

ESTUDIO PARAMÉTRICO DE UN ARREGLO DE COSECHADORES DE ENERGÍA UTILIZANDO PERFILES CON CAMBIO DE FORMA

A PARAMETRIC STUDY ON A MORPHING AIRFOIL ARRAY FOR ENERGY HARVESTING

Santiago Ribero^a, Agustina C. Aichino^a, Martín E. Pérez Segura^{a,b} y Sergio Preidikman^{a,b}

^a*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. idit@fcefyn.edu.ar, www.inv.idit.efn.uncor.edu*

^b*Departamento de Estructuras. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina, www.fcefyn.unc.edu.ar*

Palabras clave: Cosecha de energía, perfiles con cambio de forma, aerodinámica estacionaria.

Resumen. Durante los últimos años, los avances en las llamadas “tecnologías inteligentes” han dado impulso a un conjunto de nuevas disciplinas y aplicaciones. Tal es el caso de las estructuras multifuncionales como las alas que cambian de forma (“morphing wings”) y su utilización en la cosecha de energía eólica. En este trabajo se presenta un estudio paramétrico en las variables geométricas de un dispositivo para la cosecha de energía proveniente del viento. El dispositivo cosechador se compone de perfiles aerodinámicos morphing dispuestos en tándem, los cuales permiten alterar el campo de velocidades a su alrededor para satisfacer distintos requerimientos de operación. El cambio de forma de los perfiles se lleva a cabo a partir de la deformación de su línea media, imponiendo, como restricción, la longitud de arco constante. Las cargas aerodinámicas actuantes sobre el arreglo de cosechadores se determinan mediante el uso de una versión estacionaria bidimensional de un método de vorticidad distribuida. Los resultados de distintos análisis muestran la potencialidad del cambio de geometría para incrementar la eficiencia de dispositivos cosechadores.

Keywords: Energy harvesting, morphing airfoils, stationary aerodynamic.

Abstract. The concepts of morphing wings and smart structures have been gaining attention over the past few years. In this work, we present a parametric study on the geometrical configuration of a wind energy harvesting device. The device consists of an array of morphing airfoils whose shape is altered in order to harness different operation conditions. The airfoil’s shape is controlled by changing their camber lines, which in turn, are subject to inextensibility constraints. To this end, a steady 2D version of a distributed vorticity method together with a vortex particle method is used to predict the aerodynamic loads over the harvesting device. Throughout a series of simulations, the morphing airfoils have proven to be a feasible alternative with the potential to increase the efficiency of wind energy harvesting devices.

1. INTRODUCCIÓN

La cosecha de energía se define como el proceso por el cual la energía presente en el entorno de un sistema es convertida en una forma utilizable de energía con el fin de, por ejemplo, alimentar sensores, actuadores, u otros dispositivos electrónicos de baja potencia. Investigaciones recientes han explorado la posibilidad de desarrollar cosechadores de energía que utilizan vibraciones mecánicas causadas por inestabilidades aeroelásticas como fuente principal de energía de entrada (Beltramo et al., 2020).

Desde este punto de vista, el presente trabajo analiza un dispositivo cosechador compuesto por dos perfiles aerodinámicos no delgados y simétricos, con la capacidad de cambiar de forma (*morphing*). El dispositivo se asume inmerso en una corriente fluida y el estudio pretende describir, en primer instancia, cómo el cambio en la geometría o en la incidencia de los perfiles afecta la interacción mutua entre ellos, frente a diversas condiciones de operación. La interacción que se explora es netamente aerodinámica ya que el acoplamiento entre los perfiles se realiza únicamente a través del fluido circundante.

Para describir el cambio de forma se emplea el método propuesto por Aichino et al. (2021). En primer lugar, se modela el cambio de forma de la línea media bajo la restricción de conservación de la longitud de arco. Posteriormente, el cambio de forma de la línea media es trasladado a la superficie del perfil mediante una conexión rígida.

Para el estudio aerodinámico se propone el uso del método de vorticidad distribuida descripto por Mook y Dong (1997), el cual es extendido a múltiples perfiles aerodinámicos. El método se basa en la modelización de las capas límites y las estelas como sábanas vorticosas cuando el número de Reynolds es elevado. Para la determinación del campo de velocidad del fluido, se emplea la versión integral de la ley de Biot-Savart, y las cargas aerodinámicas que se desarrollan se obtienen por integración de la ecuación de Euler alrededor de cada perfil.

Este trabajo se ordena de la siguiente manera: en primer lugar se presentan los lineamientos generales para el proceso de cambio de forma de los perfiles aerodinámicos; en segundo lugar, se expone la extensión del método aerodinámico a un movimiento estacionario para múltiples cuerpos; en tercer lugar, se presenta un caso de validación del modelo utilizado; luego, se exponen las características del cosechador en estudio y los resultados obtenidos; y, por último, se presentan las conclusiones.

