

## MECANISMO Y ORIGEN DE LA FRICCIÓN EN MATERIALES VISCOELÁSTICOS EN CONTACTO CON SUPERFICIE RUGOSA

### MECHANISM AND ORIGIN OF FRICTION IN VISCOELASTIC MATERIALS IN CONTACT WITH ROUGH SURFACE

Fernando S. Buezas<sup>a,b</sup>, Iván E. Rango<sup>a,b</sup> y Eduardo Goicoechea<sup>a</sup>

<sup>a</sup>IFISUR, Universidad Nacional del Sur, 12 de Octubre 1865, 8000 Bahía Blanca, Argentina

<sup>b</sup>Departamento de Física, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina

**Palabras clave:** Coeficiente de fricción, Rugosidad, Método de elementos finitos.

**Abstract.** En este trabajo se expone un método para estimar el coeficiente de fricción entre un cuerpo sólido viscoelástico y una superficie rugosa, a partir del modelado del contacto entre ellos. El coeficiente de fricción se obtiene como función de la topología de la superficie y de los parámetros constitutivos. Para ello, el cuerpo deformable se modeló como un material del tipo Kelvin-Voigt mediante un modelo bi-dimensional basado en la mecánica del continuo. La rugosidad se obtuvo mediante mediciones de un material real, realizadas con un microscopio confocal. Luego la topografía de la superficie fue modelada como una condición de borde. Las ecuaciones se aproximaron mediante el método de elementos finitos. Los resultados de las simulaciones muestran una curva donde se observa un aumento del coeficiente a velocidades bajas, seguido de un posterior decrecimiento con la velocidad.

**Keywords:** Friction coefficient, Rugosity, Finite element method.

**Abstract.** In this work, a method to estimate the friction coefficient between a viscoelastic body and a rough surface through the modeling of the contact between them is presented. The coefficient of friction is obtained as a function of the topology of the surface and the constitutive parameters. To do so, the deformable body was modeled as a Kelvin-Voigt material, and a bi-dimensional model based on the theory of continuum mechanics was used. The rugosity was obtained through measurements from a real material, with a confocal microscope. The measured elevation of the surface was modeled as a boundary condition. The equations were approximated through the method of finite elements. The results of the simulations depict a typical curve where an increase is observed for low speeds, followed by a weakening effect.

## 1 INTRODUCCIÓN

El estudio de materiales viscoelásticos en contacto con superficies rugosas es de gran importancia práctica. Comprender en detalle el comportamiento de estos cuerpos en contacto y en movimiento, y por lo tanto su disipación energética y desgaste, permitiría mejorar la eficiencia, el diseño y la producción de productos como neumáticos, juntas de sellado, suelas de calzado, entre otros.

Parte de las contribuciones científicas hasta la fecha, han estado enfocadas en el desarrollo de teorías y diferentes metodologías numéricas con el objetivo de investigar el contacto de materiales viscoelásticos en condición de rodadura y deslizamiento (Brilliantov y Poschel (1998); Pöschel et al. (1999); Zheng et al. (2011); Scaraggi y Persson (2015); Putignano et al. (2012); Persson (2001); Carbone y Putignano (2014)). La gran variedad de enfoques evidencia la dificultad del tema que, por lo general, impone el coeficiente de fricción como modelo constitutivo. Estos modelos capturan con éxito fenómenos como el stick-slip.

Por otro lado existe una rama de la literatura que estudia a partir de modelos microscópicos la aparición del fenómeno de fricción como consecuencia de la física del contacto a nivel local, es decir, teniendo en cuenta la geometría y naturaleza de las superficies en contacto. Al tratar con superficies rugosas existe otro elemento que incrementa la complejidad del análisis, las escalas. La rugosidad se mide en escala micrométrica, lo cual presenta una dificultad computacional a la hora de modelar el contacto mediante el método de elementos finitos, ya que en la interfaz entre los cuerpos el mallado del cuerpo viscoelástico debe ser lo suficientemente denso como para poder representar de manera adecuada dicha rugosidad.

