Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXV, pp. 2817-2825
Alberto Cardona, Norberto Nigro, Victorio Sonzogni, Mario Storti. (Eds.)
Santa Fe, Argentina, Noviembre 2006

UNA IMPLEMENTACIÓN DE LA DERIVADA TOPOLÓGICA PARA LA OPTIMIZACIÓN DE PROBLEMAS DE POTENCIAL EN 2D UTILIZANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Adrián P. Cisilino

División Soldadura y Fractomecánica, INTEMA. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata – CONICET. Av. Juan B. Justo 4302, (7600) Mar del Plata, Argentina, cisilino@fi.mdp.edu.ar

Palabras clave: optimización topológica, derivada topológica, elementos de contorno, problemas de potencial.

Resumen. La Derivada Topológica (DT) es una función que caracteriza la sensibilidad de la solución de un problema ante la creación de un hueco o cavidad en su dominio. La DT es una poderosa herramienta de optimización con aplicaciones en muchos campos de la ingeniería.

Se presenta en este trabajo una aplicación de la Derivada Topológica para la optimización de problemas de potencial en dos dimensiones utilizando el Método de los Elementos de Contorno (MEC). La implementación está basada en resultados recientes reportados por Novotny et al. (2003) que permiten calcular la DT a partir de resultados de potencial y flujo. El algoritmo es implementado utilizando una formulación directa del MEC. Los modelos son discretizados utilizando elementos lineales y una distribución periódica de puntos internos. La evaluación de la DT en los puntos internos y los nodos en el contorno se realiza en la etapa de postproceso de la solución. A continuación se eliminan del modelo los puntos internos y/o nodos del contorno con los valores extremos (máximos o mínimos dependiendo del problema) de DT. De esta forma se remueve una pequeña fracción material en cada paso de optimización. La nueva geometría se discretiza utilizando un algoritmo de Delaunay con la capacidad de detectar huecos en las posiciones donde fueron eliminados los puntos internos y nodos del contorno. El proceso se repite hasta satisfacer un dado criterio de parada.

El algoritmo implementado ha probado ser flexible y robusto. Su desempeño se ilustra mediante dos ejemplos y sus resultados son comparados con los disponibles en la literatura.

1 INTRODUCCIÓN

Un problema clásico de la ingeniería consiste en determinar la configuración geométrica óptima de un cuerpo que minimice o maximice una cierta función de costo al tiempo que satisface las restricciones o condiciones de contorno del problema. La solución de este problema puede ser planteada utilizando dos estrategias: como un problema de optimización de forma o de optimización de la topología.

La optimización de forma consiste en modificar la geometría del dominio preservando su topología, es decir sin crear huecos o cavidades en su interior. Este tipo de análisis es usualmente conocido como Análisis de Sensibilidad al Cambio de Forma y sus bases matemáticas se encuentran bien establecidas (Sokolowski et al, 2002; Pironneau, 1984). La principal inconveniente del Análisis de Sensibilidad al Cambio de Forma es que sólo permite cambios en la frontera del dominio, lo que limita su campo de aplicación.

Una manera más general de controlar un dominio es mediante modificaciones de su topología, lo que permite obtener la configuración deseada partiendo de una morfología inicial distante de la óptima. Los métodos de homogenización son posiblemente los más utilizados para la optimización topológica (Benzoe et al., 1988). Los métodos de homogenización consisten en caracterizar la topología a través de su densidad, es decir, los huecos se identifican con regiones de densidad nula. De esta forma la solución del programa resulta en una distribución ficticia de material, siendo necesario en muchos casos utilizar métodos de penalización o filtros para obtener un resultado de utilidad ingenieril. (Sigmund et al., 1998)

Un método alternativo de optimización topológica son los basados en Análisis de Sensibilidad Topológica o Derivada Topológica (Feijoó et al., 2003). Esta familia de métodos apunta a resolver las limitaciones de los métodos basados en técnicas homogenización, y su idea principal es la evaluación de la sensibilidad de una dada función de costo ante la creación de una cavidad o hueco.

