

SIMULACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS ESFÉRICOS SUJETOS A EFECTOS DE FRICCIÓN POR DESPLAZAMIENTO, RODADURA Y ROTACIÓN CON COLISIONES DE MÚLTIPLE IMPACTO

SIMULATION OF SPHERICAL RIGID BODIES SUBJECT TO SLIDING, ROLLING AND SPINNING FRICTION EFFECTS WITH MULTIPLE IMPACT COLLISIONS

Eliana Sanchez^a, Alberto Cardona^a, Alejandro Cosimo^b y Federico J. Cavaleri^a

^aCIMEC-CONICET-UNL, Colectora Ruta Nac 168 s/n - Paraje El Pozo, 3000 Santa Fe, Argentina
(esanchez,acardona,fcavaleri@cimec.unl.edu.ar <https://cimec.conicet.gov.ar>)

^bSiemens Industry Software NV, Rue des Chasseurs Ardennais 8, 4031 Liège, Belgium.

Palabras clave: Contacto dinámico no suave, fricción por deslizamiento, fricción por rotación, fricción por rodadura, colisiones de impacto múltiple.

Resumen. Este trabajo presenta el movimiento de cuerpos rígidos esféricos en contacto con una superficie plana rígida y sujeto a colisiones de impacto múltiple. Para el contacto entre las esferas y el plano se tuvieron en cuenta los efectos de fricción por deslizamiento, por rodadura y por rotación a través de las leyes de Coulomb y de Contensou, en tanto que, para el contacto entre esferas únicamente se consideró el efecto de fricción por deslizamiento. Las ecuaciones de movimiento se integraron utilizando el esquema de integración temporal α generalizado no suave donde la regularización de la solución del problema de contacto se abordó con una formulación dual mixta basada en un método del tipo Langrangiano aumentado. Luego, para la descripción de la dinámica de las esferas se utilizó un modelo de cuerpo rígido con grados de libertad de traslación y de rotación. Finalmente, para evaluar la robustez y la eficiencia numérica de la metodología propuesta, se presentaron dos ejemplos numéricos.

Keywords: nonsmooth contact dynamics, sliding friction, spinning friction, rolling friction, multiple impact collisions.

Abstract.

In this work, the movement of spherical rigid bodies in contact with a rigid plane surface and subject to multiple impact collisions is presented. For the contact between the spheres and the plane, sliding, rolling and spinning friction were taken into account by means of Coulomb's and Contensou's laws, while only the sliding friction was considered for the contact between spheres. The equations of motion were integrated using the nonsmooth generalized- α time integration scheme where the regularization of the solution of the contact problem was approached with a mixed dual formulation based on an augmented Langrangian type method. Then, for the description of the dynamics of the spheres, a rigid body model with translational and rotational degrees of freedom was used. Finally, in order to evaluate the robustness and numerical efficiency of the proposed methodology, two numerical examples were presented.

1. INTRODUCCIÓN

Muchos mecanismos compuestos por cajas de engranajes, rodamientos, brazos robóticos, entre otros, están sometidos a cargas de múltiples impactos con efectos de fricción, como consecuencia del diseño propio del mecanismo, de los efectos de desgaste o de las tolerancias de ensamblado. Su estudio mediante métodos analíticos o numéricos es complejo debido a la dificultad en la representación de vibraciones de alta frecuencia originadas por los cambios bruscos en la velocidad durante los impactos. Por lo tanto, el conocimiento y comprensión de la dinámica del sistema en la etapa de diseño o en la de verificación, contribuye a mejorar el diseño final disminuyendo costos y tiempos de ensayo de modelos prototipo.

Los problemas de contacto que consideran efectos de fricción producen una complicación adicional al modelo, debido a la necesidad de introducir una ley de fricción, como por ejemplo la ley de [Coulomb \(1821\)](#). Por otro lado, en problemas de impacto la complejidad es aún mayor, pues en las formulaciones que se propongan se tiene que tener en cuenta la determinación simultánea de las velocidades, de las fuerzas y de los impulsos con las restricciones que se desarrollan en el sistema ([Glocker y Pfeiffer, 1995](#)).

Generalmente, existen dos formas de resolver los problemas de impacto, una es mediante la formulación de ecuaciones a nivel de fuerza, por ejemplo, mediante métodos de integración de paso de tiempo escalable/variable donde se supone constante el desplazamiento durante el impacto. Y un segundo enfoque que consiste en la integración de las ecuaciones de movimiento formuladas a nivel de impulsos ([Glocker y Pfeiffer, 1995](#)).

En términos globales, cuando un sistema multicuerpo se encuentra sujeto a impactos se pueden producir (i) **impactos simples**: cuando los cuerpos están en contacto en un solo punto y en éste se produce el impacto e (ii) **impactos múltiples**: cuando en un sistema hay varios puntos en contacto y el impacto se produce simultáneamente en algunos de ellos ([Nguyen y Brogliato, 2013](#)).

En la dinámica de contacto no suave, las colisiones de impacto simple se modelan mediante leyes clásicas, como son las de Newton o las de Poisson ([Moreau, 1994](#)). La adopción de estas leyes para el modelado de colisiones con múltiples impactos es una opción natural y conveniente por su simplicidad. Por lo tanto, existen diferentes estrategias para modelar sistemas multicuerpos sujetos a múltiples impactos utilizando extensiones de las formulaciones desarrolladas para casos de impactos simples. En forma general se tienen los siguientes modelos.

