la carga estática-equivalente. Esto ocurre sutilmente en toda la RDI, pero mayormente en la zona dañada.

Además, el momento flector disminuye en valor absoluto y se sesga (curvas azul y roja en la Fig. 1(d)) debido a tres razones: las estructuras virgen y dañada son estáticamente indeterminadas, la carga cambia, y el daño es asimétrico. Como la carga no es uniforme, el momento flector *no es* una función cuadrática, sino que es tanto en la viga dañada como en la sana, el resultado de integrar dos veces la forma modal ponderada de la estructura dañada con constantes

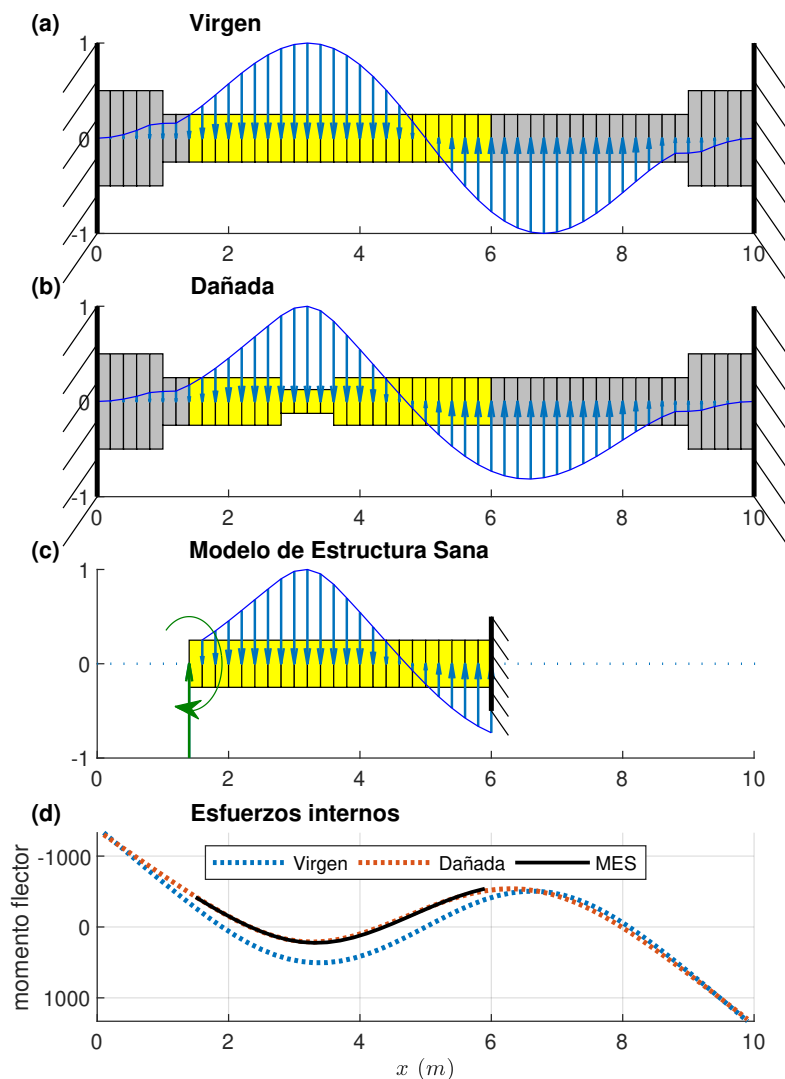


Figura 1: Ejemplo ilustrativo de una estructura dañada con carga inercial producida durante las vibraciones libres que tiene el mismo momento flector que un modelo de estructura sana (MES) en la RDI (resaltado en amarillo).

de integración apropiadas. Estas constantes de integración pueden interpretarse como nuevas condiciones de borde aplicadas al MES, como muestra la Fig. 1(c).

Si las condiciones de borde de Newmann (flechas verdes en la Fig. 1(c)) son iguales a las constantes de integración, y la carga es igual a la de la viga dañada, el momento flector en el MES (curva negra en la Fig. 1(d)) es igual al de la dañada (curva roja en la Fig. 1(d)) en la RDI. Vale notar que el MES que tiene el mismo momento flector que la viga dañada no es único en general. Por ejemplo, podrían haberse elegido otras condiciones de borde cinemáticas. Pero esto es irrelevante para el problema de la identificación de rigidez flexional.