En este trabajo se estudia numéricamente, y en el marco de la mecánica del continuo, el coeficiente de fricción que se manifiesta al deslizar un cuerpo viscoelástico sobre un plano rígido rugoso en el que solo se imponen fuerzas de contacto según la normal en cada punto. Es decir que el coeficiente de fricción aparece como consecuencia de la topología del plano rígido, la presión de contacto, la velocidad de deslizamiento y las propiedades del cuerpo deformable. Para lograr este objetivo, se desarrolla un modelo en 2D escrito en las coordenadas del campo de referencia Lagrangiana. El modelo se resuelve numéricamente mediante el método de elementos finitos. Varios experimentos numéricos se llevan a cabo con el objetivo de estudiar la variación del coeficiente de fricción con la velocidad y la carga normal.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presentan las ecuaciones de movimiento, la ecuación constitutiva, las condiciones de contorno y el modelado numérico. En la sección 3 se analizan los resultados, incluyendo una descripción del mecanismo que da origen al coeficiente de fricción, así como la dependencia de este con determinados parámetros de interés. Finalmente, en la sección 4 se muestra un resumen del estudio y algunos comentarios finales.

## 2 METODOLOGÍA

### 2.1 Cuerpo viscoelástico y ecuaciones de movimiento.

Se modela un medio viscoelástico con una configuración tipo casquete circular de largo  $L$  y alto  $L/4$ , deslizando sobre un plano rígido y rugoso como muestra la Fig. 1. En la parte superior plana se encuentra una placa delgada y rígida. A la parte superior de esta placa se le imprime una velocidad constante  $v$  y una carga normal  $F_n$ .

El movimiento del semicírculo se calcula resolviendo la siguiente ecuación diferencial vectorial (en este caso de dos dimensiones, por lo que representa un conjunto de dos ecuaciones en

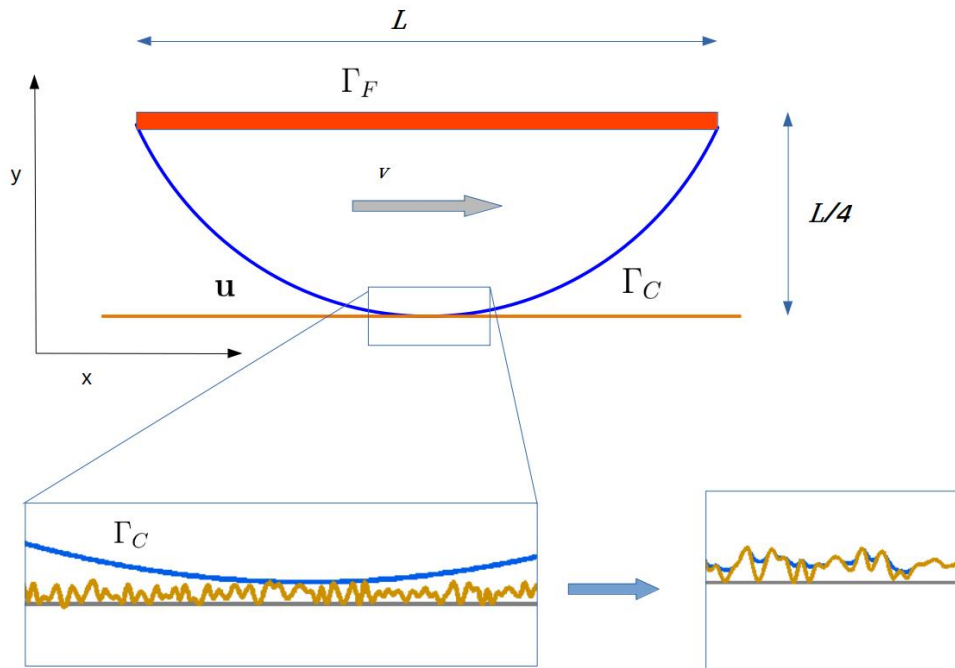


Figure 1: Esquema del modelo

derivadas parciales):

$$\nabla_X \cdot \mathbf{T}_R + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \tag{1}$$

donde  $\mathbf{T}_R$  es el primer tensor de tensiones de Piola,  $\rho_0 = \rho(X, t_0)$  es la densidad de masa en la configuración de referencia (en este caso coincidente con las condiciones iniciales),  $\mathbf{b}$  es el vector de fuerzas de cuerpo materiales, y  $\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)$  es el campo vectorial de las aceleraciones ( $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  es el vector posición espacial). El símbolo  $\nabla_X \cdot$  representa la divergencia con respecto a las coordenadas materiales  $\mathbf{X}$ . Las condiciones de contorno son impuestas en el borde de la configuración de referencia, donde son conocidas. Dichas condiciones son de dos tipos, geométricas:  $\mathbf{x}(\partial V^1) = \bar{\mathbf{x}}$ , o naturales:  $\mathbf{t}_R(\partial V^2) = \bar{\mathbf{t}}_R$ . Donde  $\partial V^1$  es la sección del borde donde se prescribe el movimiento y  $\partial V^2$  es donde se prescribe la tensión  $\mathbf{t}_R = \mathbf{T}_R \mathbf{n}_R$ ,  $\mathbf{t}_R$  es el vector tracción de Piola, siendo  $\mathbf{n}_R$  el vector normal a la superficie material (lagrangeana). Los símbolos  $\bar{\mathbf{x}}$  y  $\bar{\mathbf{t}}_R$  representan los valores específicos que toman estos vectores.