2. MODELO DE CAMBIO DE FORMA DE LA GEOMETRÍA DEL PERFIL

La forma de los perfiles aerodinámicos se representa como se describe a continuación y se muestra en la Fig. 1 y en la Fig. 2. En su configuración deformada, la geometría del perfil aerodinámico resulta de producir un cambio en la posición y la orientación relativas de su línea media en los bordes de ataque y de fuga. Para describir el cambio de forma de la línea media se utiliza una interpolación con polinomios cúbicos de Hermite, cuyos coeficientes dependen de los llamados *parámetros de morphing*: h_A , h_B , θ_A y θ_B . Adicionalmente, se exige que la longitud de arco de la línea media en la configuración deformada sea constante e igual a la cuerda, c , del perfil indeformado. Como referencia, se utiliza un marco $B = \{o_B, \hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{B}_3\}$ ubicado a una distancia b medida desde el borde de ataque.

Sobre la línea media del perfil se define una serie de *Nodos Maestros* (NM), cada uno de los cuales tiene asociado un único *Nodo Esclavo* (NE) que se encuentra sobre la superficie del perfil. Adicionalmente, sobre la superficie externa del perfil, entre dos NE consecutivos se define un *panel*. La unión entre un NM y su NE se modela como una conexión rígida.

El proceso de cambio de forma se puede sintetizar en los siguientes pasos: *i*) definir pará-

metros geométricos en la configuración de referencia; *ii*) definir parámetros de *morphing*; *iii*) aplicar el algoritmo presentado por Aichino et al. (2021); *iv*) describir la geometría de la configuración deformada de la línea media; y, *v*) calcular la posición de cada NM y de cada NE en la configuración deformada.

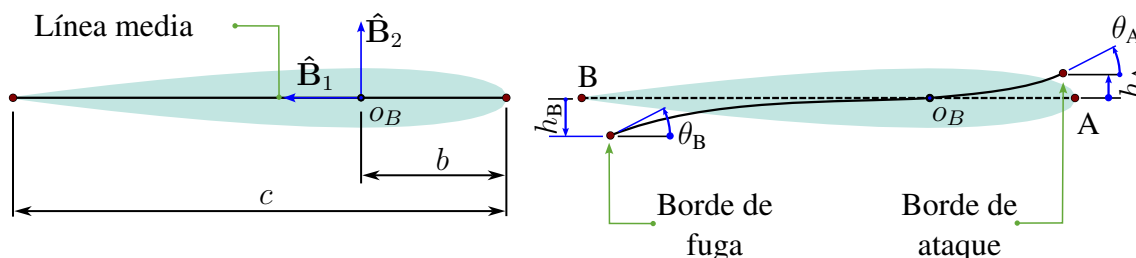


Figura 1: Definiciones geométricas para el cambio de forma de la línea media.

3. MODELO AERODINÁMICO ESTACIONARIO

El modelo aerodinámico reportado por Mook y Dong (1997) permite representar flujos bidimensionales externos (alrededor de perfiles aerodinámicos) como un esquema de flujo potencial con singularidades distribuidas. Las hipótesis principales del modelo asumen que el flujo es incompresible y posee un elevado número de Reynolds. Bajo estas condiciones, las regiones del fluido en donde existe vorticidad (capas límites y estelas) se concentran en delgadas superficies de discontinuidad llamadas *sábanas vorticosas*. El perfil aerodinámico es representado, entonces, como una sábana vorticosa adherida a su superficie exterior (capa límite) y su estela como una sábana vorticosa libre que se convecta desde el borde de fuga (condición de Kutta). Para modelar la sábana adherida se utilizan paneles con una distribución de vorticidad lineal y, para modelar la estela, se utilizan partículas con vorticidad concentrada.

Para determinar el campo de vorticidad se incorporan dos condiciones adicionales al problema: *i*) la *condición de no penetración*, que exige que la velocidad del fluido en la dirección normal a las superficies sólidas sea nula; y, *ii*) la *conservación de circulación*, que exige que la circulación de todo el campo fluido se mantenga constante. Por su parte, el campo de velocidad del fluido se determina a partir del campo de vorticidad utilizando la versión integral de la ley de Biot-Savart.

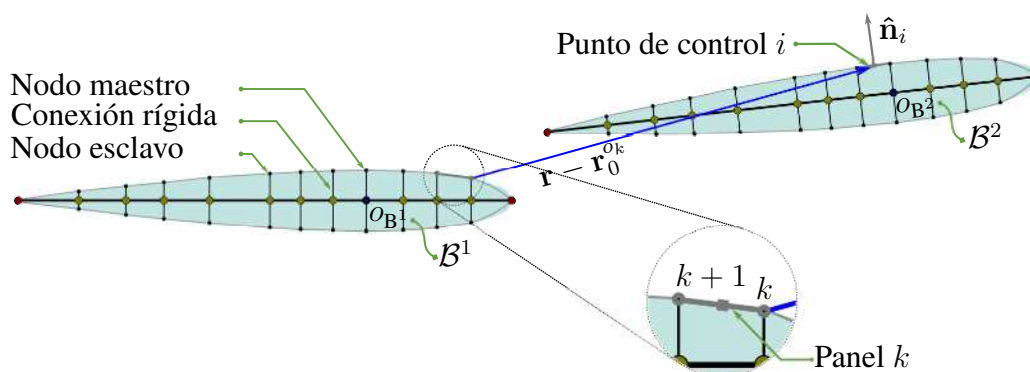


Figura 2: Definiciones geométricas.