- **Algebraicos.** Relacionan las velocidades anteriores y posteriores al impacto de forma implícita o explícita a través de una ley específica ([Smith, 2007](#); [Brogliato, 1999](#); [Moreau, 1994](#); [Han y Gilmore, 1993](#); [Caselli y Frémond, 2009](#)).
- **Dinámicos de primer orden.** Siguen el enfoque de [Darboux \(1880\)](#)-[Keller \(1986\)](#). Suponen constantes las posiciones y utiliza el impulso como una nueva escala de tiempo ([Laplace, 1799](#); [Hurmuzlu y Ceanga, 2000](#); [Liu et al., 2008](#)).
- **Dinámicos de segundo orden.** Proponen formulaciones con flexibilidad concentrada a través de elementos lineales o no lineales del tipo resorte-amortiguador ([Yigit et al., 1990](#)). También se encuentran los basados en el método de los elementos discretos (DEM) ([Gismeros Moreno et al., 2022](#)), o en el método de los elementos finitos (MEF) ([Liu et al., 2007](#)).

En este trabajo se presenta una nueva metodología para la simulación de múltiples impactos simultáneos de cuerpos rígidos esféricos con fricción, en el marco de la dinámica de contacto

no suave a partir de los elementos de contacto esfera-plano y esfera-esfera presentados por Cavalieri et al. (2021). Para la regularización del problema variacional de contacto se utiliza un enfoque dual mixto basado en un Lagrangiano aumentado propuesto por Alart y Curnier (1991) para problemas cuasi-estáticos y aplicado por Galvez et al. (2020) a problemas dinámicos. Luego, para la descripción cinemática de los cuerpos se sigue la metodología de elementos finitos propuesta por G eradin y Cardona (2001). Finalmente, las ecuaciones de movimiento se integran utilizando un esquema de integraci3n temporal α generalizado no suave Cosimo et al. (2020).

2. PROBLEMA DE CONTACTO CON FRICCI3N

En esta secci3n, se presenta la formulaci3n de contacto entre un cuerpo rígido esférico de radio R y peso mg con una superficie plana horizontal teniendo en cuenta tres efectos: (i) fricci3n por deslizamiento, (ii) fricci3n por rodadura y (iii) fricci3n por rotaci3n normal o de Coulomb-Contensou (1963), ver Fig.1. El efecto (i) se modela con la ley de fricci3n de Coulomb (1821),

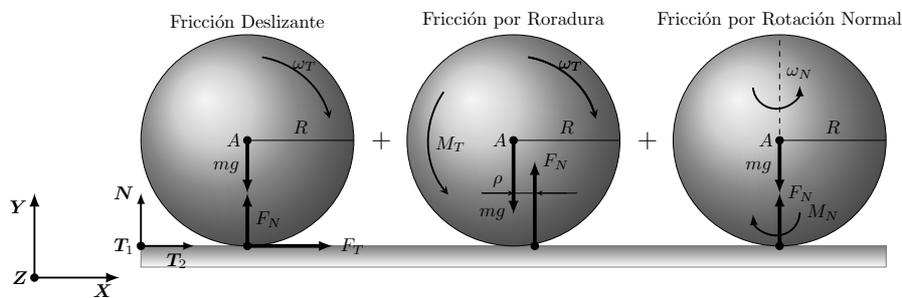


Figura 1: Configuraci3n esquemática de los casos de fricci3n.

donde la reacci3n de contacto F_N junto con el coeficiente de fricci3n μ genera una fuerza resistente al deslizamiento F_T en las direcciones tangenciales T_1 y T_2 . En el efecto (ii), debido a la distribuci3n de presiones de contacto no simétricas por consecuencia de la deformaci3n de las superficies contactoras, la reacci3n de contacto F_N se desplaza una distancia ρ del centro de masa, lo que genera un momento de rotaci3n tangencial M_T antag3nico. Finalmente, el efecto (iii) es análogo al caso (ii), con la diferencia que el momento antag3nico que se opone a la rotaci3n del cuerpo, M_N , se produce solamente en la direcci3n normal al plano de contacto.

La soluci3n general al problema del contacto con fricci3n unilateral por deslizamiento a nivel posici3n está dada por,

$$(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu}) = \operatorname{arginf} [\Pi^{\text{int,ext}}(\mathbf{U}) + \Pi^c(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu})] \tag{1a}$$

$$g_N \geq 0, \quad \nu_N \geq 0, \quad g_N \nu_N = 0; \tag{1b}$$

$$\|\mathbf{g}_T\| \geq 0, \quad \|\boldsymbol{\nu}_T\| \leq \mu \nu_N, \quad \|\mathbf{g}_T\| (\|\boldsymbol{\nu}_T\| - \mu \nu_N) = 0; \quad \mathbf{g}_T = -\|\mathbf{g}_T\| \frac{\boldsymbol{\nu}_T}{\|\boldsymbol{\nu}_T\|} \tag{1c}$$

donde \mathbf{U} es el vector de desplazamiento global, Π^c es el potencial de contacto y $\Pi^{\text{int,ext}}$ representa la energía potencial de las cargas externas e internas. Luego, g_N es el huelgo normal y \mathbf{g}_T es el desplazamiento relativo tangencial. Por otro lado, ν_N y $\boldsymbol{\nu}_T$ son los multiplicadores de Lagrange a nivel de posici3n en las direcciones normal y tangencial, respectivamente, y $\boldsymbol{\nu} = [\nu_N \ \boldsymbol{\nu}_T^T]^T$ (Galvez et al., 2020). En forma similar a la Ec.(1), la soluci3n general al problema del contacto con fricci3n unilateral por deslizamiento a nivel de velocidad está dada por,