Las curvaturas de las vigas virgen y dañada se calcularon mediante un análisis de elementos finitos, utilizando 50 elementos tipo Euler-Bernoulli (A J M Ferreira, 2008), y se muestran como curvas azules y rojas en la Fig. 2(a). Cuando se aplica la Ec. (9) a las curvaturas de la viga dañada, la Ec. (8) produce la curva negra de la Fig. 2(a). Es evidente que esta RMES sintetizada

es, en las zonas sanas, *exactamente igual* a la curvatura de la viga dañada (curva roja de la Fig. 2(a))³. Por su parte, la curvatura de la viga virgen (curva azul en la Fig. 2(a)) es *sólo similar* a la curvatura de la viga dañada (curva roja en la Fig. 2(a)) en las zonas sanas.

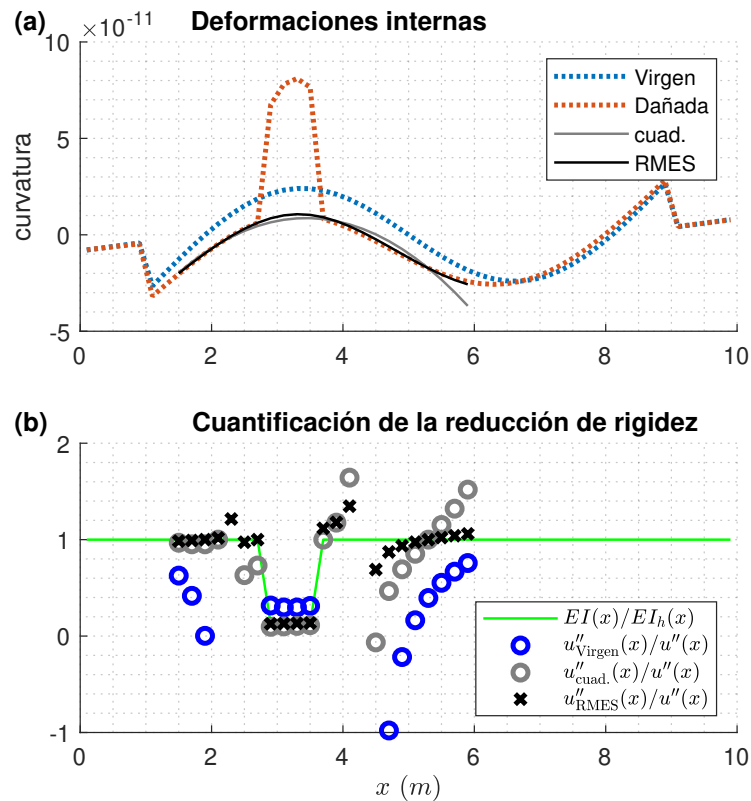


Figura 2: Curvaturas de las vigas virgen, dañada y sana de la Fig. 1, y sus cocientes comparados con la reducción de rigidez real.

Como referencia comparativa, se realizó también un ajuste robusto con una función cuadrática (curva gris en la Fig. 2(a)). En este caso de carga no uniforme, la función cuadrática logró un ajuste evidentemente más pobre que el del método propuesto en este trabajo (curva negra en la Fig. 2(a)). Esto se debe principalmente a que la RDI abarca un punto de inflexión en la curvatura que la función cuadrática es incapaz de capturar. Sin embargo, en las zonas sanas, la curvatura de la viga dañada (curva roja en la Fig. 2(a)) es más parecida a la función cuadrática (curva gris) que a la curvatura de la viga virgen (curva azul en la Fig. 2(a)). De esto se deduce que una función cuadrática puede llegar a representar a la respuesta de la estructura sana mejor que lo que lo haría la respuesta de la estructura virgen.

La diferencia entre las curvaturas de las vigas virgen y dañada en las zonas sanas se vuelve muy problemática cuando se utiliza un cociente entre ellas para estimar el daño. Esto es evidente cuando se compara la curva verde con los círculos azules en la Fig. 2 (b). Al hacer esto, se puede ver que el cociente de curvaturas es similar a la reducción de la rigidez en la zona dañada. Sin embargo, el error en las zonas sanas es enorme (varios puntos están fuera de escala).

En este caso en el que la forma modal contiene puntos de inflexión en la RDI, las curvaturas cruzan el cero ($x = 2,25$ m, $x = 4,5$ m), lo que amplifica aún más las pequeñas diferencias

³despreciando los errores numéricos de la malla de elementos finitos y del método de integración trapezoidal

entre las curvaturas cuando se calculan los cocientes en las zonas sanas. Esto se debe simplemente a que la propagación de error en los cocientes es inversamente proporcional a los valores absolutos del numerador y del denominador (John Taylor, 1997). Por lo tanto, cerca de esos cruces por cero, los tres métodos aquí comparados presentan un error significativo. Como en el trabajo de El-Gebeily y Khulief (2016) “no hay riesgo de confundir estos picos con daños porque siempre podemos comprobar si la curvatura es cero, o menor que una tolerancia especificada en cualquiera de esos picos”. El-Gebeily y Khulief (2016), consideraron que la curvatura estimada numéricamente debe suponerse cero si es inferior a 10^{-7} en valor absoluto, lo cual es apropiado para las simulaciones numéricas. En una aplicación práctica, esa tolerancia debería establecerse en función de la precisión, del ruido, del espaciado de los sensores y del método de diferenciación numérica usado para estimar las curvaturas.