En el presente trabajo, el modelo descrito anteriormente se extiende al estudio de un flujo en el cual se encuentran inmersos múltiples perfiles aerodinámicos y ha alcanzado el *estado estacionario*. Lo cual permite no considerar la influencia de las estelas en el campo de movimiento fluido (Katz y Plotkin, 2001). El campo de velocidad resulta, entonces,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n_b} \mathbf{u}_{b_j}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_\infty, \quad (1)$$

donde, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ es la velocidad en el campo de movimiento en la posición \mathbf{r} , $\mathbf{u}_{b_j}(\mathbf{r})$ es el aporte al campo de velocidad de sábana vorticiosa j en la posición \mathbf{r} , \mathbf{u}_∞ es la velocidad de la corriente libre del fluido y, n_b es el número de perfiles aerodinámicos.

Las sábanas vorticosas adheridas se discretizan mediante los *paneles* definidos entre dos NE consecutivos y se define, además, sobre cada uno un *punto de control* donde se exigirá la condición de no penetración. Sobre cada panel se define una función de vorticidad que es aproximada mediante funciones de interpolación lineales $N_1(\mathbf{r}_0)$ y $N_2(\mathbf{r}_0)$ como sigue

$$\gamma_k^j(\mathbf{r}_0) = G_k^j N_{1k}^j(\mathbf{r}_0) + G_{k+1}^j N_{2k}^j(\mathbf{r}_0), \quad (2)$$

donde $\gamma_k^j(\mathbf{r}_0)$ es la función de vorticidad del panel k en la posición \mathbf{r}_0 , y G_k^j y G_{k+1}^j son las vorticidades en los nodos k y $k + 1$ de la sábana j , respectivamente (véase la Fig. 2).

Luego, utilizando la versión integral de la ley de Biot-Savart el aporte al campo de velocidad de una sábana vorticiosa adherida discretizada en paneles resulta

$$\mathbf{u}_{b_j}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \hat{\mathbf{B}}_3 \times \sum_{k=1}^{N_{el}^j} \int_0^{\Delta l_k} \frac{\gamma_k^j(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^2} d\mathbf{r}_0, \quad (3)$$

de donde, al sustituir la Ec. (2) e integrar analíticamente, se obtiene

$$\mathbf{u}_{b_j}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{N_{el}^j} [G_k^j \mathbf{v}_{1k}^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0^{ok}) + G_{k+1}^j \mathbf{v}_{2k}^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0^{ok})]. \quad (4)$$

En lo anterior, Δl_k es la longitud del panel k , N_{el}^j es el número de paneles, \mathbf{v}_{1k}^j y \mathbf{v}_{2k}^j es el resultado de resolver analíticamente la integral asociada al panel k (Mook y Dong, 1997), \mathbf{r}_0^{ok} es el vector posición del nodo k y, $\hat{\mathbf{B}}_3$ es el versor normal al plano del movimiento.

En el modelo discreto, la *condición de no penetración* se exige únicamente sobre los puntos de control de cada panel, es decir, teniendo en cuenta la Ec. (1) y la Fig. 2,

$$\begin{aligned} [\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1](\mathbf{r}_{cp_1}) &= [(\mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}_b) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1](\mathbf{r}_{cp_1}) = 0, \\ &\vdots \\ [\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i](\mathbf{r}_{cp_i}) &= [(\mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}_b) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i](\mathbf{r}_{cp_i}) = 0, \\ &\vdots \\ [\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{n_{cp}}](\mathbf{r}_{cp_{n_{cp}}}) &= [(\mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}_b) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{n_{cp}}](\mathbf{r}_{cp_{n_{cp}}}) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

donde, $\hat{\mathbf{n}}_i$ es el versor normal ubicado en el panel i , \mathbf{r}_{cp_i} es la posición del punto de control i y, n_{cp} es el número de puntos de control. Luego, sustituyendo la Ec. (4) en la Ec. (5) y considerando un panel genérico i , se tiene

$$\left[\sum_{j=1}^{n_b} \sum_{k=1}^{N_{el}^j} G_k^j (\mathbf{v}_{1k}^j \cdot \hat{\mathbf{n}}_i) + G_{k+1}^j (\mathbf{v}_{2k}^j \cdot \hat{\mathbf{n}}_i) \right] (\mathbf{r}_{cp_i}) = -[\mathbf{u}_\infty \cdot \hat{\mathbf{n}}_i](\mathbf{r}_{cp_i}). \quad (6)$$