$$(\mathbf{W}, \boldsymbol{\Lambda}) = \operatorname{arginf} [\Pi^{\text{int,ext}}(\mathbf{W}) + \Pi^c(\mathbf{W}, \boldsymbol{\Lambda})] \quad (2a)$$

$$\dot{g}_N \geq 0, \quad \Lambda_N \geq 0, \quad \Lambda_N \dot{g}_N = 0; \quad (2b)$$

$$\|\dot{\mathbf{g}}_T\| \geq 0, \quad \|\boldsymbol{\Lambda}_T\| \leq \mu \Lambda_N, \quad \|\dot{\mathbf{g}}_T\|(\|\boldsymbol{\Lambda}_T\| - \mu \Lambda_N) = 0 \quad \dot{\mathbf{g}}_T = -\|\dot{\mathbf{g}}_T\| \frac{\boldsymbol{\Lambda}_T}{\|\boldsymbol{\Lambda}_T\|} \quad (2c)$$

donde \mathbf{W} es el vector de velocidad global, Λ_N y $\boldsymbol{\Lambda}_T$ son los multiplicadores de Lagrange a nivel de velocidad en las direcciones normal y tangencial, respectivamente, y $\boldsymbol{\Lambda} = [\Lambda_N \ \boldsymbol{\Lambda}_T^T]^T$. Luego, la ley de impacto de Newton en la dirección normal y tangencial es, respectivamente,

$$\dot{g}_{N_{n+1}} = g_{N_{q,n+1}} \mathbf{v}_{n+1} + e_N g_{N_{q,n}} \mathbf{v}_n \quad \dot{\mathbf{g}}_{T_{n+1}} = \mathbf{g}_{T_{q,n+1}} \mathbf{v}_{n+1} + e_T \mathbf{g}_{T_{q,n}} \mathbf{v}_n \quad (3)$$

donde e_N y e_T son los coeficientes de restitución de normal y tangencial, respectivamente.

Las ecuaciones que representan la resistencia de fricción por rodadura o por fricción normal son análogas a las Ecs.(1,2). Sin embargo, en este trabajo, éstas serán expresadas sólo a nivel de velocidad para simplificar la implementación numérica. Entonces, las ecuaciones de desigualdad para la condición de contacto con fricción de rodadura son,

$$\|\boldsymbol{\chi}_T\| \geq 0 \quad \|\boldsymbol{\chi}_T\| \leq \rho \Lambda_N \quad \|\boldsymbol{\omega}_T\|(\|\boldsymbol{\chi}_T\| - \rho \Lambda_N) = 0 \quad \boldsymbol{\omega}_T = -\frac{\|\boldsymbol{\omega}_T\| \boldsymbol{\chi}_T}{\|\boldsymbol{\chi}_T\|} \quad (4)$$

donde $\boldsymbol{\chi}_T = \chi_1 \mathbf{T}_1 + \chi_2 \mathbf{T}_2$ es el momento tangencial impulsivo antagónico, $\boldsymbol{\omega}_T = \omega_1 \mathbf{T}_1 + \omega_2 \mathbf{T}_2$ es la componente tangencial de la velocidad angular y ρ es el coeficiente de rodadura con unidades de longitud. De forma similar al caso anterior, la componente normal de $\boldsymbol{\chi}$ produce una resistencia de rotación. Nuevamente, las restricciones se expresan como ecuaciones de desigualdad a nivel de velocidad pero teniendo en cuenta únicamente la dirección normal dada por el vector \mathbf{N} , por lo tanto,

$$|\chi_N| \geq 0 \quad |\chi_N| \leq \gamma \Lambda_N \quad |\omega_N|(|\chi_N| - \gamma \Lambda_N) = 0 \quad \omega_N = -\frac{|\omega_N| \chi_N}{|\chi_N|} \quad (5)$$

donde $\chi_N = \chi_3 \mathbf{N}$ es el momento normal impulsivo antagónico, $\omega_N = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N}$ es la componente normal de la velocidad angular y γ es un parámetro equivalente a ρ .

El problema de minimización no lineal con restricciones de la Ec. (1) se regulariza por medio de un Lagrangiano aumentado como el que presenta Alart y Curnier (1991), esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S^p(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}) = & -k_p g_{N,n+1} \nu_{N,n+1} + \frac{p_p}{2} (g_{N,n+1})^2 - \frac{1}{2p_p} \operatorname{dist}^2 [\xi_{N,n+1}, \mathbb{R}^+] \\ & - k_p \mathbf{g}_{T,n+1} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T,n+1} + \frac{p_p}{2} \|\mathbf{g}_{T,n+1}\|^2 - \frac{1}{2p_p} \operatorname{dist}^2 [\boldsymbol{\xi}_{T,n+1}, C_{\xi_N}] \end{aligned} \quad (6)$$

donde \mathbf{q} es el vector de coordenadas generalizadas, $\xi_N = k_p \nu_{N,n+1} - p_p g_{N,n+1}$ es el multiplicador de Lagrange aumentado a nivel posición en la dirección normal mientras que, $\boldsymbol{\xi}_T = k_p \boldsymbol{\nu}_{T,n+1} - p_p \mathbf{g}_{T,n+1}$ es el correspondiente en la dirección tangencial. Luego, p_p es un parámetro de penalización positivo y k_p es un factor de escala para el multiplicador de Lagrange. Los coeficientes p_p y k_p contribuyen a mejorar la tasa global de convergencia sin afectar el resultado final. La función $\operatorname{dist}(z, C)$ representa la distancia entre un punto $z \in \mathbb{R}^n$ y un conjunto convexo C , (Leine y van de Wouw, 2008) y C_{ξ_N} es el cono de Coulomb de fricción extendido a la línea

