

## ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE LA REDUCCIÓN DE ORDEN EN LA DETERMINACIÓN DEL PANDEO DINÁMICO DE UNA ESTRUCTURA DE VIGAS

### ANALYSIS OF ORDER REDUCTION INFLUENCE ON THE DETERMINATION OF DYNAMIC BUCKLING IN BEAM STRUCTURES

Martín E. Pérez Segura<sup>a,b</sup>, Emmanuel Beltramo<sup>a,b</sup>, Bruno A. Rocca<sup>b,c</sup> y Sergio  
Preidikman<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*IDIT - CONICET, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba,  
Argentina, idit@fcefyn.edu.ar, <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu>*

<sup>b</sup>*Dpto. de Estructuras, FCEfyN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000  
Córdoba, Argentina, depestructuras@fcefyn.unc.edu.ar, <http://www.efn.uncor.edu.ar>*

<sup>c</sup>*Bergen Offshore Wind Centre (BOW), Geophysical Institute, University of Bergen, Norway,  
post@uib.no <http://www.uib.no>*

**Palabras clave:** Método de reducción de orden, pandeo dinámico, no linealidades de Von Kármán, viga de Timoshenko.

**Resumen.** El presente trabajo expone un estudio que tiene como objetivo evaluar la influencia de la reducción de orden, basada en la expansión modal actualizada, en la determinación de inestabilidades dinámicas en un sistema estructural no lineal. Para ello, se comparan respuestas estructurales calculadas con distintos números de coordenadas modales y se investiga la aparición de pandeo dinámico, es decir, la presencia de autovalores nulos en la matriz de rigidez del sistema. El análisis emplea una formulación de elementos de viga basada en la teoría de Timoshenko que incluye consistentemente las no linealidades de Von Kármán. Los resultados obtenidos constituyen una evaluación preliminar que permite cuantificar el nivel de pérdida de información asociado a la utilización del método de reducción de orden para estudiar inestabilidades dinámicas en sistemas estructurales.

**Keywords:** Order reduction method, dynamic buckling, Von Kármán's non-linearities, Timoshenko's beam.

**Abstract.** The aim of this study is to evaluate the influence of an order reduction method on the prediction of dynamic instabilities in non-linear structural systems. The method is based on an updated modal expansion and the dynamic buckling, which occurs when an eigenvalue of the system stiffness matrix vanishes, is investigated. Structural responses obtained using different number of modal coordinates are compared implementing a beam finite element formulation based on Timoshenko's theory that includes consistently Von Kármán's geometric non-linearities. The findings of this study represent a preliminary evaluation of the information loss related to the order reduction when addressing dynamic instabilities prediction in structures.

## 1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, las simulaciones computacionales de sistemas estructurales han proliferado debido al incremento en la potencia de las herramientas de simulación y a la creciente necesidad de diseñar y construir estructuras bajo requerimientos cada vez más exigentes. Sin embargo, cuando los sistemas estructurales se encuentran embebidos en entornos multifísicos más complejos, que usualmente incluyen sistemas de control, la eficiencia en la obtención de resultados y la reducción del costo computacional de las simulaciones se vuelve preponderante. En este contexto, los esquemas de análisis han adoptado, casi exclusivamente, alguna variante del Método de los Elementos Finitos (FEM) en conjunto con métodos de reducción de orden (ROM) con el objetivo de disminuir el tiempo de cómputo necesario al estudiar sistemas estructurales de gran escala, especialmente cuando se utilizan modelos no lineales. Los ROM pueden concebirse como la etapa que sigue a la formulación del FEM. Esto significa que se aplican sobre el sistema de ecuaciones de gobierno del sistema estructural con el objetivo de reducir la cantidad de grados de libertad que describen el comportamiento de la estructura.

En términos generales, los ROM se basan en la adopción de un subespacio de vectores para construir una base sobre la cual se aproxima la respuesta de la estructura y, en función del tipo de vectores utilizados, existen diversas variantes que pueden ser aplicadas. Por ejemplo, [Idelsohn y Cardona \(1985\)](#) proponen el uso de la descomposición modal en el espectro tangente, incorporando derivadas modales para extender la base de vectores. Por su parte, [Su y Cesnik \(2014\)](#) proponen el uso de modos de deformación que se obtienen tomando derivadas espaciales adicionales sobre los modos de desplazamiento. [Wang et al. \(2013\)](#), en cambio, utilizan modos duales especialmente seleccionados para la estructura a analizar. [Mahdiabadi et al. \(2021\)](#) presentan una serie de ROM denominados *no intrusivos* entre los cuales destaca el uso de desplazamientos forzados, vectores de Ritz y la descomposición ortogonal propia (POD), también mencionados en el trabajo de [Lülf et al. \(2013\)](#). Una revisión de estas alternativas y algunas otras se presenta en la obra de [Touzé et al. \(2021\)](#), quienes además postulan que la correcta elección de un ROM para un problema no lineal depende casi exclusivamente en el correcto entendimiento de la dinámica del problema que se desea modelar.