Se presenta en este trabajo una aplicación de la DT para la optimización de problemas de potencial en dos dimensiones utilizando el Método de los Elementos de Contorno (MEC). La formulación del problema está basada en resultados recientes reportados por Novotny et al (2003) que permiten calcular la DT a partir de resultados de potencial y flujo. El algoritmo es implementado utilizando una formulación directa del MEC. Dado que el MEC prescinde de la discretización del dominio del problema, se evitan los inconvenientes relacionados con variaciones en la densidad del material y los problemas numéricos asociados.

2 LA DERIVADA TOPOLOGICA PARA PROBLEMAS DE POTENCIAL

El concepto original de la DT está relacionado con la sensibilidad de una dada función costo $\psi(\Omega)$ cuando la topología del dominio Ω es alterado (Ceá et al., 2003). El caso más simple consiste en crear un hueco de radio ε en el dominio del problema. Sin embargo este concepto es difícil de trabajar y evaluar porque no es posible establecer un isomorfismo entre los dos dominios con distintas topologías (con y sin hueco).

Feijóo et al (2003) resolvieron la dificultad anterior al modificar la definición de la DT utilizando la idea de que la creación de un hueco puede ser pensada como la perturbación de un hueco preexistente cuyo radio ε tiende a cero (ver Figura 1). De esta forma ambas topologías son similares y es posible establecer un mapeo entre ellas. De acuerdo a la nueva definición la expresión de la DT resulta (Feijóo et al., 2003; Novotny et al., 2003):

$$D_T\left(x\right)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\varepsilon\to 0}}\frac{\psi\left(\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon}\right)-\psi\left(\Omega_{\varepsilon}\right)}{f\left(\varepsilon+\delta\varepsilon\right)-f\left(\varepsilon\right)} \quad (1)$$

donde δε es una pequeña perturbación del radio del agujero y *f* una función regularizadora negativa, tal que *f*(ε)→0 cuando ε→0. La ventaja de la expresión (1) es que todas las herramientas matemáticas desarrolladas para el Análisis de Sensibilidad al Cambio de Forma pueden ser utilizadas para el cálculo de la DT.

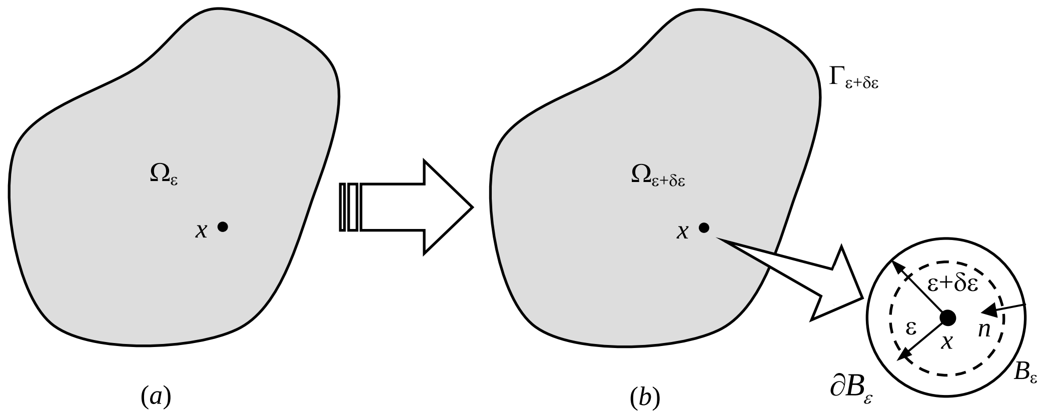

Figura 1: Versión modificada de la DT: (a) Dominio original, (b) Dominio perturbado.

