

## PÉNDULO PARAMÉTRICO ASISTIDO ELECTROMAGNÉTICAMENTE CON VISTAS A LA EXTRACCIÓN DE ENERGÍA AMBIENTAL

### ELECTROMAGNETICALLY ASSISTED PARAMETRIC PENDULUM WITH A VIEW ON ENERGY HARVESTING

**Juan N. Virla y Franco E. Dotti**

*Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional  
Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, [gimap@frbb.utn.edu.ar](mailto:gimap@frbb.utn.edu.ar).*

*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

**Palabras clave:** Energía undimotriz, recolección de energía, péndulo paramétrico, optimización.

**Resumen.** Se presenta el estudio computacional de un sistema de péndulo paramétrico asistido mediante un dispositivo electromagnético, pensado como dispositivo recolector de energía. El componente electromagnético representa en esencia una acción de control, cuyo objetivo es reducir el estado transitorio de las respuestas del sistema dinámico para distintas condiciones iniciales y dirigir al péndulo a la condición de rotación. La respuesta más energética del péndulo paramétrico es la de rotaciones puras, por lo que este movimiento es el más deseable al pensar en la extracción de energía ambiental. Se presenta en primer lugar el modelo matemático del sistema, el cual se valida experimentalmente. Se realizan a continuación simulaciones extensivas considerando diferentes configuraciones del péndulo con el objeto de cuantificar el comportamiento de este, verificar la eficiencia de la acción electromagnética, y ajustar los parámetros de diseño. Se concluye que el dispositivo de actuación estudiado es capaz de inducir rotaciones en el péndulo paramétrico.

**Keywords:** Wave energy, energy harvesting, parametric pendulum, optimization.

**Abstract.** A computational study is presented for an electromagnetically assisted parametric pendulum as an energy harvesting dispositive. The electromagnetic component represents in essence a control action, whose objective is to reduce the transitory state response for different initial conditions in the dynamic system and to guide the pendulum to a rotational state. The most energetic response for the parametric pendulum is that of pure rotations, which makes it the most desirable for energy harvesting. A mathematical model of the system is presented, which is experimentally validated. Extensive simulations are carried out taking into account different pendulum configurations to characterize the system, verifying the efficiency of the electromagnetic action, and adjusting the design parameters. It is concluded that the proposed dispositive is capable of inducing rotations to the parametric pendulum.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas pendulares cuentan con una rica dinámica no lineal, y su simplicidad permite realizar experimentos para validar los modelos matemáticos que los describen. En los últimos años, fueron las respuestas rotantes las que generaron mayor interés, debido a que son aquellas que presentan la mayor energía, y resultan atractivas para la extracción de energía de un medio externo. En este sentido, la aplicación más interesante resulta la de la generación de energía a partir del oleaje oceánico o undimotriz, con potencialidad para su aplicación futura a gran escala.

Estudios llevados a cabo con forzamientos periódicos mostraron que es relativamente simple conducir un péndulo a la condición de rotación mediante la correcta selección de parámetros para cada tipo de forzamiento externo (Lenci et al., 2011; Strzalko et al., 2012). No obstante, la complejidad de utilizar péndulos como dispositivos extractores de energía radica en la naturaleza no lineal de su comportamiento. De este modo, para un péndulo simple típico las soluciones rotantes coexisten con otros tres tipos de movimientos posibles, a saber: el reposo, las oscilaciones, y el movimiento caótico (Dotti et al., 2015). Sumado a esto, las respuestas transitorias antes de alcanzar movimientos estacionarios pueden ser prolongadas para ciertas combinaciones de parámetros y condiciones iniciales. Del mismo modo, las características no periódicas del oleaje del mar complican aun más la obtención de rotaciones en condiciones reales de forzamiento.