Con lo anterior en perspectiva, el presente trabajo expone un estudio que tiene como objetivo evaluar la influencia de la reducción de orden modal en la determinación de inestabilidades dinámicas en un sistema estructural con no linealidades geométricas. Para ello, se emplea una formulación de elementos de viga basada en la teoría de Timoshenko que incluye consistentemente las no linealidades de Von Kármán. La inestabilidad estructural que se investiga es el fenómeno de *pandeo dinámico*, es decir, la presencia de autovalores nulos en la matriz de rigidez del sistema. En cuanto al ROM seleccionado, se adopta la descomposición en el subespacio de modos tangentes de la estructura, utilizando distintos números de vectores en la base de aproximación.

Luego de esta sección introductoria, en la Sección 2 y en la Sección 3 se exponen las características fundamentales de la formulación en elementos finitos utilizadas en el presente estudio. En la Sección 4 se describe el ROM implementado. Luego, la Sección 5 describe el caso de estudio y los resultados obtenidos. Finalmente, en la Sección 6 se enuncian algunas conclusiones.

## 2. CINEMÁTICA DEL SÓLIDO Y RELACIONES CONSTITUTIVAS

En esta sección se resumen los aspectos cinemáticos más relevantes del modelo de viga y se presentan las relaciones constitutivas que gobiernan el comportamiento de su material. En el siguiente desarrollo los subíndices con letras latinas adoptan valores de 1 a 3, mientras que

los subíndices con letras griegas van de 2 a 3. Además, se aplica la notación de Einstein para la suma y se omite por simplicidad la dependencia temporal de los campos cinemáticos.

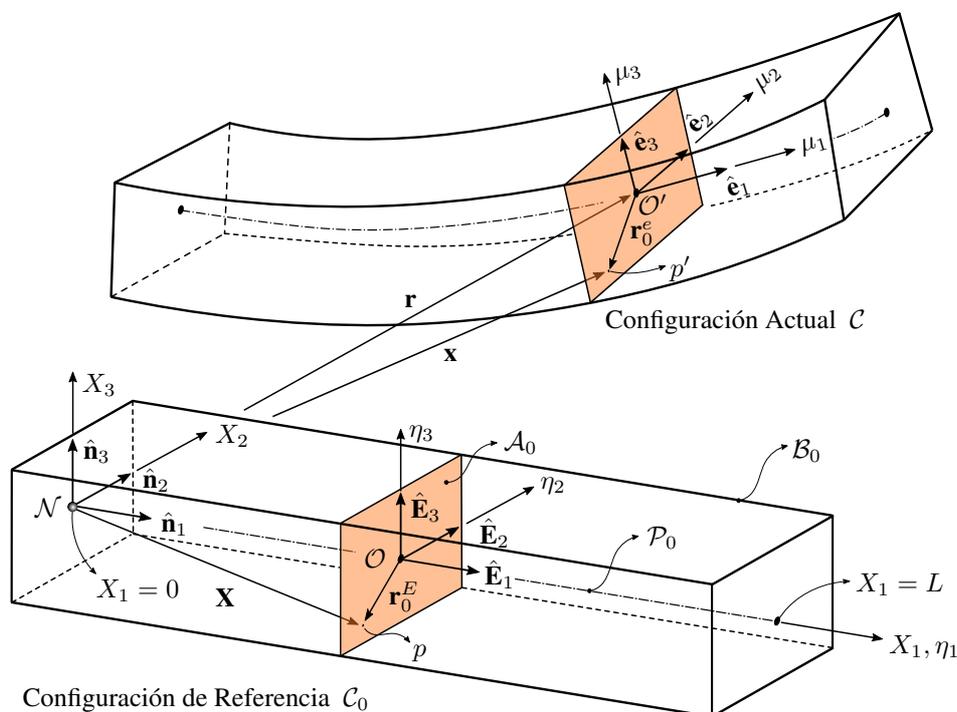


Figura 1: Viga tridimensional embebida en el espacio euclídeo.

## 2.1. Espacio de configuración

Una viga puede concebirse como un cuerpo tridimensional  $\mathcal{B}_0$  compuesto por una colección infinita de puntos materiales  $p \in \mathcal{B}_0$ . Inmersa en un espacio euclídeo, la localización espacial de estos puntos se define en términos del producto cartesiano entre una línea recta  $\mathcal{P}_0 \in \mathbb{R}^3$ , denominada *eje de la viga*, y un dominio plano  $\mathcal{A}_0$ , denominado *sección transversal*. La cinemática del cuerpo bajo deformación se describe a partir de dos espacios de configuración: un estado de referencia denotado por  $\mathcal{C}_0$  y un estado actual denotado por  $\mathcal{C}$ , tal como se presenta en la Fig. 1. Para especificar la configuración  $\mathcal{C}_0$  se considera un sistema de coordenadas local fijo en el espacio  $X_i$  con origen en el punto  $\mathcal{N}$  y una base ortonormal dextrógira asociada  $\hat{\mathbf{n}}_i$ . A su vez, para una sección transversal arbitraria se introduce un sistema de coordenadas  $\eta_i$  con origen en el punto  $\mathcal{O}$  junto a una base ortonormal dextrógira  $\hat{\mathbf{E}}_i$ . Los versores  $\hat{\mathbf{E}}_\alpha$  están contenidos en el plano de la sección y el versor  $\hat{\mathbf{E}}_1$  es normal a ella, tangente al eje  $X_1$ . Por otro lado, para especificar la configuración  $\mathcal{C}$  se introduce un sistema de coordenadas  $\mu_i$  con origen en el punto  $\mathcal{O}'$  y una base ortonormal dextrógira  $\hat{\mathbf{e}}_i$ . Los versores  $\hat{\mathbf{e}}_\alpha$  están contenidos en el plano de la sección, mientras que el versor  $\hat{\mathbf{e}}_1$  es normal a este plano. En este trabajo, la cinemática de la viga se estudia siguiendo un enfoque Lagrangiano y se sustenta en las siguientes hipótesis: *H1*) se adopta la teoría clásica de Timoshenko, es decir que se consideran los efectos de las deformaciones de corte y de los giros por flexión; *H2*) las contracciones laterales debido a elongaciones axiales se consideran despreciables, esto significa que se ignora el efecto Poisson; y *H3*) la rotación de la sección transversal se asume pequeña y se aproxima hasta el primer orden, y el desplazamiento del eje de la viga se considera pequeño respecto a su longitud.