Finalmente, la solución del problema se obtiene al resolver un sistema de ecuaciones lineales de n_{cp} ecuaciones de no penetración y n_{np} incógnitas, siendo

$$n_{cp} = \sum_{j=1}^{n_b} N_{el}^j, \quad \text{y} \quad n_{np} = \sum_{j=1}^{n_b} N_{el}^j + n_b. \quad (7)$$

Sin embargo, de acuerdo a las hipótesis del modelo, las vorticidades $G_1^j = G_{N_{el}+1}^j = 0$, por lo tanto, el sistema de ecuaciones se reduce en $2n_b$ incógnitas, dejando un problema de n_{cp} ecuaciones y $n_{np} - 2n_b$ incógnitas, que debe resolverse con un método de solución apropiado (Mook y Dong, 1997).

3.0.1. Cálculo de la carga aerodinámica

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones (5), la distribución de presión sobre la superficie del perfil aerodinámico se obtiene a partir de la función de vorticidad calculada. Esto es, integrando la versión estacionaria de la ecuación de Euler

$$p(\mathbf{r}_0) - P_L = -\rho \left(\frac{\gamma^2(\mathbf{r}_0) - \gamma_L^2}{2} \right), \quad (8)$$

donde p_L es el valor de la presión en el intradós del borde de fuga, $p(\mathbf{r}_0)$ es la presión sobre la sábana vorticiosa, ρ es la densidad del fluido y, γ_L es la velocidad relativa en el borde de fuga del intradós.

Luego, la fuerza resultante, \mathbf{f}^j , actuando sobre el perfil se aproxima por integración de la distribución de presión sobre cada panel como sigue

$$\mathbf{f}^j = \oint_{\mathbf{r}_0} [p\hat{\mathbf{n}}](\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0^j \simeq \rho \sum_{k=1}^{N_{el}^j} \mathbf{f}_k^j, \quad (9a)$$

$$\mathbf{f}_k^j = \frac{\Delta l_k^j}{6} \left(G_k^{j2} + G_k^j G_{k+1}^j + G_{k+1}^{j2} \right) \hat{\mathbf{n}}_k. \quad (9b)$$

Una vez calculada la fuerza que actúa sobre el perfil, la sustentación, L , se calcula como la proyección de dicha fuerza en la dirección normal a la corriente libre. De ahí, el coeficiente de sustentación se obtiene como

$$C_l^j = \frac{L^j}{qc}, \quad (10)$$

donde, q es la presión dinámica y, c es la cuerda del perfil en su configuración de referencia.

4. RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos. En primer lugar, se analiza un caso de estudio para la validación del modelo aerodinámico y, en segundo lugar, se analizan seis configuraciones del modelo de cosechador. En el segundo grupo de resultados, se registra el cambio en el comportamiento del coeficiente de sustentación y la tasa de influencia relativa entre los cosechadores como función de la distancia entre ellos, para cada configuración.

4.1. Validación del modelo numérico

El proceso de validación numérica del modelo aerodinámico se lleva a cabo tomando como referencia el *caso de prueba analítico* desarrollado por Williams (1971). El método propuesto en dicho trabajo consiste en el cálculo analítico del flujo potencial incompresible bidimensional alrededor de secciones aerodinámicas de Karman-Trefftz obtenidas mediante transformación conforme. Allí, se exponen los resultados para una configuración de perfil aerodinámico y de flap con un ángulo de incidencia del perfil de 0° y un ángulo de deflexión de flap de 30° .

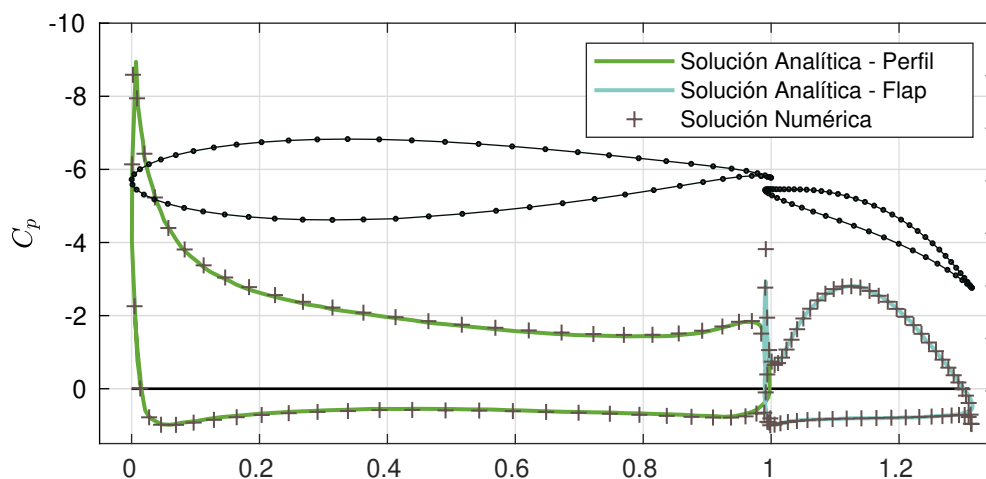


Figura 3: Coeficiente de presión sobre las secciones aerodinámicas. Incidencia = 0° , flap = 30° .