media $\mathbb{R}^-(\xi_N)$. Luego, el Lagrangiano aumentado a nivel de velocidad que regulariza la Ec.(2) es,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S^v(\mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = & -k_v \dot{g}_{N,n+1} \Lambda_{N,n+1} + \frac{p_v}{2} (\dot{g}_{N,n+1})^2 - \frac{1}{2p_v} \text{dist}^2 [\sigma_{N,n+1}, \mathbb{R}^+] \\ & - k_v \dot{g}_{T,n+1} \cdot \mathbf{A}_{T,n+1} + \frac{p_v}{2} \|\dot{g}_{T,n+1}\|^2 - \frac{1}{2p_v} \text{dist}^2 [\sigma_{T,n+1}, C_{\sigma_N}] \end{aligned} \quad (7)$$

donde $\sigma_N = k_p \Lambda_N - p_v \dot{g}_N$ y $\sigma_T = k_v \mathbf{A}_T - p_v \dot{g}_T$ son los multiplicadores de Lagrange aumentado a nivel de velocidad en la dirección normal y tangencial, respectivamente, C_{σ_N} es una sección de radio $\mu\sigma_N$ del cono de fricción de Coulomb aumentado expresado en términos de variables de velocidad. Los parámetros p_v y k_v son análogos a p_p y k_p , respectivamente (Galvez et al., 2020).

El Lagrangiano aumentado a nivel de velocidad que regulariza la Ec.(4) resulta,

$$\mathcal{L}_{TW}^v(\omega_{T,n+1}, \chi_{T,n+1}) = -k_v \dot{\omega}_{T,n+1} \cdot \chi_{T,n+1} + \frac{p_v}{2} \|\dot{\omega}_{T,n+1}\|^2 - \frac{1}{2p_v} \text{dist}^2 [\eta_{T,n+1}, C_{\chi_T \sigma_N}] \quad (8)$$

donde, $\eta_{T,n+1} = k_v \chi_{T,n+1} - p_v \dot{\omega}_{T,n+1}$, es el multiplicador de Lagrange aumentado, $\dot{\omega}_{T,n+1} = \omega_{T,n+1} + e_R \omega_{T,n}$ es la ley de impacto de Newton para la resistencia por rodadura, e_R el coeficiente de restitución de resistencia por rodadura y $C_{\chi_T \sigma_N}$ es el cono de fricción extendido a la semirrecta $\mathbb{R}^-(\sigma_N)$. Finalmente, el Lagrangiano aumentado a nivel de velocidad que regulariza la Ec.(5) es,

$$\mathcal{L}_{TN}^v(\omega_{N,n+1}, \chi_{N,n+1}) = -k_v \dot{\omega}_{N,n+1} \chi_{N,n+1} + \frac{p_v}{2} \|\dot{\omega}_{N,n+1}\|^2 - \frac{1}{2p_v} \text{dist}^2 [\eta_{N,n+1}, C_{\eta_N \sigma_N}] \quad (9)$$

donde, $\eta_{N,n+1} = k_v \chi_{N,n+1} - p_v \dot{\omega}_{N,n+1}$ es el multiplicador de Lagrange aumentado, $\dot{\omega}_{N,n+1} = \omega_{N,n+1} + e_S \omega_{N,n}$ es la ley de impacto de Newton para la resistencia por rotación, e_S es el coeficiente de restitución de la resistencia por rotación y $C_{\eta_N \sigma_N}$ es el conjunto convexo definido por η_N a la semirrecta $\mathbb{R}^-(\sigma_N)$.

Considerando que $\Phi = [\mathbf{q}^T \ \nu^T]^T$, los desplazamientos virtuales del Lagrangiano de la Ec.(6) dan como resultado los vectores de fuerza a nivel posición para la fricción por deslizamiento,

$$\delta \mathcal{L}_S^p(\Phi) = \delta \Phi^T \mathbf{F}_S^p(\Phi) \rightarrow \mathbf{F}_S^p(\Phi) = \begin{cases} \mathbf{F}_{S,H}^p & \xi_N < 0 & \text{Huelgo} \\ \mathbf{F}_{S,D}^p & \xi_N \geq 0 \text{ y } \|\xi_T\| \geq \mu \xi_N & \text{Deslizamiento} \\ \mathbf{F}_{S,R}^p & \xi_N \geq 0 \text{ y } \|\xi_T\| < \mu \xi_N & \text{Rodadura Pura} \end{cases} \quad (10)$$

A nivel de velocidad, la variación virtual del Lagrangiano de la Ec.(7) da como resultado los vectores de fuerza a nivel de velocidad para la fricción por deslizamiento,

$$\delta \mathcal{L}_S^v(\dot{\Phi}) = \delta \dot{\Phi}^T \mathbf{F}_S^v(\dot{\Phi}) \rightarrow \mathbf{F}_S^v(\dot{\Phi}) = \begin{cases} \mathbf{F}_{S,H}^v & \sigma_N < 0 & \text{Huelgo} \\ \mathbf{F}_{S,D}^v & \sigma_N \geq 0 \text{ y } \|\sigma_T\| \geq \mu \sigma_N & \text{Deslizamiento} \\ \mathbf{F}_{S,R}^v & \sigma_N \geq 0 \text{ y } \|\xi_T\| < \mu \sigma_N & \text{Rodadura Pura} \end{cases} \quad (11)$$

donde $\dot{\Phi} = [\mathbf{v}^T \ \Lambda^T \ \chi^T]^T$ con $\Lambda = [\Lambda_N \ \Lambda_T^T]$ y $\chi = [\chi_N \ \chi_T^T]^T$.