## 2.2. Campo de desplazamiento

A partir de la Fig. 1, el vector posición de un punto material arbitrario  $p$  en la configuración  $\mathcal{C}_0$  se define por:

$$\mathbf{X}(X_1, \eta_\alpha) = X_1 \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{r}_0^E(\eta_\alpha), \quad (1)$$

donde  $\mathbf{r}_0^E(\eta_\alpha) = \eta_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha$  es el vector que localiza al punto  $p$  respecto de  $\mathcal{O}$ . A su vez, el punto  $p$  en la configuración  $\mathcal{C}$  se denota por  $p'$  y su vector posición es:

$$\mathbf{x}(X_1, \mu_\alpha) = \mathbf{r}(X_1) + \mathbf{r}_0^e(\mu_\alpha) = \mathbf{r}(X_1) + \mu_\alpha \mathbf{\Lambda}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_\alpha, \quad (2)$$

donde  $\mathbf{r}_0^e(\mu_\alpha) = \mu_\alpha \mathbf{\Lambda}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_\alpha$  es el vector que localiza al punto  $p'$  respecto de  $\mathcal{O}'$  y  $\mathbf{\Lambda}(X_1) \in SO(3)$  es un tensor de rotación uniparamétrico definido por  $\mathbf{\Lambda}(X_1) = \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_i$ . El campo de desplazamiento  $\mathbf{U}(X_i) \in \mathbb{R}^3$  se obtiene por medio de la diferencia entre los vectores  $\mathbf{x}(X_1, \mu_\alpha)$  y  $\mathbf{X}(X_1, \eta_\alpha)$ , es decir:

$$\mathbf{U}(X_i) = \mathbf{x}(X_i) - \mathbf{X}(X_i) = \mathbf{U}_0(X_1) + [\mathbf{\Lambda}(X_1) - \mathbf{I}] X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha \quad (3)$$

Teniendo en cuenta la hipótesis  $H3$  se puede aproximar al tensor  $\mathbf{\Lambda}(X_1)$  por medio de uno de primer orden  $\mathbf{\Lambda}(X_1) \approx \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Theta}}(X_1)$ . En este sentido, si se sustituye tal aproximación en la Ec. (3) se obtiene el campo de desplazamiento linealizado  $\mathbf{U}_l(X_i) \in \mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{U}_l(X_i) = \mathbf{U}_0(X_1) + \tilde{\mathbf{\Theta}}(X_1) X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha = \mathbf{U}_0(X_1) + \boldsymbol{\theta}(X_1) \times X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha, \quad (4)$$

donde  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  es el tensor identidad,  $\tilde{\mathbf{\Theta}}(X_1) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  es un tensor antisimétrico y  $\boldsymbol{\theta}(X_1) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  su vector axial asociado. Las componentes cartesianas del tensor (o del vector)  $\theta_i(X_i)$  pueden interpretarse como rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes  $X_i$ .

## 2.3. Campo de deformación

El tensor de deformación de Green-Lagrange  $\mathbf{E}_{gl}(X_i) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  se define por:

$$\mathbf{E}_{gl}(X_i) = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}), \quad (5)$$

donde  $\mathbf{H} = \mathbf{U}_l(X_i) \otimes \nabla$  es el tensor gradiente de desplazamiento y  $\nabla \equiv \partial(\cdot)/\partial X_i \hat{\mathbf{E}}_i$  el operador Nabla (Reddy, 2019).

El tensor de deformación de Von Kármán se puede derivar del tensor de Green-Lagrange reteniendo las componentes lineales de deformación y las no lineales que satisfacen la hipótesis cinemática de Von Kármán. Esta hipótesis afirma que las rotaciones provenientes de los desplazamientos transversales del eje de la viga son moderadas, lo cual implica que los cuadrados de la derivada de  $U_0^\alpha(X_1)$  respecto a la coordenada espacial  $X_1$  no deben despreciarse. Con el propósito de simplificar consistentemente los diversos términos y, siguiendo los trabajos expuestos en la literatura (Zhu et al., 2010; Reddy y Mahaffey, 2013), se propone:

$$\left( \frac{\partial U_0^\alpha}{\partial X_1} \right)^2 \sim O(\theta_i), \quad \frac{\partial U_0^1}{\partial X_1} \sim O(\theta_i), \quad O \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{\Theta}}}{\partial X_1} \right) \approx O(\tilde{\mathbf{\Theta}}) \sim O(\theta_i) \quad (6)$$