En la Fig. 3 se presentan los resultados obtenidos con el modelo numérico junto con los reportados por Williams (1971). Mientras que, en la Tabla 1 se comparan los coeficientes de sustentación, C_l , los coeficientes de resistencia, C_d y las circulaciones, Γ . En todos los casos el máximo error relativo se encuentra en el orden del 0,5%.

	Perfil			Flap		
	C_l	C_d	Γ	C_l	C_d	Γ
Analítico (Williams, 1971)	2.9065	-0.3839	1.3909	0.8302	0.3838	0.4784
Numérico	2.9081	-0.3859	1.3981	0.8301	0.3858	0.4800
lError relativo [%]	0.05	0.52	0.51	0.01	0.51	0.32

Tabla 1: Configuración i). Incidencia = 0° , flap 30° .

4.2. Modelo de cosechador

El modelo de cosechador de energía propuesto se compone de dos perfiles aerodinámicos NACA0012 dispuestos en tándem. Ambos perfiles se encuentran alineados por los puntos de sujeción O_{B1} y O_{B2} en dirección vertical y se ubican a una distancia h/c , como se muestra en la Fig. 4. La incidencia, $A\theta A$, y los parámetros de morphing son definidos para cada configuración.

4.3. Casos de estudio

Tomando como referencia la Fig. 4, las seis configuraciones analizadas se detallan en la Tabla 2, donde se definen los *parametros de morphing* de cada una. Además, se indica el ángulo

de incidencia (AoA) de cada cosechador, y si la configuración es simétrica (*Sim*) o antisimétrica (*Asim*). Una vez definida cada configuración, se varía la distancia entre cosechadores h/c , el ángulo de incidencia α y la pendiente en los extremos del perfil θ_A y θ_B , dentro de los siguientes intervalos

$$h/c \in [1/2, 10], \quad \alpha \in [-15^\circ, 15^\circ], \quad \theta_{A,B} \in [-15^\circ, 15^\circ].$$

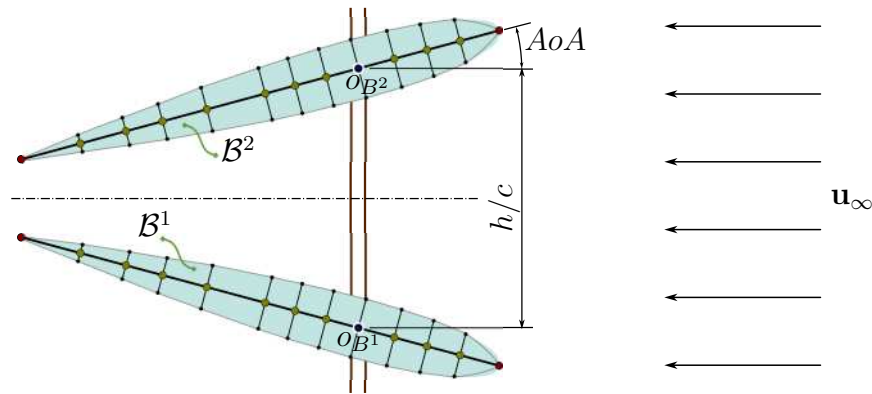


Figura 4: Modelo de cosechador con perfiles en tándem.

Configuración	Tipo	Cosechador 1				Cosechador 2			
		AoA	θ_A	θ_B	$h_{A,B}$	AoA	θ_A	θ_B	$h_{A,B}$
<i>I</i>	<i>Asim</i>	α	0.00	0.00	0.00	α	0.00	0.00	0.00
<i>II</i>	<i>Sim</i>	α	0.00	0.00	0.00	$-\alpha$	0.00	0.00	0.00
<i>III</i>	<i>Asim</i>	0.00	θ	$-\theta$	0.00	0.00	θ	$-\theta$	0.00
<i>IV</i>	<i>Sim</i>	0.00	θ	$-\theta$	0.00	0.00	$-\theta$	θ	0.00
<i>V</i>	<i>Asim</i>	0.00	θ	θ	0.00	0.00	θ	θ	0.00
<i>VI</i>	<i>Sim</i>	0.00	θ	θ	0.00	0.00	$-\theta$	$-\theta$	0.00

Tabla 2: Parámetros geométricos y parámetros de *morphing* para cada configuración.