Los desplazamientos virtuales del Lagrangiano de la Ec.(8) dan como resultado los vectores de fuerza interna a nivel de velocidad para la fricción por rodadura,

$$\delta \mathcal{L}_{TW}^v(\dot{\Phi}) = \delta \dot{\Phi}^T \mathbf{F}_{TW}^v(\dot{\Phi}) \rightarrow \mathbf{F}_{TW}^v(\dot{\Phi}) = \begin{cases} \mathbf{F}_{TW,H}^v & \sigma_N < 0 \quad \text{Huelgo} \\ \mathbf{F}_{TW,D}^v & \sigma_N \geq 0 \text{ y } \|\boldsymbol{\eta}_T\| \geq \rho\sigma_N \quad \boldsymbol{\omega}_T \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{TW,R}^v & \sigma_N \geq 0 \text{ y } \|\boldsymbol{\eta}_T\| < \rho\sigma_N \quad \boldsymbol{\omega}_T = \mathbf{0} \end{cases} \quad (12)$$

Por último, los desplazamientos virtuales del Lagrangiano de la Ec.(9) da como resultado los vectores de fuerza interna a nivel de velocidad para la fricción por rotación,

$$\delta \mathcal{L}_{TN}^v(\dot{\Phi}) = \delta \dot{\Phi}^T \mathbf{F}_{TN}^v(\dot{\Phi}) \rightarrow \mathbf{F}_{TN}^v(\dot{\Phi}) = \begin{cases} \mathbf{F}_{TN,H}^v & \sigma_N < 0 \quad \text{Huelgo} \\ \mathbf{F}_{TN,D}^v & \sigma_N \geq 0 \text{ y } \|\boldsymbol{\eta}_N\| \geq \gamma\sigma_N \quad \boldsymbol{\omega}_N \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{TN,R}^v & \sigma_N \geq 0 \text{ y } \|\boldsymbol{\eta}_N\| < \gamma\sigma_N \quad \boldsymbol{\omega}_N = \mathbf{0} \end{cases} \quad (13)$$

Finalmente, la linealización de estos vectores nos permiten obtener las matrices Hessianas correspondientes. Para mayores detalles de la topología general de los vectores y matrices ver el trabajo de Galvez et al. (2020).

3. PROBLEMA DE MÚLTIPLE IMPACTO

A continuación se presenta la formulación del algoritmo para el análisis de múltiple impacto con fricción. De acuerdo con el trabajo de Cosimo et al. (2020), el conjunto activo de impacto simple es,

$$\mathcal{G}_{n+1} = \bar{\mathcal{U}} \cup \{j \in \mathcal{A}_{n+1} : \dot{g}_{Nq,n+1}^j \tilde{\mathbf{v}} < \text{tol}_v \quad \text{y} \quad \sigma_{N,n+1}^j \geq 0\} \quad (14)$$

donde $\bar{\mathcal{U}}$ el conjunto de restricciones bilaterales (\mathcal{U} denota el conjunto de restricciones unilaterales) y \mathcal{A} el conjunto activo de restricciones unilaterales y bilaterales. Luego, la Ec. 14 se reemplaza por el conjunto activo de múltiple impacto,

$$\mathcal{G}_{n+1}^* = \bar{\mathcal{U}} \cup \{j \in \mathcal{A}_{n+1} : \dot{g}_{Nq,n+1}^{*j} \tilde{\mathbf{V}}^- < \text{tol}_v \quad \text{y} \quad \sigma_{N,n+1}^{*j} \geq 0\} \quad (15)$$

donde, $\tilde{\mathbf{V}}^- = [\tilde{\mathbf{V}}_A^{-,T} \quad \tilde{\mathbf{V}}_B^{-,T} \quad \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_A^{-,T} \quad \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_B^{-,T}]^T$ es el vector actualizado de la velocidad de pre-impacto $\tilde{\mathbf{v}}_{n+1}$ para las próximas iteraciones. Por lo tanto, la ley de impacto de Newton en la dirección normal y tangencial definida para cada $j \in (\bar{\mathcal{U}} \cup \mathcal{U})$ se define como,

$$\dot{g}_{N,n+1}^{*j} = g_{Nq,n+1}^j \mathbf{v}_{n+1} + e_N^j g_{Nq,n}^j \mathbf{V}^- \quad \dot{\mathbf{g}}_{T,n+1}^{*j} = \mathbf{g}_{Tq,n+1}^j \mathbf{v}_{n+1} + e_T^j \mathbf{g}_{Tq,n}^j \mathbf{V}^- \quad (16)$$

donde $\mathbf{V}^- = [\mathbf{V}_A^{-,T} \quad \mathbf{V}_B^{-,T} \quad \boldsymbol{\Omega}_A^{-,T} \quad \boldsymbol{\Omega}_B^{-,T}]^T$ es el vector actualizado de la velocidad de pre-impacto \mathbf{v}_n para las próximas iteraciones, por lo tanto $\mathbf{V}^- = \mathbf{v}_n + \mathbf{W}_{n+1}$. Finalmente, el multiplicador aumentado modificado a nivel de velocidad en la dirección normal y tangencial se define como,

$$\sigma_{Nn+1}^* = [k_v \Lambda_{N,n+1} - p_v \dot{g}_{N,n+1}^*] \quad \sigma_{Tn+1}^* = [k_v \Lambda_{T,n+1} - p_v \dot{\mathbf{g}}_{T,n+1}^*] \quad (17)$$