El comportamiento constitutivo del semicírculo deformable se modela como un material viscoelástico, combinando una parte Neo-Hookeana (parte elástica) y un término equivalente a un fluido Newtoniano para la parte viscosa (Bonet y Wood (2008)):

$$\mathbf{T}_{RR}(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}) = \mu (\mathbf{1} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda \ln J \mathbf{C}^{-1} + \eta \dot{\mathbf{C}}_0. \tag{2}$$

La ecuación constitutiva está escrita en términos del segundo tensor de Piola:  $\mathbf{T}_{RR}(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}})$ , donde  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  es el tensor derecho de Cauchy-Green,  $\mathbf{C}_0$  es la parte desviadora y  $\dot{\mathbf{C}}_0$  es su derivada temporal. Además,  $\mathbf{F}$  es el gradiente de deformación. El segundo tensor de Piola está relacionado con el primero de acuerdo a  $\mathbf{T}_{RR} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}_R$ . Como es usual,  $\lambda$  y  $\mu$  son parámetros que coinciden con las constantes de Lamé en pequeñas deformaciones (material homogéneo e isotrópico) a partir de los cuales se pueden obtener el módulo elástico y el coeficiente de Poisson,  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad,  $\mathbf{I}$  es el tensor identidad, y  $J = \det(\mathbf{F})$ . La Ec. 2

es compatible con el principio de indiferencia del marco y con la termodinámica (Gurtin et al. (2010)).

## 2.2 Condiciones de borde de contacto

Cuando el semicírculo toca el plano rugoso, la condición de contacto es tal que el cuerpo deformable no puede penetrar el rígido. Para modelar esto, sea un dominio bidimensional  $V_0$  ocupado por el semicírculo y la placa rígida, el contorno consiste en dos partes:  $\Gamma = \Gamma_F \cup \Gamma_C$  (ver Fig. 1). El sector  $\Gamma_F$  del contorno  $\Gamma$  es la región en la que se aplican las tensiones (condiciones naturales) y los desplazamientos (condiciones geométricas) que fuerzan al movimiento según se solicite, y  $\Gamma_C$  es la región que se encuentra en contacto con el cuerpo rígido rugoso. Se puede observar un detalle de esta zona en el recuadro con zoom de la Fig. 1. Allí, la cantidad  $\mathbf{u} = \mathbf{x}_R - \mathbf{x}_B$  es calculada como la diferencia entre la posición de un punto en el cuerpo deformable y su correspondiente en el cuerpo rígido.

Sea  $t_N$  la componente normal del vector tracción de Cauchy  $\mathbf{t}_c$  en la interfaz de contacto, entonces el problema de Signorini se enuncia como:

$$\mathbf{u}_N \geq 0; t_N \leq 0; \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_c = 0 \quad (3)$$

No existe contacto cuando  $\mathbf{u}_N > 0$ , luego  $t_N = 0$ ; y existe cuando  $\mathbf{u}_N = 0$  resultando  $t_N \leq 0$ . Estas condiciones constituyen un problema no continuo o no suave, ya que  $t_N$  es una aplicación multivaluada del vector  $\mathbf{u}_N$  (o simplemente,  $t_N$  no es función de  $\mathbf{u}_N$  ya que el problema de Signorini implica una restricción no holonómica, ver Cendra y Grillo (2006)). Una alternativa para resolver este problema consiste en una regularización de la condición de contacto, al reemplazar la condición rígida por una suave. El problema no holonómico es reemplazado por un problema sin restricción. La condición de contacto consiste en imponer una relación entre las tracciones de Cauchy y los desplazamientos (combinación de los tipos geométrico y natural conocida como condición de Robin), entonces el problema se regulariza mediante la siguiente función

$$t_N = \begin{cases} -k\delta & \text{if } \delta < 0 \\ 0 & \text{if } \delta > 0 \end{cases} \quad (4)$$

donde  $k$  es una constante que penaliza la penetración  $\delta$  con el piso. A medida que el valor de  $k$  aumenta, la penetración  $\delta$  disminuye, y en el límite de  $k \rightarrow \infty$  entonces  $\mathbf{u}_N = 0$ . Sin embargo, un aumento excesivo de este parámetro conduce a un mal condicionamiento del sistema de ecuaciones discretizadas.