A partir de lo mencionado, se efectúa un análisis de orden sobre los términos no lineales de la Ec. (5) y se retienen todas aquellas componentes de  $O(\theta_i)$  inclusive. De ello resulta el tensor de deformación de Von Kármán  $\mathbf{E}_{vk}(X_i) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{E}_{vk}(X_i) = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{b} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0 (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \right], \quad \mathbf{b}_0 = \frac{\partial U_0^2}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_2 + \frac{\partial U_0^3}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_3 \quad (7)$$

Un análisis de la Ec. (7) permite notar que sólo existen tres componentes no nulas:  $E_{11}(X_1)$ ,  $E_{12}(X_1)$  y  $E_{13}(X_1)$ .

## 2.4. Relaciones constitutivas

El comportamiento del material de la viga se evalúa por medio de la ley de Hooke generalizada. Para un cuerpo elástico tridimensional sujeto a condiciones isotérmicas, esta ley está dada por (Reddy, 2019):

$$\mathbf{S}(X_i) = \mathbb{C} : \mathbf{E}_{vk}(X_i), \quad (8)$$

donde  $\mathbf{S}(X_i) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  es el tensor de tensiones simétrico de Piola-Kirchoff y  $\mathbb{C} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  es el tensor de elasticidad simétrico. En virtud de la isotropía y homogeneidad del material,  $\mathbb{C}$  se caracteriza con solo dos constantes elásticas, las cuales son el módulo de Young  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ .

## 3. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

### 3.1. Esquema de interpolación elemental

En el contexto del modelo de viga, la línea  $\mathcal{P}_0 \in \mathbb{R}^3$  que describe al eje de la misma se divide en  $N_{el}$  subdominios elementales tal que:

$$[0, L] = \bigcup_{e=1}^{N_{el}} I_e^{h_e}, \quad I_e^{h_e} \subset [X_1^i, X_1^j], \quad (9)$$

donde  $L$  representa a la longitud de la viga,  $I_e^{h_e}$  denota a un elemento finito típico,  $X_1^i$  y  $X_1^j$  son las coordenadas cartesianas del nodo inicial y final del elemento finito, y  $h_e = X_1^j - X_1^i$  indica su longitud.

En el ámbito de las estructuras, es bien conocido que los elementos basados en la teoría de Timoshenko pueden experimentar un efecto indeseado denominado *bloqueo por corte*. Sin embargo, si las no linealidades geométricas de Von Kármán también son consideradas, los elementos pueden incurrir, además, en *bloqueo membranar* en determinadas situaciones. Según expone Reddy (2014) esto se debe a la incapacidad del elemento de representar un estado de deformación axial nula. Para evitar estos fenómenos numéricos se recurre a la integración reducida de determinados términos de rigidez y al uso de funciones de forma particulares.

En este trabajo, para interpolar el desplazamiento del eje elemental  $\mathbf{U}_0^e(X_i)$  y las rotaciones infinitesimales  $\boldsymbol{\theta}^e(X_i)$  en el interior de un subdominio arbitrario  $I_e^{h_e}$  se considera en un elemento finito recto de dos nodos. Cada nodo posee seis grados de libertad, tres rotaciones y tres giros. Los desplazamientos y giros del nodo  $i$  se denotan por medio de  $u_{ik}^e \in \mathbf{u}_i^e$  y  $\theta_{ik}^e \in \boldsymbol{\theta}_i^e$ , mientras que los desplazamientos y giros asociados al nodo  $j$  se indican por medio de  $u_{jk}^e \in \mathbf{u}_j^e$  y  $\theta_{jk}^e \in \boldsymbol{\theta}_j^e$ . En tanto que el subíndice  $k$  indica el eje  $X_i$  respecto al cual se mide la variable geométrica. Por simplicidad, se agrupa a los grados de libertad nodales en un vector columna  $\boldsymbol{\eta}_e \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$

$$\boldsymbol{\eta}_e = [\mathbf{u}_i^e \quad \boldsymbol{\theta}_i^e \quad \mathbf{u}_j^e \quad \boldsymbol{\theta}_j^e]^T \quad (10)$$

El desplazamiento axial  ${}_eU_0^1(X_1)$  y las rotaciones  ${}_e\theta_i(X_1)$  se interpolan utilizando a los polinomios lineales de Lagrange como funciones de forma. Por su parte, la interpolación de los desplazamientos transversales  ${}_eU_0^\alpha(X_1)$  se basa en las funciones de forma cuadráticas del esquema de interpolación ligada propuesto por Oñate (2013). Este esquema evita el bloqueo por corte cuando se integran de forma exacta los términos lineales de rigidez pero, es necesario

emplear integración reducida en los términos no lineales para evitar el bloqueo membranar. En virtud de lo mencionado, se puede expresar:

$$\mathbf{U}_0^e(\xi) = \mathbf{N}_u(\xi) \boldsymbol{\eta}_e, \quad \boldsymbol{\theta}^e(\xi) = \mathbf{N}_\theta(\xi) \boldsymbol{\eta}_e, \quad (11)$$

donde  $\xi$  es una coordenada natural que se relaciona con la coordenada espacial  $X_1$  por medio de la transformación afín del elemento (Reddy, 2019) y  $\mathbf{N}_u(\xi), \mathbf{N}_\theta(\xi) \in \mathbb{R}^{3 \times 12}$  se denominan matrices de interpolación de desplazamientos y giros.