Los impulsos resultantes se tienen que acumular y tener en cuenta en la siguiente secuencia para cada problema de impacto. Por lo tanto, los impulsos acumulados en las direcciones normales y tangenciales vienen dados por las siguientes ecuaciones, respectivamente,

$$\mathbf{P}_N = \sum_j^{i-1} g_{Nq}^{*,T} \Lambda_N^* \quad \mathbf{P}_T = \sum_j^{i-1} \mathbf{g}_{Tq}^{*,T} \Lambda_T^* \quad (18)$$

donde el índice i se utiliza para denotar el problema del impacto en la secuencia de impactos que se están resolviendo actualmente. Finalmente, el vector de fuerza interna está dado por,

$$\mathbf{F}^{v^*, \mathcal{G}^*}(\Phi) = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ -\frac{k_z^2}{p_v} \Lambda_N^{\mathcal{G}^*} \\ -\frac{k_z^2}{p_v} \Lambda_T^{\mathcal{G}^*} \end{array} \right\} \quad \sigma_N^* < 0 \quad \text{Huelgo} \\ \left\{ \begin{array}{l} -g_{Nq}^{\mathcal{G}^*, T} \sigma_N^* - \mu \sigma_N^* g_{Tq}^{\mathcal{G}^*, T} \tau_v - P_N - P_T \\ -k_p \dot{g}_N^{\mathcal{G}^*} \\ \frac{k_p}{p_p} (-k_p \Lambda_T^{\mathcal{G}^*} + \mu \sigma_N^* \tau_v) \end{array} \right\} \quad \|\sigma_T^*\| \geq \mu \sigma_N^* \quad \text{Slip} \\ \left\{ \begin{array}{l} -g_{Nq}^{\mathcal{G}^*, T} \sigma_N^* - g_{Tq}^{\mathcal{G}^*, T} \sigma_T^* - P_N - P_T \\ -k_v \dot{g}_N^{\mathcal{G}^*} \\ -k_v \dot{g}_T^{\mathcal{G}^*} \end{array} \right\} \quad \|\sigma_T^*\| < \mu \sigma_N^* \quad \text{Stick} \end{array} \right. \quad (19)$$

4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Se proponen dos ejemplos numéricos para evaluar la robustez y precisión del modelo de contacto propuesto. Las simulaciones fueron llevadas a cabo en el programa de investigación Oofelie (Cardona et al., 1994) donde se integra el algoritmo de contacto desarrollado.

4.1. Esfera rodando y deslizando sobre un plano

El primer ejemplo está tomado del reciente trabajo presentado por Acary y Bourrier (2021). Corresponde a una esfera rígida que rueda sobre una superficie plana horizontal, donde la fricción por rodadura y por deslizamiento actúan en simultáneo, ver Fig. 2-a. La esfera tiene un radio $R = 0,5$ m, un peso de $mg = 12,828$ N, una inercia $I = 131$ kgm², una velocidad inicial $v_x = 2,5$ m/s y un coeficiente de rodadura $\rho = 0,04$ m. Se estudiaron tres casos con diferentes coeficientes de fricción y velocidad inicial angular ω_z , (i) $\mu = 0,2$ y $\omega_z = 5$ rad/s, (ii) $\mu = 0,2$ y $\omega_z = 2,5$ rad/s y (iii) $\mu = 0,05$ y $\omega_z = 5$ rad/s. El paso de tiempo se fijó en 1×10^{-3} s. Para el caso (i), la Fig. 2-b muestra que la velocidad angular ω_z y la velocidad lineal v_x disminuyen linealmente hasta que la esfera se detiene por completo, (esto es $u_x = \text{cte}$) debido a la resistencia por rodadura. También se observa una condición de rodadura pura hasta los 4,5 s debido a $v_x - R\omega_z = 0$. En el caso (ii), ver Fig. 2-c, como la velocidad angular inicial es menor que en el caso (i), al comienzo la esfera se encuentra en deslizamiento, alcanzando una velocidad angular máxima a los 0,256 s. El comportamiento deslizante se puede confirmar con la curva $v_x - R\omega_z > 0$ hasta el tiempo 0,256 s. Después de este tiempo, v_x y ω_z disminuyen con un movimiento de rodadura pura hasta que la esfera se detiene por completo ($u_x = \text{cte}$). Por último, en el caso (iii), ver Fig. 2-d, a diferencia de los otros dos casos, la esfera comienza con un movimiento de rodadura y a los 3,4 s comienza a deslizar. A los 5,1 s la esfera queda completamente en reposo ($u_x = \text{cte}$). Los resultados obtenidos con el algoritmo propuesto muestran un buen acuerdo con los presentados por Acary y Bourrier (2021).

4.2. Jugada de Pool

El siguiente ejemplo consiste en una jugada típica de pool, el cual permite observar la capacidad de la metodología propuesta para resolver problemas de múltiple impacto con y sin fricción. Una bola blanca (2) con una velocidad de $v_x = 10,792$ m/s golpea a tres bolas en tresbolillo que se encuentran en contacto y en reposo, ver Fig. 3. La distancia entre los centros de la