## 2.3 Superficie rugosa rígida

Tomando en cuenta las rugosidades típicas de diferentes superficies se puede simular una función con idénticos parámetros de rugosidad usando puntos aleatorios. Luego se unen por aproximates spline de 3er grado. Esto da una función continua  $f_c(x)$  que representa el perfil del rígido rugoso. Además dicha función tiene derivada continua  $f'_c(x)$ . La Fig.1 muestra dicho perfil. Con la función  $f_c(x)$  y su derivada se pueden construir los vectores tangente  $\mathbf{t}_g$  y normal  $\mathbf{n}$ , ambos unitarios, a la superficie rugosa en cada punto  $x$

$$\mathbf{t}_g = \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + f'_c(x)^2}}, \frac{f'_c(x)}{\sqrt{1 + f'_c(x)^2}} \right] \quad (5)$$

$$\mathbf{n} = [-t_{g_2}, t_{g_1}] . \quad (6)$$

donde  $t_{g_1}$  y  $t_{g_2}$  son la primera y segunda componente de  $\mathbf{t}_g$  respectivamente.

Luego el vector tracción de Cauchy  $\mathbf{t}_c$  se puede construir con el valor  $t_N$  y el vector unitario  $\mathbf{n}$

$$\mathbf{t}_c = t_N \mathbf{n} \quad (7)$$

Téngase en cuenta que la superficie rígida rugosa representada por  $f_c(x)$  corresponde a la configuración *observada* (coordenada espacial o euleriana). Cuando el medio continuo interactúa con dicha superficie rugosa, se deformará tomando la forma del rígido. La condición de borde impuesta al vector de tracción de Cauchy por la Ec.7 pertenece a la configuración *observada* (o euleriana) por lo que hay que transformar al vector  $\mathbf{t}_c$  en el de Piola  $\mathbf{t}_R$  (paralelo al de Cauchy) dado que el sistema Ec.1 está planteado en la configuración de referencia (o lagrangeana). Luego

$$\mathbf{t}_R = \eta \mathbf{t}_c \quad (8)$$

donde  $\eta$  es la relación de áreas espacial-material  $da/da_R$  dada por

$$\eta = J \sqrt{\mathbf{n}_R \cdot \mathbf{C}^{-1} \mathbf{n}_R}$$

donde  $\mathbf{n}_R$  es la normal al cuerpo en la configuración de referencia, y se calcula sobre el borde del cuerpo en esa misma configuración (es decir en el círculo  $\Gamma_C$ ).

### 3 RESULTADOS

El sistema de ecuaciones de movimiento Ec. 1 y Ec. 2, junto con las condiciones de contorno Ecs. 4, 7 y 8 y las correspondientes condiciones iniciales (velocidad inicial, posición inicial) es aproximado numéricamente por el método de elementos finitos. El problema se trata con dos softwares diferentes, COMSOL Multiphysics y FlexPDE, observándose resultados similares en las simulaciones obtenidas.

La Fig. 2a muestra el mallado de los experimentos numéricos ( $\sim 18000$  elementos triangulares con interpolantes polinómicos cuadráticos). En la región de contacto, los elementos deben ser lo suficientemente pequeños como para poder representar de manera adecuada la deformación cuando se da el contacto con la rugosidad de la superficie rígida, como se observa en la Fig. 2b.