### 3.1.1. Aproximación elemental del campo de desplazamiento

El campo de desplazamiento en el interior de un subdominio genérico  $I_e^{he}$  se obtiene sustituyendo la Ec. (11) en la Ec. (4):

$$\mathbf{U}_l^e(\xi, X_\alpha) = \bar{\mathbf{U}}(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e, \quad (12)$$

donde  $\bar{\mathbf{U}}(\xi, X_\alpha) \in \mathbb{R}^{3 \times 12}$  es una matriz compuesta por el tensor identidad y las coordenadas  $X_\alpha$ .

### 3.2. Ecuaciones de movimiento elemental

Las ecuaciones de movimiento a nivel elemental se obtienen empleando el principio de Hamilton (Reddy, 2017):

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta \bar{W}_{nc}) dt = 0, \quad (13)$$

donde  $\delta T$  y  $\delta U$  denotan la variación de la energía cinética y elástica respectivamente, y  $\delta \bar{W}_{nc}$  indica el trabajo virtual realizado por las cargas externas no conservativas. Considerando que sobre el elemento actúa un sistema de fuerzas y momentos distribuidos y, a su vez teniendo en cuenta las Ecs. (8) y (12) resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineal:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\boldsymbol{\eta}}_e(t) + \mathbf{K}_e[\boldsymbol{\eta}_e(t)] \boldsymbol{\eta}_e(t) = \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{m}_e(t), \quad (14)$$

donde  $\mathbf{M}_e, \mathbf{K}_e(\boldsymbol{\eta}_e) \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  son las matrices elementales de masa y de rigidez no lineal respectivamente. Por su parte,  $\mathbf{f}_e(t), \mathbf{m}_e(t) \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$  constituyen los vectores de fuerzas y momentos nodales.

### 3.3. Ecuaciones de movimiento

El sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna la dinámica de una estructura se obtiene ensamblando las ecuaciones elementales de la forma habitual. De ello resulta:

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{K}[\boldsymbol{\eta}(t)] \boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{m}(t), \quad (15)$$

donde  $\mathbf{K}[\boldsymbol{\eta}(t)], \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N_{eq} \times N_{eq}}$  denotan a las matrices globales de rigidez y de masa,  $\mathbf{f}(t), \mathbf{m}(t) \in \mathbb{R}^{N_{eq} \times 1}$  son los vectores globales de fuerzas y momentos nodales y,  $N_{eq}$  es el número de ecuaciones. Una versión incremental de las Ecs. (15) con respecto a una posición deformada  $\boldsymbol{\eta}(t_0) = \boldsymbol{\eta}_0$  puede obtenerse definiendo la matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_t \in \mathbb{R}^{N_{eq} \times N_{eq}}$  de la estructura como (Idelsohn y Cardona, 1985):

$$\mathbf{K}_t(\boldsymbol{\eta}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right|_{\boldsymbol{\eta}_0} \quad (16)$$

Luego, la ecuación incremental de equilibrio se aproxima despreciando los términos de orden superior en  $\Delta \boldsymbol{\eta}$ . Esto es:

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{K}_t(\boldsymbol{\eta}_0) \Delta \boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{m}(t) - \mathbf{K}(\boldsymbol{\eta}_0) \boldsymbol{\eta}_0, \quad \Delta \boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}(t) - \boldsymbol{\eta}_0 \quad (17)$$

### 3.4. Inestabilidad dinámica del sistema

La inestabilidad del sistema que se investiga en el presente trabajo es el pandeo dinámico. La condición para la cual el efecto combinado de cargas y deformación estructural produce la singularidad de la matriz de rigidez tangente del sistema se identifica con la condición crítica de dicha inestabilidad. Por lo tanto, el proceso de búsqueda de esta condición consiste en calcular en cada paso de la simulación los autovalores de la matriz  $\mathbf{K}_t(\boldsymbol{\eta}_0)$  entendiendo que, si alguno de ellos se anula, la matriz se vuelve singular y se produce la inestabilidad de la estructura.

## 4. REDUCCIÓN DE ORDEN

La reducción de orden del sistema (Ec. 19) se lleva a cabo aplicando el método de descomposición utilizando un subespacio de modos tangentes. Este subespacio se obtiene al resolver el problema de autovalores generalizado asociado a la versión homogénea de la Ec. (19):

$$(\mathbf{K}_t(\boldsymbol{\eta}_0) - \omega_i^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_i(t) = \mathbf{0} \quad (18)$$

donde  $\omega_i$  es la  $i$ -ésima frecuencia instantánea y  $\boldsymbol{\phi}_i(t) \in \mathbb{R}^{N_{eq} \times 1}$  el  $i$ -ésimo autovector instantáneo. Aproximando a  $\Delta \boldsymbol{\eta}(t)$  mediante una combinación lineal de  $N_m$  vectores,  $\Delta \boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t)$ , el sistema de ecuaciones reducido resulta:

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_t(\boldsymbol{\eta}_0) \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\Phi}^T [\mathbf{f}(t) + \mathbf{m}(t) - \mathbf{K}(\boldsymbol{\eta}_0) \boldsymbol{\eta}_0], \quad (19)$$

donde  $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{N_{eq} \times N_m}$  es una matriz formada por los vectores de la base y  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{N_m \times 1}$  es el nuevo vector de incógnitas. Es importante destacar que, en virtud de la no linealidad presente en la matriz de rigidez, la base vectorial utilizada en la reducción de orden no puede mantenerse constante para todo el intervalo de tiempo de la simulación. Por consiguiente, la matriz modal será recalculada al inicio de cada paso del proceso de integración numérica. Las Ecs. (19) se integran en el dominio del tiempo utilizando el método predictor-corrector de cuarto orden de Hamming (Brice et al., 1969).

## 5. CASO DE ESTUDIO

El caso elegido para el análisis consiste en una viga en forma de L, con sección transversal cuadrada y empotrada en ambos extremos. A su vez, sobre el vértice de la viga actúan dos cargas armónicas, en el sentido de los ejes  $X_2$  y  $X_3$ , cuyas amplitudes crecen linealmente con el tiempo (Fig. 2).

A partir del modelo descrito, se obtienen las respuestas de la estructura utilizando distintos números de modos tangentes. En cada caso se registra la evolución del primer autovalor de la matriz tangente ( $\lambda_1(t)$ ) para identificar, como se mencionó, la inestabilidad de la estructura. Los resultados se presentan en la Fig. 3 donde se muestran curvas para cinco (5M), diez (10M), veinte (20M), treinta (30M), cuarenta (40M), cincuenta (50M) y cien (100M) modos tangentes. Asimismo, se muestran los resultados obtenidos utilizando el modelo completo, es decir, sin reducción de orden (Full).

De la Fig. 3 puede observarse que con cinco y diez modos (curvas 5M y 10M) el modelo no es capaz de capturar la inestabilidad ya que ( $\lambda_1(t)$ ) se mantiene por encima de cero durante el tiempo de simulación y parece tender a estabilizarse. Utilizando veinte modos, sin embargo, el comportamiento del modelo cambia pasados los 1,25 s donde la curva de ( $\lambda_1(t)$ ) comienza a inestabilizarse y luego alcanza el valor cero. Algo similar ocurre con treinta, cuarenta y cincuenta modos pasado 1,0 s de tiempo. Sin embargo, todos los casos difieren con el resultado obtenido con el modelo completo que encuentra la inestabilidad apenas pasados los 0,6 s.

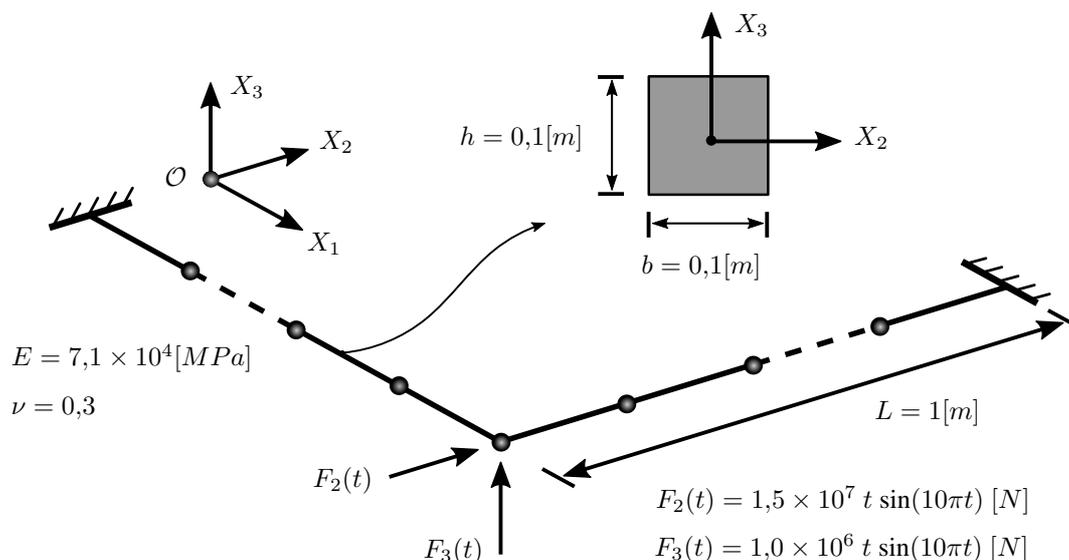


Figura 2: Configuración del caso de estudio.