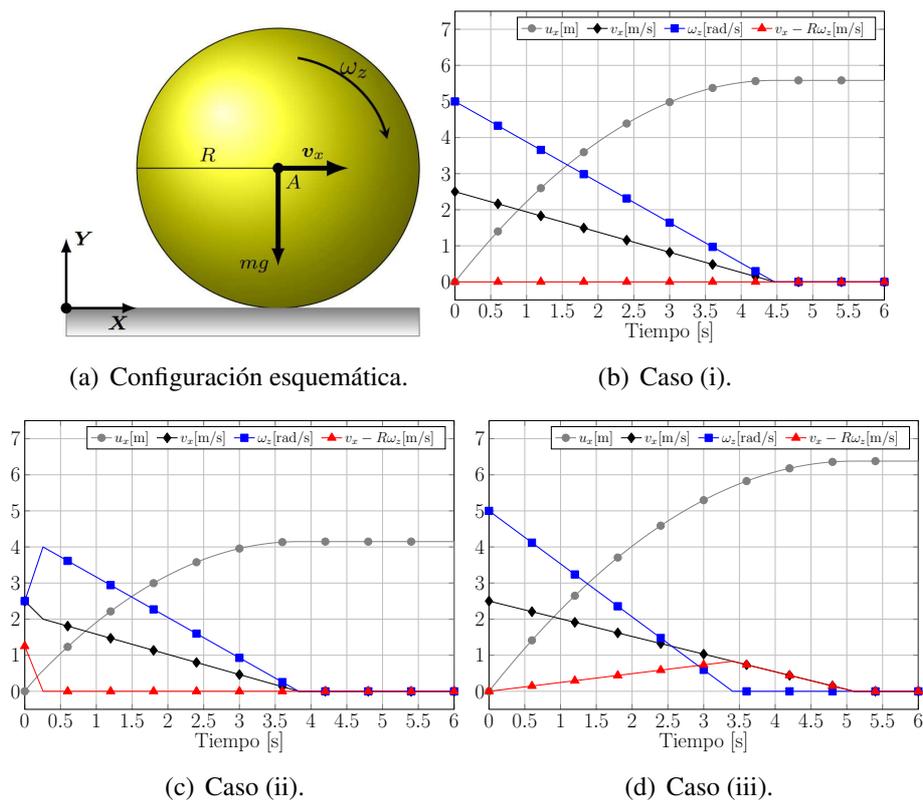


Figura 2: Ejemplo numérico: Esfera rodando y deslizando sobre un plano.

bola blanca y amarilla (3) es de 1,27 m. Para la jugada de pool propuesta, las 4 bolas tienen un radio $R = 0,028575$ m, un peso $mg = 0,1666$ N y un momento de inercia $I = 0,000055$ kgm². La mesa tiene un largo de 2,54 m y una ancho de 1,27 m (Alciatore, 2008). Para el contacto entre las esferas y la mesa se consideró $\mu = 0,2$ y $e_N = 0$, en tanto que, para el contacto entre las esferas $\mu = 0,06$ y $e_N = 0,93$. Para el contacto entre las esferas y los bordes de la mesa se propuso $\mu = 0$ y $e_N = 0,85$. Por último, en todos los contactos se impuso $e_T = 0$.

Se analizaron dos casos, en el primero no se tuvo en cuenta el coeficiente de rodadura en las esferas y el plano, en tanto que, en el segundo se tuvo en cuenta con $\rho = 0,005$ m. El tiempo total de simulación fue de 3 s con un paso de tiempo de 1×10^{-3} s. Para el primer caso, la bola blanca parte con una velocidad de 10,729 m/s e impacta al tresbolillo con una velocidad ligeramente menor debido a la fricción por deslizamiento entre la bola y el plano, ver Fig. 4-a. Una vez que se produce el múltiple impacto, la bola (3) se mueve con una pequeña velocidad hacia adelante. Como se puede observar, una vez que las bolas entran en rodadura pura, sus velocidades se mantienen constantes y no frenan. El segundo caso es similar al primero, sin embargo, las bolas alcanzan la condición de reposo por efecto de la aplicación del coeficiente de rodadura, ver Fig. 4-b.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una formulación que tiene en cuenta el efecto de múltiples impactos con fricción de deslizamiento, de rodadura y de rotación en el movimiento de cuerpos rígidos esféricos. Las soluciones numéricas propuestas muestran que el programa desarrollado captura con precisión el movimiento de las esferas bajo esas condiciones. La integración de las ecuaciones de movimiento del problema de contacto por fricción se realiza utilizando el esque-

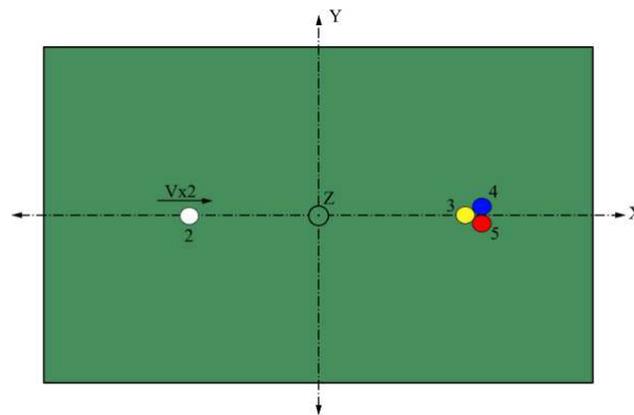


Figura 3: Jugada de pool.