Los resultados se ordenan en dos tipos de figuras. Por un lado, se muestra el cambio del coeficiente de sustentación para cada cosechador tomando como referencia el valor del coeficiente de sustentación del cosechador aislado. Por otro lado, se muestra la tasa de influencia (TI) entre los coeficientes de sustentación del cosechador. La TI se define como

$$TI = \left| \frac{C_{l_1}}{C_{l_2}} \right|, \tag{11}$$

y mide la sustentación relativa que se desarrolla entre los perfiles del cosechador. Siendo C_{l_1} el coeficiente de sustentación del cosechador 1 y C_{l_2} , el del cosechador 2.

Para poner de manifiesto a este indicador, se proponen 3 umbrales de influencia *ad hoc*: el primer umbral es del 1 %, el segundo umbral es del 4 % y el tercer umbral es del 8 %. Esto es, la influencia entre los cosechadores se considera despreciable cuando la TI está en el rango (0.99, 1.01), (0.96, 1.04) y (0.92, 1.08), respectivamente. En las Fig. 5, Fig. 6 y Fig. 7 se muestran las curvas $C_{l_{1,2}}$ vs. h/c para las configuraciones *I* y *II*, *III* y *IV* y, *V* y *VI*, respectivamente. Para las configuraciones *I* y *II* el perfil aerodinámico no muestra cambios en su geometría; para las

configuraciones *III* y *IV* el perfil aerodinámico ha sido modificado para adquirir combadura en forma de *C* y; para las configuraciones *V* y *VI* el perfil aerodinámico ha sido modificado para adquirir doble combadura en forma de *S*.

En la Fig. 8 se muestran curvas de nivel para la TI en diferentes umbrales. Los mapas mostrados se corresponden con configuraciones antisimétricas. Por ejemplo, para la configuración *III* y un umbral del 8% se muestra que para un valor de $\theta = 10^\circ$ y una relación de $h/c = 6$ el valor de la TI es 1.04, es decir, el cosechador 1 desarrolla una sustentación superior al 4% con respecto del cosechador 2. Las configuraciones simétricas producen, en términos de valores absolutos, idénticos coeficientes de sustentación sobre ambos cosechadores.

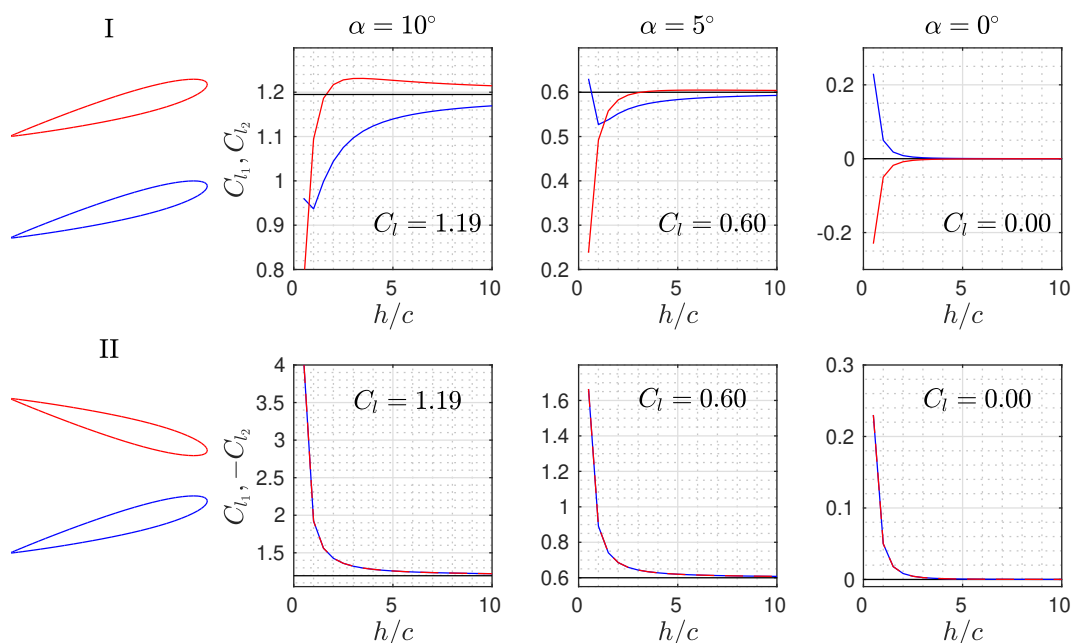


Figura 5: C_L para un arreglo de perfiles sin deformación.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un estudio sobre un dispositivo cosechador de energía formado por dos perfiles aerodinámicos con la capacidad de cambiar de forma. Se analizó la influencia mutua que existe en la sustentación de ambos perfiles en función de los parámetros que definen la configuración del dispositivo: forma de los perfiles, distancia entre los perfiles y ángulo de incidencia de la corriente libre. Para ello, se combinaron un modelo aerodinámico estacionario con vorticidad distribuida extendido para incluir múltiples cuerpos, y un modelo para describir el cambio de configuración geométrica de perfiles.