El interés de este trabajo es la solución de problemas de potencial estacionarios. El problema consiste entonces en resolver la ecuación de Poisson $-k\nabla u_\varepsilon^2=b$ en el dominio Ω_ε sujeta a condiciones de contorno de Dirichlet $u_\varepsilon=\overline{u}$ sobre la porción Γ_D de la frontera, condiciones de Newman $k\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}=\overline{q}$ sobre Γ_N y condiciones de Robin $k\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}=h_c\left(u_\varepsilon-u_\infty\right)$ sobre Γ_R. Por su parte la condición de contorno en los huecos ∂B_ε está dada en forma general por

$$h(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha\left(u_\varepsilon-\overline{u}^\varepsilon\right)+\beta\left(k\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}-\overline{q}^\varepsilon\right)+\gamma\left(k\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}+h_c^\varepsilon\left(u_\varepsilon-u_\infty^\varepsilon\right)\right). \quad (2)$$

Es así que cuando $\alpha=1$, $\beta=0$ y $\gamma=0$ se especifica sobre los huecos ∂B_ε una condición de contorno de tipo Dirichlet con la temperatura prescripta $\overline{u}^\varepsilon$, cuando $\alpha=0$, $\beta=1$ y $\gamma=0$ se tiene una condición de Newman con el flujo $\overline{q}^\varepsilon$ prescripto sobre ∂B_ε y cuando $\alpha=0$, $\beta=0$ y $\gamma=1$ la condición de contorno sobre ∂B_ε es del tipo Robin con temperatura u_∞^ε y coeficiente de convección h_∞^ε.

Por su parte se adopta como función costo la Energía Potencial Total:

$$\psi\left(\Omega_\varepsilon\right)=\frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} k\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon\, d\Omega_\varepsilon+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_R} h_c u_\varepsilon^2 d\Gamma+\frac{1}{2}\gamma\int_{\partial B_\varepsilon} h_c^\varepsilon u_\varepsilon^2 d\partial B_\varepsilon$$
$$-\int_{\Omega_\varepsilon} bu_\varepsilon\, d\Omega_\varepsilon+\int_{\Gamma_N}\bar{q}u_\varepsilon d\Gamma-\int_{\Gamma_R} h_c u_\infty u_\varepsilon d\Gamma+\beta\int_{\partial B_\varepsilon}\bar{q}^\varepsilon u_\varepsilon d\partial B_\varepsilon-\gamma\int_{\partial B_\varepsilon} h_c^\varepsilon u_\infty^\varepsilon u_\varepsilon d\partial B_\varepsilon \quad (3)$$

La evaluación de la DT para la función de costo en (3) fue realizada por Novotny et al (2003), obteniendo los siguientes resultados para las distintas condiciones de contorno en los huecos:

Condición de contorno	DT
Newman con $\bar{q}_\varepsilon=0$	$k\nabla u\cdot\nabla u-bu$
Newman con $\bar{q}_\varepsilon\neq 0$	$-\bar{q}^\varepsilon u$
Robin	$-\frac{1}{2}h_c^\varepsilon u\left(u-2u_\infty^\varepsilon\right)$
Dirichlet	$-\frac{1}{2}k\left(u-\bar{u}^\varepsilon\right)$

Tabla 1: DT para el problemas de potencial en dominios bidimensionales para las distintas condiciones de contorno en los huecos y considerando la Energía Potencial Total como función de costo.

3 IMPLEMENTACIÓN CON ELEMENTOS DE CONTORNO

El algoritmo de optimización topológica propuesto en este trabajo se resume en los siguientes pasos:

i. Se resuelve el problema (Figura 2a) utilizando un modelo de MEC para el dominio original y los resultados de DT de la Tabla 1 se evalúan en los nodos del contorno y los puntos internos. Estos últimos se disponen utilizando un arreglo regular sobre el dominio del problema (ver Figura 2b)
ii. Se seleccionan los puntos (nodos y puntos internos) con los valores extremos de DT y se los elimina del modelo (ver Figura 2c).
iii. Se genera un nuevo modelo utilizando los nodos y puntos internos (ver Figura 2d).
iv. Se resuelve el nuevo modelo, se verifica el criterio de parada y de ser necesario se vuelve al paso I.