En cualquier caso, el uso de la RMES sintetizada tiene claramente el mejor desempeño (cruces negras en la Fig. 2(b)), e incluso el ajuste cuadrático robusto (círculos grises en la Fig. 2(b)) tiene mejor rendimiento que el uso de las curvaturas de la viga virgen (círculos azules en la Fig. 2(b)). Esto último hace que se cuestione la importancia de recoger mediciones en estado virgen; especialmente en estructuras estáticamente indeterminadas, donde un daño local induce cambios globales en los esfuerzos internos. Nótese también que, si la estructura virgen hubiera tenido defectos de fabricación, la diferencia en el desempeño de los métodos habría sido aún mayor.

4. CONCLUSIONES

Tradicionalmente, con el fin de identificar daño en vigas, se lo modela como una reducción de la rigidez flexional. Dado que la rigidez flexional está relacionada con la curvatura, se suele usar la curvatura modal como indicador de daño. Para construir un indicador más específico a partir de ella, es razonable utilizar el cociente entre las curvaturas modales de la viga posiblemente dañada y de la viga sana.

Hay cierto consenso en que lo ideal sería contar con la curvatura modal de la viga virgen (justo después de construida) y usarla como curvatura de la viga sana.

En este trabajo se ha demostrado que la curvatura de la viga virgen no es la mejor opción. Se obtienen mejores resultados en la identificación de daño utilizando una respuesta sintetizada de un modelo de estructura sana. Este modelo es el de una viga ficticia que tiene las características geométricas y de material con las que fue diseñada la viga real, una carga igual a la de la viga (posiblemente) dañada, y unas condiciones de borde tales que el momento flector sea exactamente igual al de la viga dañada. Bajo estas condiciones, el cociente entre las curvaturas de la viga sana y dañada es un indicador exacto del cociente entre las rigideces flexionales de las vigas dañada y sana.

Bajo la suposición de daño ralo, este trabajo presenta un método simple para sintetizar la respuesta del modelo de estructura sana en términos de curvatura. La única información utilizada para realizar esta síntesis es la curvatura (medida) y la distribución de la carga (medida o asumida) presentes en la viga dañada.

La formulación presentada no está restringida a modos de vibración, si no que también puede usarse con carga estática: como por ejemplo el peso propio. Actualmente, los autores están estudiando el desempeño del método en mediciones instantáneas de vigas en vibración libre, usando fotogrametría.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo económico de CONICET y de la Universidad Nacional de Cuyo.

REFERENCIAS

- A J M Ferreira. Matlab Codes for FEA. *Springer*, 157, 2008.
- Alves V., Cury A., Roitman N., Magluta C., y Cremona C. Novelty detection for SHM using raw acceleration measurements. *Structural Control and Health Monitoring*, 22(9):1193–1207, 2015. ISSN 15452255. doi:10.1002/stc.1741.
- de Almeida Cardoso R., Cury A., Barbosa F., y Gentile C. Unsupervised real-time SHM technique based on novelty indexes. *Structural Control and Health Monitoring*, 26(7):1–18, 2019. ISSN 15452263. doi:10.1002/stc.2364.
- El-Gebeily M. y Khulief Y.A. Identification of wall-thinning and cracks in pipes utilizing vibration modes and wavelets. *Applied Mathematical Modelling*, 40(9-10):5335–5348, 2016. ISSN 0307904X. doi:10.1016/j.apm.2015.12.031.
- Figueiredo E. y Brownjohn J. Three decades of statistical pattern recognition paradigm for SHM of bridges. *Structural Health Monitoring*, 0(0):147592172210752, 2022. ISSN 1475-9217. doi:10.1177/14759217221075241.
- Garrido H., Domizio M., Curadelli O., y Ambrosini D. Synthesis of healthy-structure model responses for damage quantification. *Structural Health Monitoring*, página 147592172210884, 2022. ISSN 1475-9217. doi:10.1177/14759217221088493.
- John Taylor. *An introduction to Error Analysis*. University Science Books, Sausalito, California, 2 edición, 1997. ISBN 0-935702-42-3.
- Rytter A. *Vibrational Based Inspection of Civil Engineering Structures*. Phd thesis, Aalborg Universitet, 1993.