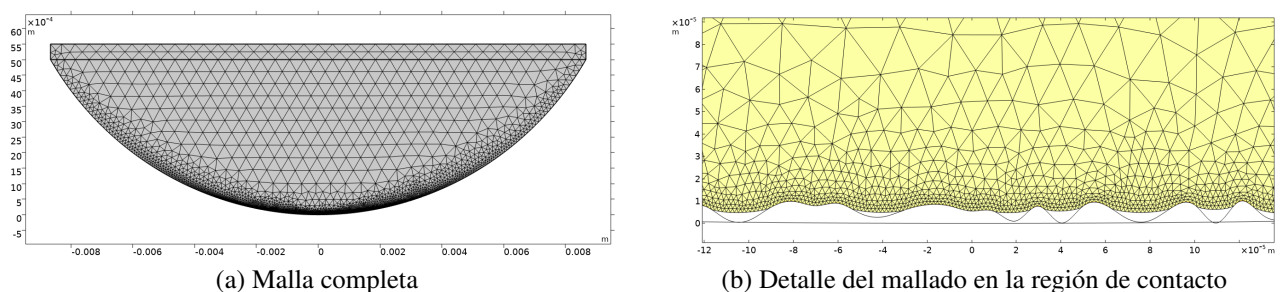


Figure 2: Semicírculo discretizado mediante el MEF

### 3.1 Experimento de control

Para el experimento de control se consideran los siguientes parámetros; casquete semicircular: largo  $L = 2\text{ cm}$ , alto  $L/4 = 0.5\text{ cm}$ ; placa rígida: idéntico largo y alto de  $0.5\text{ mm}$ . Módulo elástico  $E = 0.2\text{ MPa}$  y viscosidad  $\eta = 100\text{ Pa s}$ . La velocidad y presión impuesta en la parte superior de la placa rígida toma valores entre  $1\text{ mm/s}$  y  $40\text{ mm/s}$  y  $40\text{ Pa}$  respectivamente.

La rugosidad del plano rígido se obtiene a partir del análisis de una muestra de madera. Con un microscopio confocal se obtiene el perfil de rugosidad de  $0.2\text{ mm}$  de longitud (ver Fig. 3). Con este perfil se obtienen datos representativos del mismo, como altura máxima ( $R_p = 9.4\text{ }\mu\text{m}$ ), profundidad máxima ( $R_v = 12.92\text{ }\mu\text{m}$ ), y desviación aritmética media ( $R_a = 2.7\text{ }\mu\text{m}$ ), entre otros parámetros de rugosidad. Con estos parámetros es posible reproducir computacionalmente el perfil de rugosidad de características análogas al original, tal como se indico en la sección anterior, pero con formato y extensión apropiadas al modelo numérico. Tal perfil es el que observa en la Fig. 2b.

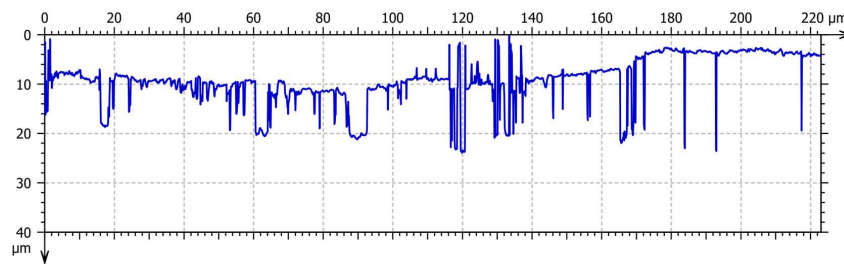


Figure 3: perfil rugosidad muestra de madera

Como es sabido el coeficiente de fricción se define por el cociente de la fuerza tangencial y normal que experimenta el cuerpo al deslizar con la superficie rugosa y rígida, luego:

$$\mu_F = \frac{\int t_T ds}{\int t_N ds}$$

donde  $t_T$  es la componente tangencial del vector tracción  $t_R$  y las integrales de superficie sobre la región de contacto de cada componente del vector de tracción componen la fuerza total.

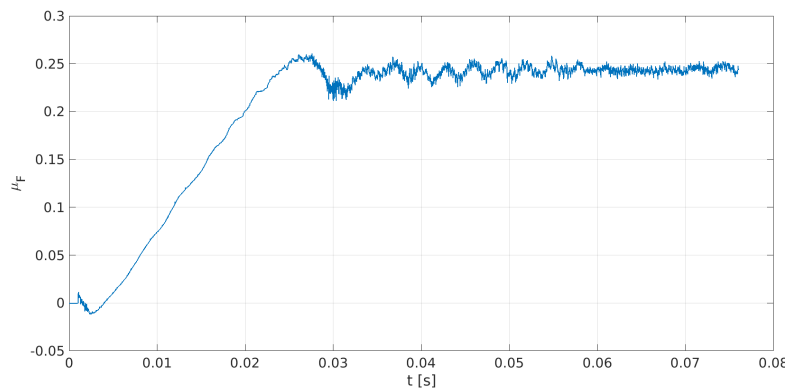


Figure 4: Evolución del coeficiente de fricción en el tiempo

La Fig. 4 muestra la evolución del coeficiente de fricción en el tiempo, este ejemplo corresponde a un experimento numérico en que la velocidad impuesta a la placa superior del casquete es