La generación del nuevo modelo a partir de los nodos y puntos internos del paso III se realiza utilizando un algoritmo de "α-shapes" (Calvo et al., 2003). Este algoritmo puede ser visto como una triangulación de Delaunay ponderada por el parámetro α. La variación del parámetro α permite fijar el grado de detalle de la geometría resultante. La geometría con menor grado de detalle es el "convex hull", que se obtiene para valores elevados de α. A medida que el valor de α decrece el grado de detalle de la geometría se incrementa, pudiéndose distinguir huecos e irregularidades en el contorno. En este trabajo el valor de α fue seleccionado como la distancia promedio entre los puntos internos y los nodos en el contorno. Es por esto importante para el buen desempeño del algoritmo que los puntos internos se dispongan utilizando un arreglo regular.

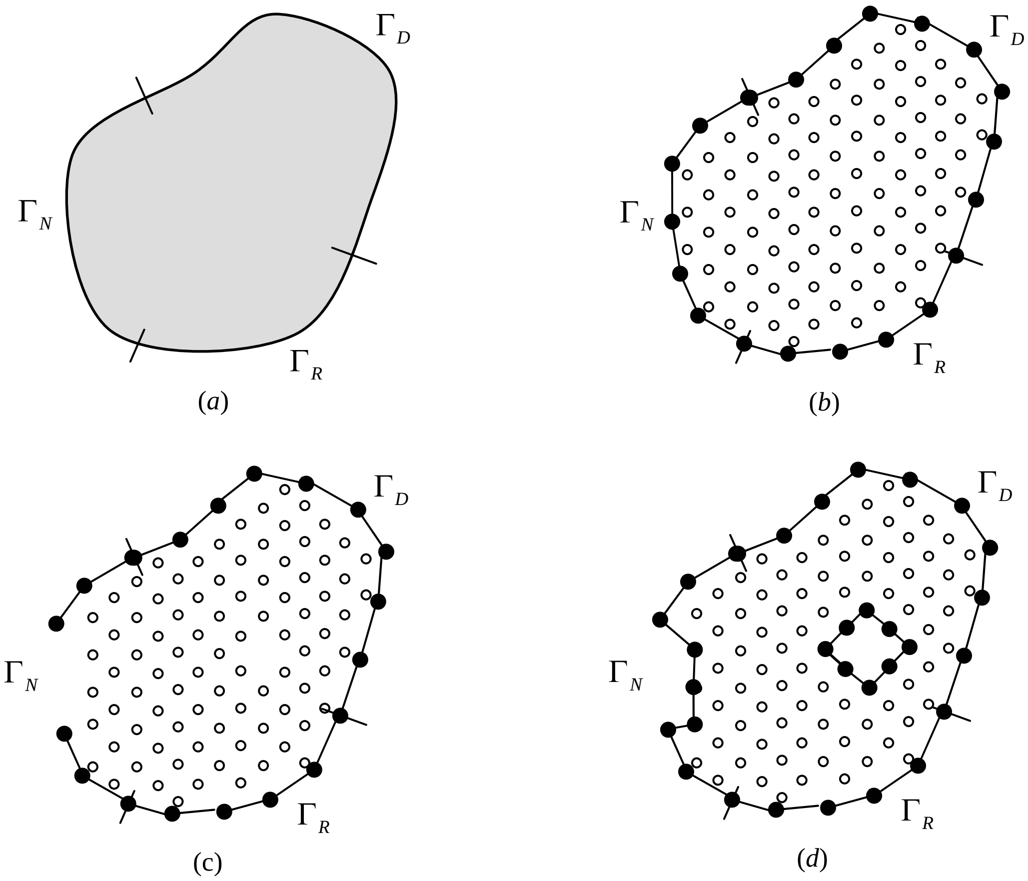

Figura 2: Implementación de la DT: (a) Dominio y condiciones de contorno, (b) Modelo MEC, (c) Eliminación de nodos y puntos internos con los menores valores de DT, (d) Generación de la nueva geometría.