Como resultados, se reportaron las variaciones de los coeficientes de sustentación, C_L , de cada perfil aerodinámico para distintas configuraciones, contrastándolo con el valor de C_L que tendría el perfil aislado. Además, se definió un indicador, llamado tasa de influencia, que permite medir la afectación relativa de la sustentación entre los perfiles del cosechador.

La tasa de influencia muestra que en todas las configuraciones simétricas la sustentación de ambos perfiles es idéntica, pero superior al valor del perfil aislado. En las configuraciones antisimétricas, por su parte, los coeficientes de sustentación de cada perfil difieren entre sí, lo cual se pone de manifiesto con la TI. Además, uno de los perfiles muestra un incremento de su C_L , mientras que el otro muestra una disminución.

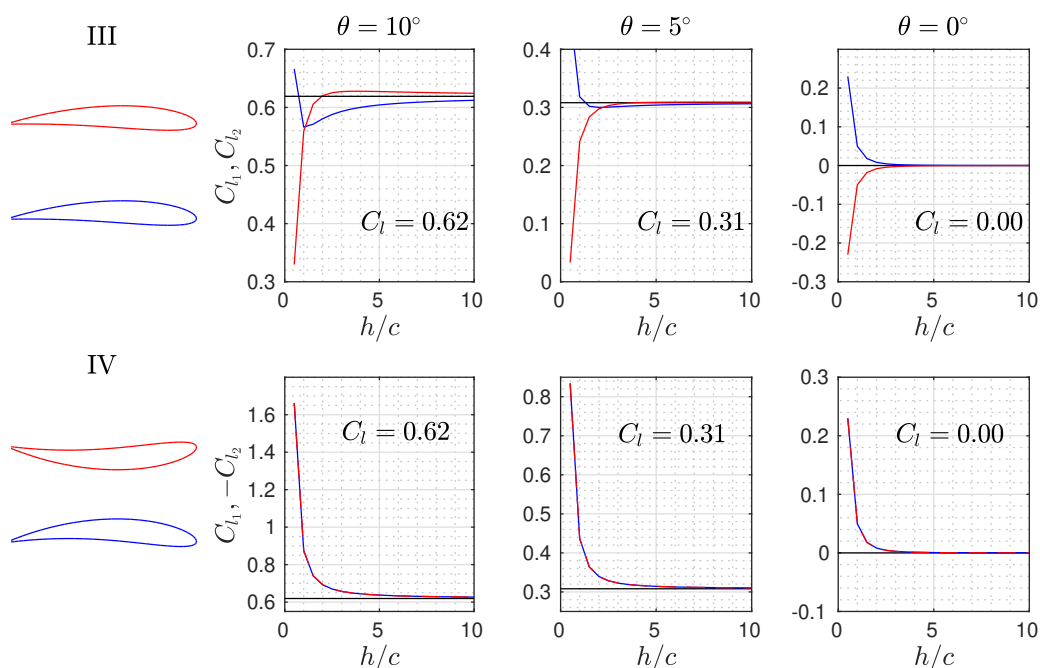


Figura 6: C_l para un arreglo de perfiles con combadura en forma de C .

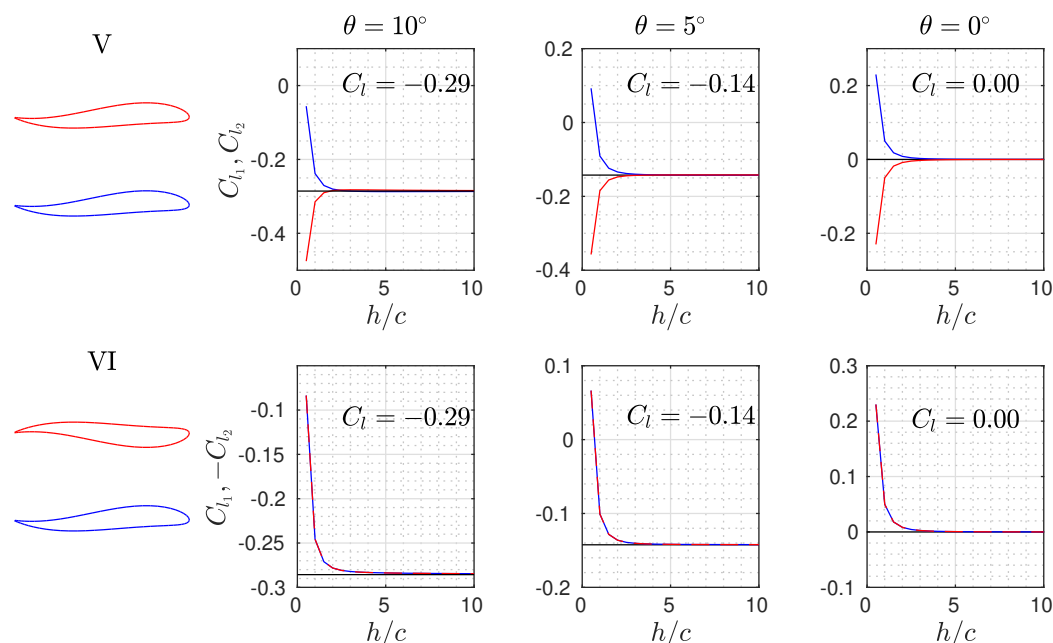


Figura 7: C_l para un arreglo de perfiles con doble combadura en forma de S .