$v = 10 \text{ mm/s}$  y una presión de  $40 \text{ Pa}$ . Se observa un primer incremento en el coeficiente de fricción (típico en los experimentos físicos), para luego continuar hacia un estado cuasi estacionario levemente menor. El primer pico podría identificarse con el coeficiente de fricción estático y el estacionario posterior con el dinámico.

### 3.2 Coeficiente de fricción y velocidad de desplazamiento

Se estudia la variación del coeficiente de fricción para distintas velocidades, que como se mencionó anteriormente varía desde  $v = 1 \text{ mm/s}$  hasta  $v = 120 \text{ mm/s}$ , la Fig. 5 muestra dicha variación, donde el resto de los parámetros permanecen fijos. Se puede apreciar el efecto Stribeck, luego de aumentar el coeficiente de fricción con la velocidad hasta que llega a  $5 \text{ mm/s}$ . A partir de ahí se observa como el  $\mu_F$  comienza a disminuir con una pendiente negativa.

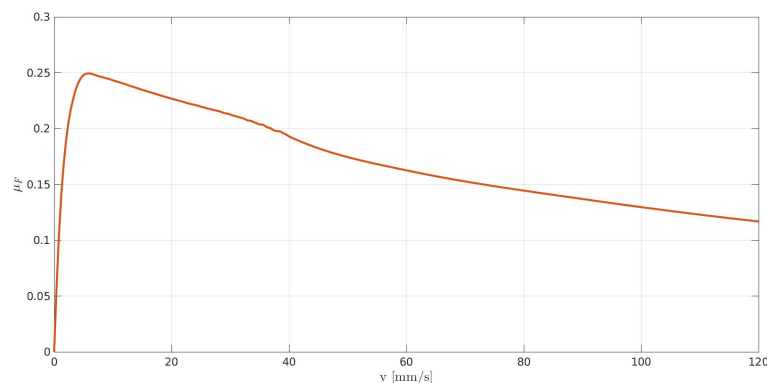


Figure 5: Variación del coeficiente de fricción con la velocidad

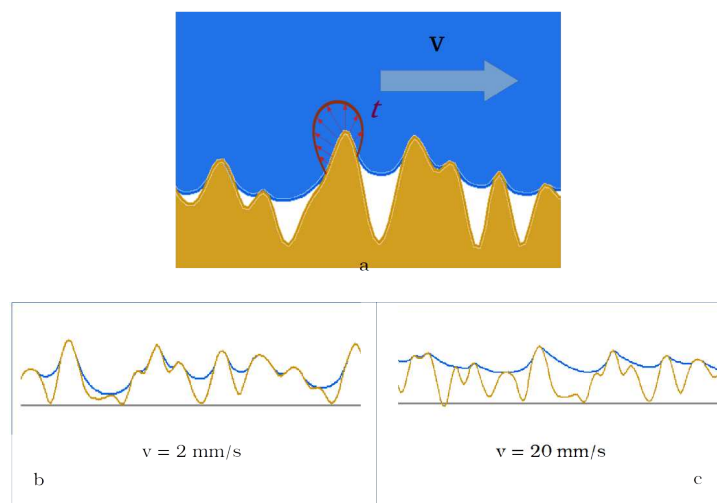


Figure 6: Mecanismo por el cual aparece la fricción de contacto

En la Fig. 6 se puede apreciar el mecanismo que por el cual aparece la fricción de contacto. El esquema de distribuciones de tensiones en la cresta del contacto se muestra en la Fig.6 a), sesgándose hacia la izquierda al desplazarse el cuerpo deformable hacia la derecha, da por resultante una fuerza que es contraria a la dirección del movimiento. Dicha distribución de tensiones cambia de los dos lados de cada cresta haciendo que la energía que absorbe el cuerpo

al tocar el frente de ataque sea siempre menor que en el de escape. El movimiento se propaga al seno del cuerpo y se disipa por el efecto viscoso. En la Fig.6 b), se muestra una instantánea de la simulación en la que la velocidad de deslizamiento es de  $2\text{ mm/s}$ . Aquí puede apreciarse como la superficie de contacto aumenta respecto del caso mostrado en la Fig.6 c) en la que el cuerpo se desliza con velocidad 10 veces mayor (manteniendo el resto de las demás variables inalteradas). Dos mecanismos compiten a la fuerza total de fricción, por un lado las tensiones son mayores en las crestas en el caso c) por el otro, la superficie es mayor en el caso b).