4 EJEMPLOS

4.1 Conductor de calor no-simétrico

El primer ejemplo considerado consiste en un dominio cuadrado de 10 m de lado y con condiciones de contorno como se ilustran en la Figura 3a. El problema no posee fuentes de calor internas. El modelo fue discretizado utilizando 160 elementos lineales en el contorno y aproximadamente 1600 puntos internos. El objetivo de la optimización es crear huecos con condiciones de contorno tipo Newman con flujo nulo en la zona donde la función de costo resulte menos sensible (la DT corresponde al primer caso de la Tabla 1). De acuerdo a valores propuestos en la bibliografía, se eliminó el 0,5% de la masa inicial del problema en cada iteración (8 puntos o nodos por iteración) hasta remover el 20% de la masa total (40 iteraciones). La evaluación de la geometría durante la optimización se ilustra en la Figura 3.

La geometría final coincide con la reportada por Novotny et al (2003).

4.2 Intercambiador de calor

Se resuelve en este ejemplo el diseño de un intercambiador de calor. El problema se ilustra en la Figura 4. Este consiste en una pared con una superficie superior de enfriamiento y un flujo de calor periódico prescripto en la superficie inferior. El proceso de optimización consiste en crear huecos (canales de enfriamiento) en la porción central de la pared. Los canales de enfriamiento tienen una condición de contorno del tipo Robin con u = 25ºC y h = 200 W/(m^2 ºC) y son creados en las posiciones donde la función de costo es más sensible. El objetivo es disminuir la temperatura máxima en la pared.

El modelo de MEC fue construido aprovechando las condiciones de simetría del problema. Se utilizaron en la discretización del problema 200 elementos linearles y 1600 puntos internos. La optimización se realizó en 7 iteraciones eliminando 2 puntos en cada una. La evolución de la geometría y la solución del campo de temperaturas se ilustran en la Figura 5. La Figura 6 ilustra la evolución de la temperatura máxima. La respuesta del modelo de MEC es idéntica a la reportada por Novotny et al (2003).