Como trabajo futuro, se propone extender el estudio a un cosechador modelado como un sistema dinámico, considerando el cambio en el tiempo de la geometría de los perfiles, o de la posición relativa de los cosechadores.

REFERENCIAS

Aichino A., Ribero S., Rocca B., y Preidikman S. Aerodinámica no lineal e inestacionaria de perfiles no delgados que cambian de forma: aspectos cinemáticos del proceso de morphing.

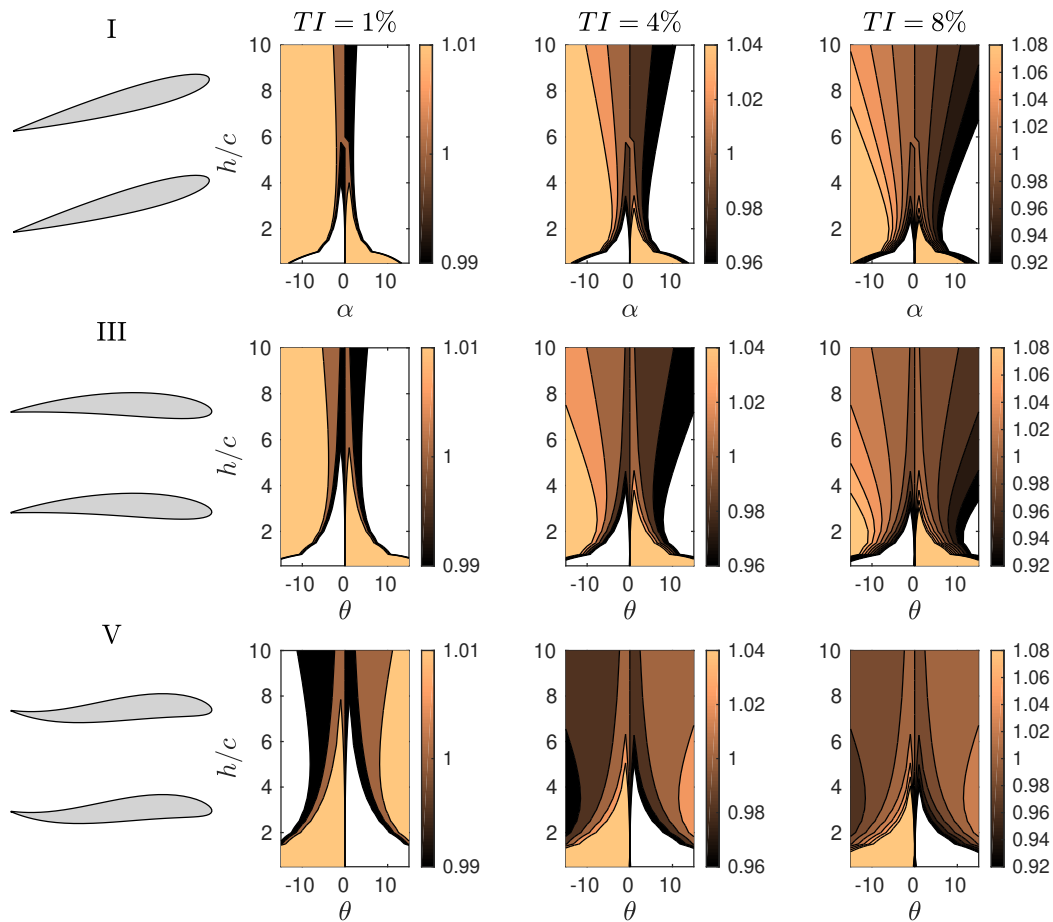


Figura 8: Mapa de la TI para configuraciones antisimétricas.

Congreso Argentino de Tecnología Espacial, 2021.

Beltramo E., Pérez Segura M.E., Rocchia B.A., Valdez M.F., Verstraete M.L., y Preidikman S. Constructive aerodynamic interference in a network of weakly coupled flutter-based energy harvesters. *Aerospace*, 7(12):167, 2020.

Katz J. y Plotkin A. *Low-speed aerodynamics*, volumen 13. Cambridge university press, 2001.

Mook D.T. y Dong B. Numerical simulations of wakes and blade-vortex interaction. *Journal of Fluids Engineering*, 116:5–21, 1997.

Williams B.R. An exact test case for the plane potential flow about two adjacent lifting aerofoils. *Aeronautical Research Council Reports and Memoranda*, 1971.