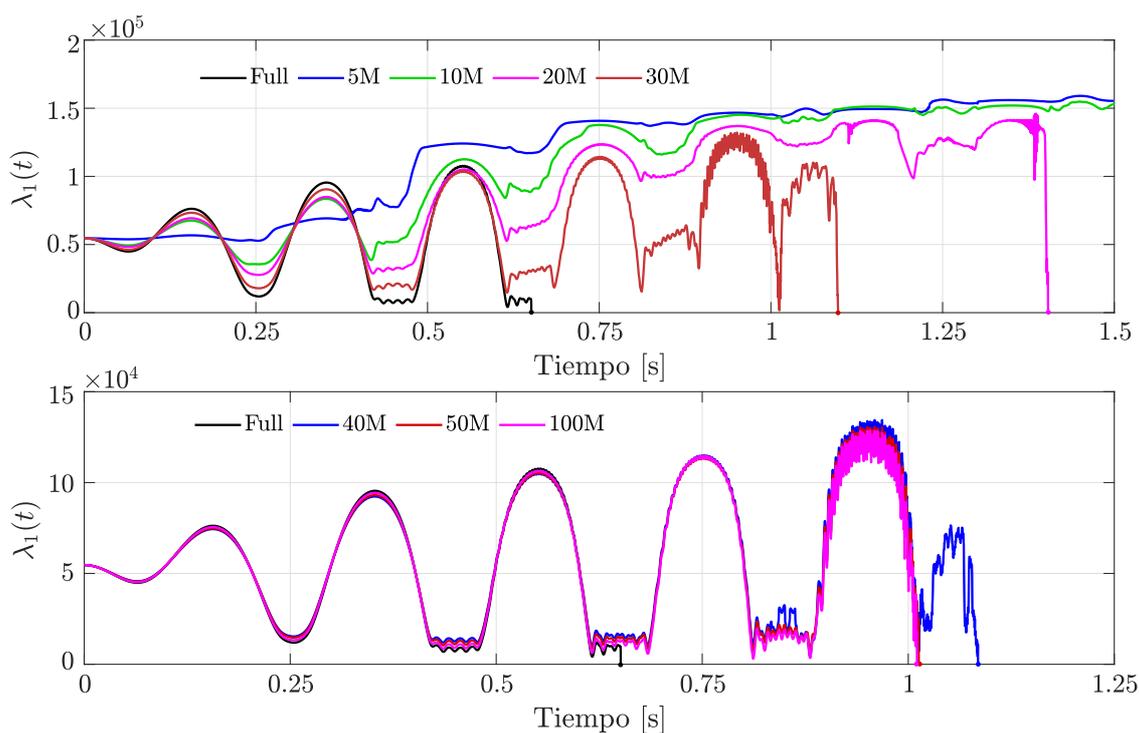


Figura 3: Viga tridimensional embebida en el espacio euclídeo.

En la Fig. 4 se muestran las evoluciones temporales de los desplazamientos del vértice de la viga en las direcciones  $X_2$  y  $X_3$  utilizando cinco modos (5M) y cincuenta modos (50M). Asimismo, se muestran los resultados obtenidos utilizando el modelo completo, es decir, sin reducción de orden (Full) y los obtenidos con una versión lineal del mismo (Lineal). Además, a modo de contraste, se muestran los resultados provenientes de un software de elementos finitos (Ansys®).

Los resultados de la Fig. 4 ponen en evidencia la incapacidad del modelo lineal para capturar

la respuesta de la estructura. En cuanto a los modelos reducidos, las respuestas obtenidas con cinco y cincuenta modos no muestran diferencias apreciables durante los primeros 0,6 s pero, a medida que la curva 50M se aproxima al punto crítico muestra una inestabilidad que no se aprecia en la de 5M. La curva del modelo completo tiene un comportamiento análogo a las anteriores, e incluso es similar a la obtenida con el software. La diferencia recae en el punto de inestabilidad que ocurre más prematuramente.