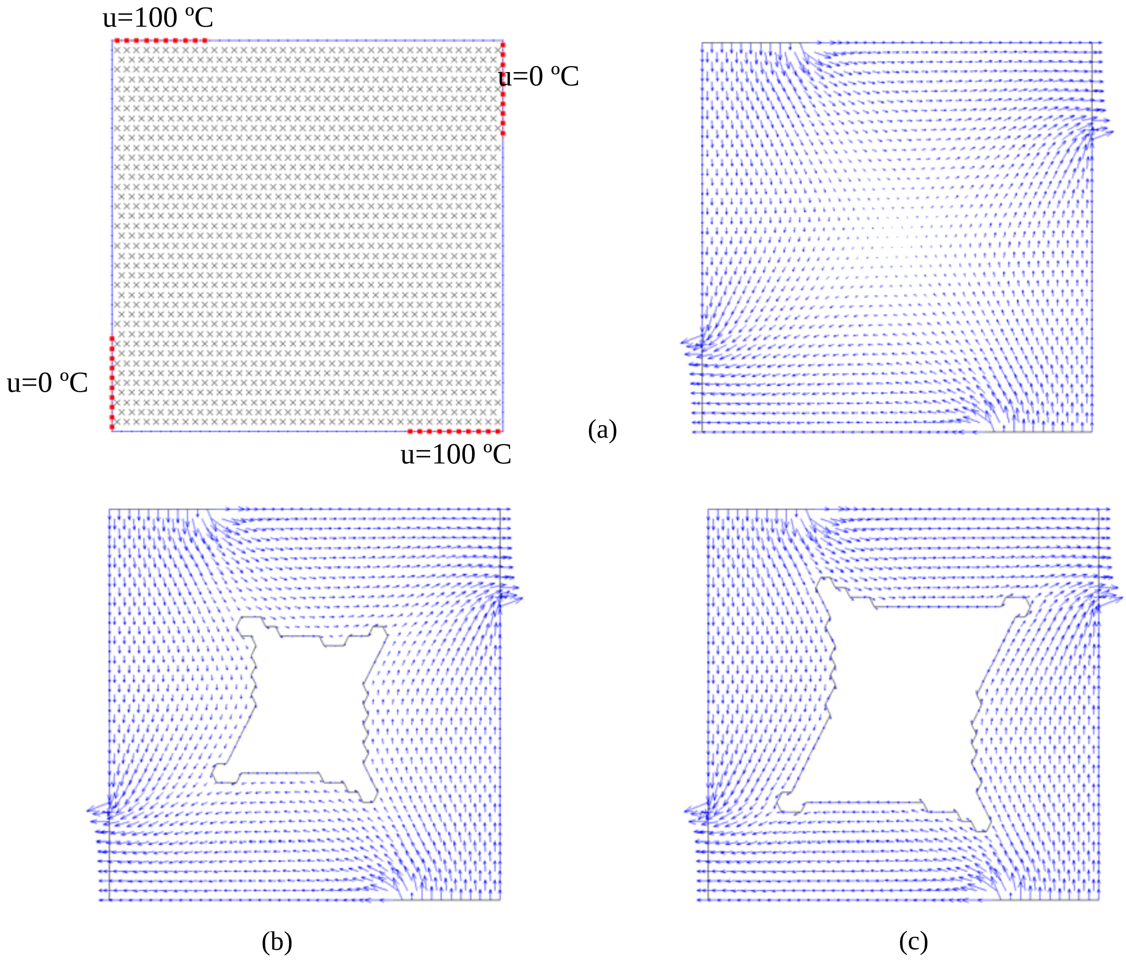

Figura 3: Conductor de calor: (a) geometría y solución de flujo inicial, (b) solución de flujo en la iteración 20, (c) solución de flujo final (iteración 40)

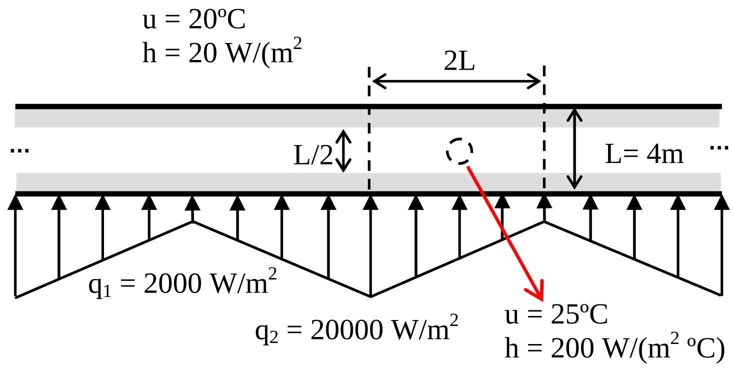

Figura 4: Geometría y condiciones de contorno del intercambiador de calor.