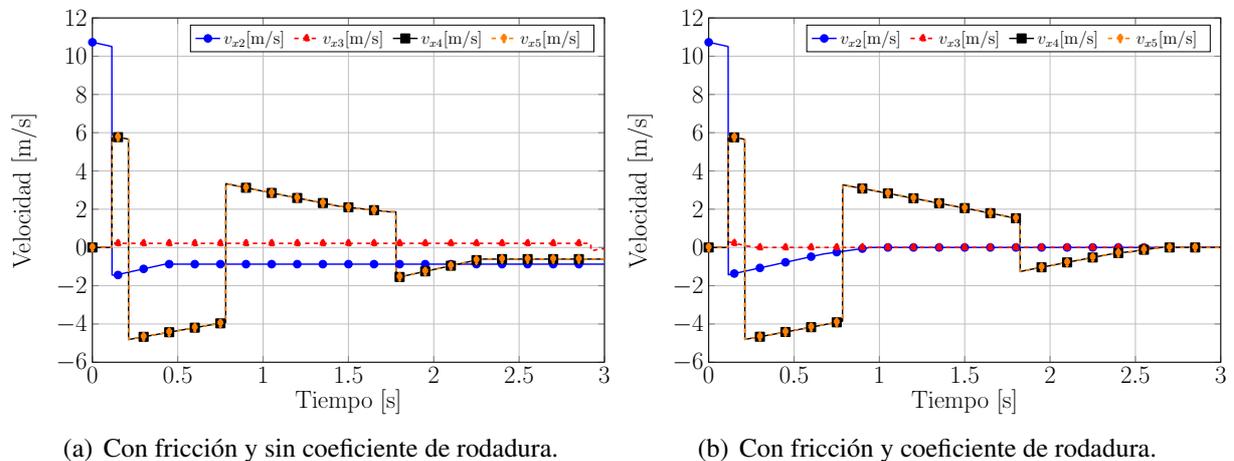


Figura 4: Resultados obtenidos para la jugada de pool.

ma de integración temporal α generalizado no suave, basado en el enfoque del Lagrangiano aumentado. Las restricciones de contacto se cumplen exactamente tanto a nivel posición como velocidad, es decir, no hay penetración entre los cuerpos en contacto.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido financiamiento del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas a través del proyecto PIP11220200101688CO y de la Universidad Tecnológica Nacional a través de los proyectos AMECAFE0008102TC y 7704.

REFERENCIAS

- Acary V. y Bourrier F. Coulomb friction with rolling resistance as a cone complementarity problem. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 85:104046, 2021.
- Alart P. y Curnier A. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 92(3):353–375, 1991.
- Alciatore D.G. Pool and billiards physics principles by coriolis and others. *Colorado, United States: Department of Mechanical Engineering Colorado State University*, 2008.
- Brogliato B. *Nonsmooth mechanics*, volumen 3. Springer, 1999.

- Cardona A., Klapka I., y Gérardin M. Design of a new finite element programming environment. *Engineering Computations*, 11:365–381, 1994.
- Caselli F. y Frémond M. Collision of three balls on a plane. *Computational Mechanics*, 43(6):743–754, 2009.
- Cavaliere F.J., Sanchez E., Cosimo A., Brüls O., y Cardona A. Simulación de cuerpos rígidos esféricos sujetos a colisiones de impacto múltiple y efectos de fricción. *Mecánica Computacional*, 38(29):1123–1130, 2021.
- Contensou P. Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la théorie de la toupie. En *Kreiselprombleme/Gyrodynamics*, páginas 201–216. Springer, 1963.
- Cosimo A., Cavaliere F.J., Cardona A., y Brüls O. On the adaptation of local impact laws for multiple impact problems. *Nonlinear Dynamics*, 102(4):1997–2016, 2020.
- Coulomb C.A. *Théorie des machines simples en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*. Bachelier, 1821.
- Darboux G. Etude géométrique sur les percussions et le choc des corps. *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, 4(1):126–160, 1880.
- Galvez J., Cavaliere F.J., Cosimo A., Brüls O., y Cardona A. A nonsmooth frictional contact formulation for multibody system dynamics. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 121(16):3584–3609, 2020.
- Gérardin M. y Cardona A. *Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach*. Wiley, 2001. ISBN 0471489905.
- Gismeros Moreno R., Corral Abad E., Meneses Alonso J., Gómez García M.J., y Castejón Sisamón C. Modelling multiple-simultaneous impact problems with a nonlinear smooth approach: pool/billiard application. *Nonlinear Dynamics*, 107(3):1859–1886, 2022.
- Glocker C. y Pfeiffer F. Multiple impacts with friction in rigid multibody systems. *Nonlinear Dynamics*, 7(4):471–497, 1995.
- Han I. y Gilmore B. Multi-body impact motion with friction—analysis, simulation, and experimental validation. 1993.
- Hurmuzlu Y. y Ceanga V. Impulse correlation ratio in solving multiple impact problems. En *Impacts in mechanical systems*, páginas 235–273. Springer, 2000.
- Keller J.B. Impact With Friction. *Journal of Applied Mechanics*, 53(1):1–4, 1986. ISSN 0021-8936. doi:10.1115/1.3171712.
- Laplace P.S. *Traité de mécanique céleste*, volumen 1. de l’Imprimerie de Crapelet, 1799.
- Leine R.I. y van de Wouw N., editores. *Stability and Convergence of Mechanical Systems with Unilateral Constraints*. Springer Berlin Heidelberg, 2008. doi:10.1007/978-3-540-76975-0.
- Liu C., Zhao Z., y Brogliato B. Frictionless multiple impacts in multibody systems. i. theoretical framework. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 464(2100):3193–3211, 2008.
- Liu C.S., Zhang K., y Yang R. The fem analysis and approximate model for cylindrical joints with clearances. *Mechanism and machine theory*, 42(2):183–197, 2007.
- Moreau J.J. Some numerical methods in multibody dynamics: application to granular materials. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 13(4-suppl):93–114, 1994.
- Nguyen N.S. y Brogliato B. *Multiple impacts in dissipative granular chains*, volumen 72. Springer Science & Business Media, 2013.
- Smith G. Newton’s philosophiae naturalis principia mathematica. 2007.
- Yigit A.S., Ulsoy A.G., y Scott R. Spring-dashpot models for the dynamics of a radially rotating beam with impact. *Journal of sound and Vibration*, 142(3):515–525, 1990.