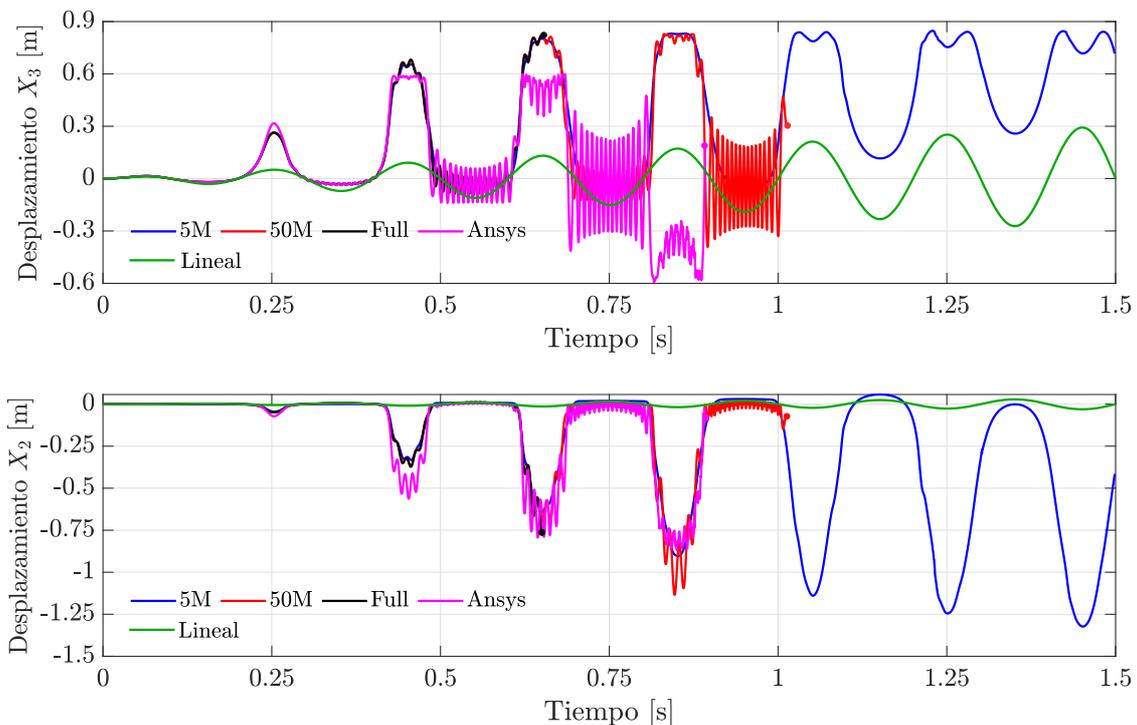


Figura 4: Viga tridimensional embebida en el espacio euclídeo.

## 6. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se utilizó una formulación de elementos finitos de viga basada en la teoría de Timoshenko que incluye, de manera consistente, las no linealidades geométricas de Von Kármán para evaluar la aplicabilidad de un método de reducción de orden en la predicción de inestabilidades estructurales. Se utilizó el método de reducción de orden basado en la descomposición sobre el subespacio de modos tangentes y se utilizaron distintas cantidades de vectores para obtener los resultados. En cuanto a la inestabilidad estructural, se estudió el fenómeno de *pandeo dinámico* entendido como la aparición de autovalores (al menos uno) nulos en la matriz de rigidez del sistema.

Con este modelo, se analizó una estructura de vigas sometida a cargas armónicas de amplitud creciente y se obtuvieron respuestas utilizando cantidades crecientes de vectores en la base de aproximación. Asimismo, se reportó la evolución temporal del primer autovalor de la matriz de rigidez para investigar la capacidad del modelo de capturar el pandeo. Los resultados fueron contrastados contra aquellos obtenidos con un software de elementos finitos (Ansys ®) y los provenientes de la versión lineal del modelo.

Los resultados muestran que la cantidad de vectores considerados es determinante a la hora de identificar la inestabilidad de la estructura, a tal punto que las bases con cinco y diez vectores

(5M y 10M) no son capaces de capturar el fenómeno. No obstante esto, la respuesta estructural (desplazamientos) parecería no verse sensiblemente influida por la dimensión del subespacio utilizada, ya que con un porcentaje relativamente bajo de modos los resultados son aceptables sin mostrar diferencias marcadas, mientras no ocurra la inestabilidad. Esto podría deberse a la naturaleza de las cargas externas aplicadas a la estructura cuyas frecuencias se encuentran en el orden de las primeras frecuencias naturales del sistema.

Los datos obtenidos de este estudio permiten concluir que el entendimiento de la dinámica estructural del caso particular que se desea analizar es preponderante a la hora de escoger el método de reducción de orden adecuado. En otras palabras, no es posible a priori determinar de manera consistente la aplicabilidad de un método por sobre otro sin tener mayores datos sobre el comportamiento general del sistema estructural en estudio.

Con lo anterior en perspectiva, se propone como trabajos futuros investigar el desempeño del método de reducción de orden ante la aplicación de cargas impulsivas que exciten un rango amplio de frecuencias. Por otro lado, resultaría interesante evaluar otros conjuntos de vectores para realizar la reducción y obtener conclusiones más generales al respecto.

## REFERENCIAS

- Brice C., Luther H., y Wikes J.O. Applied numerical methods. *John Wesley and sons Inc. USA*, 1969.
- Idelsohn S.R. y Cardona A. A reduction method for nonlinear structural dynamic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(3):253–279, 1985.
- Lülf F.A., Tran D.M., y Ohayon R. Reduced bases for nonlinear structural dynamic systems: A comparative study. *Journal of Sound and Vibration*, 332(15):3897–3921, 2013.
- Mahdiabadi M.K., Tiso P., Brandt A., y Rixen D.J. A non-intrusive model-order reduction of geometrically nonlinear structural dynamics using modal derivatives. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 147:107126, 2021.
- Oñate E. *Structural Analysis With The Finite Element Method. Linear Statics: Volume 2: Beams, Plates And Shells*. Springer Science & Business Media, 2013.
- Reddy J. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis Second Edition: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*. Oxford, 2014.
- Reddy J. y Mahaffey P. Generalized beam theories accounting for von kármán nonlinear strains with application to buckling. *Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics*, 1(1):120–134, 2013.
- Reddy J.N. *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons, 2017.
- Reddy J.N. *Introduction to the finite element method*. McGraw-Hill Education, 2019.
- Su W. y Cesnik C.E. Strain-based analysis for geometrically nonlinear beams: a modal approach. *Journal of Aircraft*, 51(3):890–903, 2014.
- Touzé C., Vizzaccaro A., y Thomas O. Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures: a review of nonlinear techniques. *Nonlinear Dynamics*, 105(2):1141–1190, 2021.
- Wang X., Perez R.A., y Mignolet M.P. Nonlinear reduced order modeling of complex wing models. En *54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, página 1520. 2013.
- Zhu H., Cai Y., Paik J., y Atluri S. Locking-free thick-thin rod/beam element based on a von karman type nonlinear theory in rotated reference frames for large deformation analyses of space-frame structures. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 57(2):175, 2010.