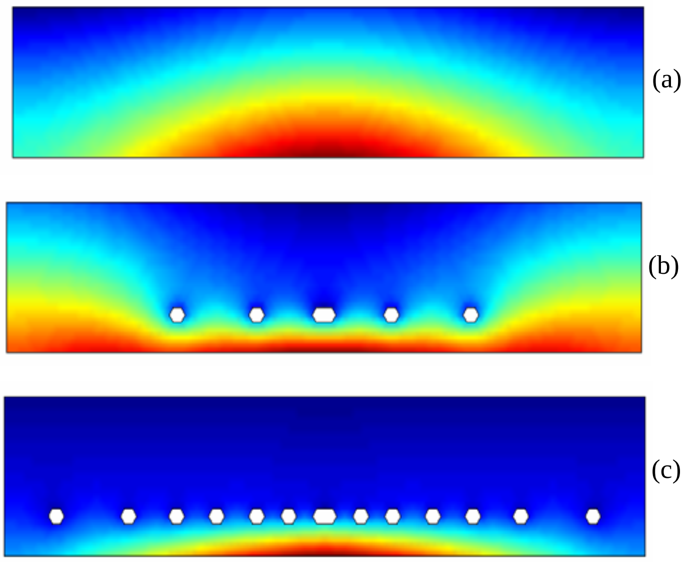

Figura 5: Intercambiador de calor: (a) geometría y solución de temperatura inicial, (b) geometría y solución de temperatura en el paso 3, (c) geometría y solución de temperatura en el paso 7

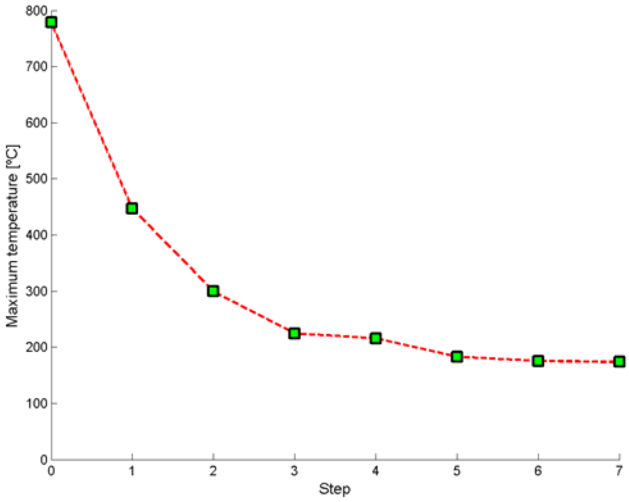

Figura 6: Evolución de la temperatura máxima en el intercambiador.

5 CONCLUSIONES

Se presentó en este trabajo una implementación de la Derivada Topológica para la optimización de problemas de potencial en dos dimensiones utilizando el Método de los Elementos de Contorno. El algoritmo implementado ha probado ser flexible y robusto, con capacidad de resolver de forma eficiente un número de problemas reportados en la bibliografía.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea agradecer al Dr. N.Calvo (CIMEC, Argentina) por el programa MeshSuite utilizado para la discretización de los modelos. Este trabajo ha sido financiado por el proyecto PICT 12-12528 de la Agencia de Promoción Científica de la República Argentina.

REFERENCIAS

Bensoe, M.P. y Kikuchi N.Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 71, 197-224, 1988.
Calvo, N., Idelsohn S., Oñate, E. The Extended Delaunay Tessellation. Engineering Computations, 20/5-6, 2003.
Ceá J., Garreau S., Guillaume P. y Masmoudi M. The shape and topological optimization conection. Comput. Methods Appl. Engrg., 188, 713-726, 2000.
Feijoó R., Novotny A., Taroco E., y Padra C. The topological derivative of the Poisson´s problem. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 13, 1825-1844, 2003.
Novotny A., Feijoó R., Taroco E., y Padra C. Topological-shape sensitivity analysis. *Comput. Methods Appl. Mech . Engrg*, 192, 803-829, 2003.
Pironneau O. *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*. Springer Verlag, 1984
Sigmund O. y Peterson J. Numerical Inestabilities in Topology Optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh dependencies and local minima. Structural

Optimization, 16, 68-75, 1998.
Sokolowski J. y Solésio J.P. *Introduction to Shape Optimization – Shape Sensitivity Analysis*. Springer Verlag, 2002