#### 4 CONCLUSIONES

En este trabajo se estudia numéricamente el mecanismo por el cual se origina la fricción entre un cuerpo visco-elástico y un plano rígido rugoso. Esto es, que solo se imponen tensiones de contacto perpendiculares a la superficie y que las fuerzas de fricción aparecen como consecuencia de la interacción con la superficie rugosa. Las ecuaciones constitutivas corresponden a un material del tipo Kelvin-Voigt en términos del segundo tensor de tensiones de Piola. Es decir, un sólido compresible Neo-Hookeano, y un término del tipo fluido Newtoniano que representa la parte viscosa.

Además, se realizan diversos experimentos numéricos en los cuales se varía la velocidad de desplazamiento del cuerpo visco-elástico y se obtiene el coeficiente de fricción para cada caso en el régimen estacionario (coeficiente dinámico de fricción). En esta variación paramétrica se puede observar como dicho coeficiente aumenta con la velocidad hasta alcanzar un máximo para luego descender. El mecanismo de frenado está compuesto por dos efectos que compiten: por un lado la superficie de contacto es mayor a bajas velocidades de deslizamiento, por el otro las tensiones de frenado son mayores en las crestas a altas velocidades pero distribuidas en menores superficies. La tensión de contacto alcanza entonces un máximo a medida que la velocidad incrementa y al mismo tiempo disminuye la superficie de contacto por el efecto viscoso. Esto último provoca una caída en la fuerza total de fricción a grandes velocidades de deslizamiento, es decir: el modelo captura el efecto Stribeck.

Además, en el inicio del movimiento se advierte que el coeficiente de fricción supera al valor en régimen estacionario. Los autores creen que podría tratarse del coeficiente de fricción estático.

Este esquema teórico-numérico implica la posibilidad de predecir los valores de los coeficientes de fricción (tribómetro numérico) como función de diferentes parámetros constitutivos, geométrico-topológicos, y cinemáticos para materiales visco-elásticos.

#### REFERENCES

- Bonet J. y Wood R.D. *Nonlinear continuum mechanics for finite elements analysis*. Cambridge University Press, New York, 2nd edición, 2008.
- Brilliantov N.V. y Poschel T. Rolling friction of a viscous sphere on a hard plane. *Europhysics Letters (EPL)*, 42(5):511–516, 1998. doi:10.1209/epl/i1998-00281-7.
- Carbone G. y Putignano C. Rough viscoelastic sliding contact: Theory and experiments. *Physical Review E*, 89(3):032408, 2014. doi:10.1103/physreve.89.032408.
- Cendra H. y Grillo S. Generalized nonholonomic mechanics, servomechanisms and related brackets. *Journal of Mathematical Physics*, 47(2), 2006. ISSN 00222488. doi:10.1063/1.2165797.
- Gurtin M.E., Fried E., y Anand L. *The mechanics and thermodynamics of continua*. Cambridge University Press, New York, 2010. ISBN 978-0-511-76980-1.



- Persson B.N.J. Theory of rubber friction and contact mechanics. *The Journal of Chemical Physics*, 115(8):3840–3861, 2001. doi:10.1063/1.1388626.
- Pöschel T., Schwager T., y Brilliantov N.V. Rolling friction of a hard cylinder on a viscous plane. *European Physical Journal B*, 10(1):169–174, 1999. ISSN 14346028. doi:10.1007/s100510050840.
- Putignano C., Afferrante L., Carbone G., y Demelio G. A new efficient numerical method for contact mechanics of rough surfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 49(2):338–343, 2012.
- Scaraggi M. y Persson B.N.J. Friction and universal contact area law for randomly rough viscoelastic contacts. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 27(10):105102, 2015. doi:10.1088/0953-8984/27/10/105102.
- Zheng Q.J., Zhu H.P., y Yu A.B. Finite element analysis of the rolling friction of a viscous particle on a rigid plane. *Powder Technology*, 207(1-3):401–406, 2011. doi:10.1016/j.powtec.2010.11.026.