Lo anteriormente planteado deja en claro que si se desea extraer energía del oleaje marino, se vuelve necesaria una acción de control que modifique el movimiento de un sistema pendular diseñado para tal tarea, de modo que se reduzcan los tiempos de las respuestas transitorias y se maximice la conversión energética. En esta dirección, algunos desarrollos proponen modificar dichos parámetros activamente para obtener el tipo de movimiento deseado (de Paula et al., 2012; Reguera et al., 2016; Das y Wahi, 2016). En este trabajo se propone una acción de control basada en pulsos electromagnéticos, cuyo objetivo es inducir rotaciones en un sistema pendular a partir de respuestas no rotatorias. Esta técnica tiene como principal ventaja la eliminación de todo tipo de acoplamiento mecánico. Se basa en la aplicación conveniente de un pulso a través de un electroimán fijo en la estructura de soporte, actuando sobre imanes ubicados en los extremos de los brazos del péndulo.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

La ecuación del movimiento de un péndulo paramétrico forzado externamente, ubicado en un plano y que rota sobre un eje que corta perpendicularmente a dicho plano en  $O$  es

$$I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta \frac{d\theta}{dt} + Ml_c \left( g + \frac{d^2G}{dt^2} \right) \text{sen}(\theta) = 0, \quad (1)$$

donde  $\theta(t)$  representa el ángulo de desplazamiento del centro de masa del cuerpo en movimiento,  $I_0$  es su inercia,  $\beta$  es un coeficiente de amortiguamiento,  $M$  es la masa total del cuerpo,  $l_c$  es la distancia del centro de masa al eje de rotación y  $G$  es la ecuación del forzamiento externo. Los valores de inercia, masa y del centro de masa se determinan numericamente conociendo la geometría y propiedades de los materiales del sistema pendular. El forzamiento externo toma la forma

$$G(t) = -H_S \text{Cos}(\Omega_S t), \quad (2)$$

con  $H_S$  representando la amplitud del forzamiento externo, mientras que  $\Omega_S$  representa su frecuencia.

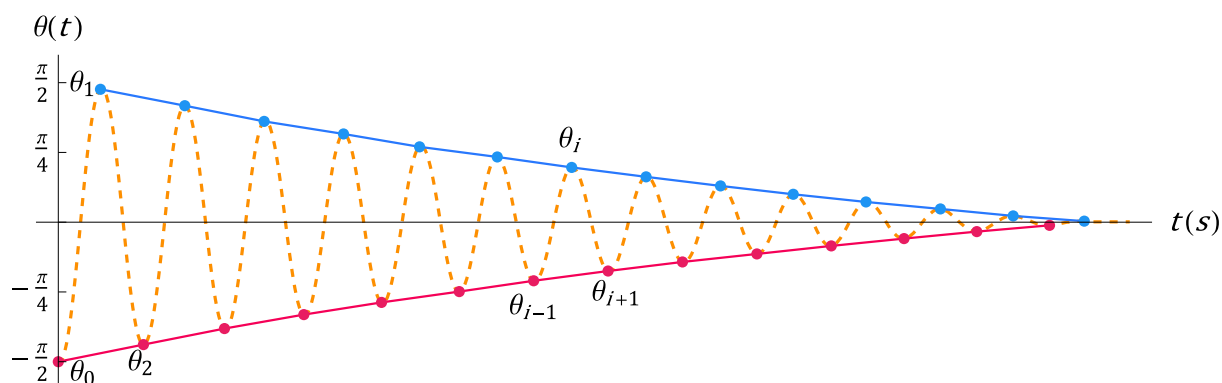


Figura 1: Picos temporales de las oscilaciones. Los picos positivos (azul) son separados de los negativos (rosa) para el análisis del decremento. Los valores de amplitud y tiempo de ocurrencia son determinados y guardados en listas separadas

## 2.1. Coeficiente de amortiguamiento

El método del decremento logarítmico es ampliamente utilizado debido a su sencillez y a su capacidad para determinar las características de la fricción viscosa a partir de datos obtenidos de ensayos para sistemas subamortiguados. En este sentido, el coeficiente de decremento es determinado para cada ciclo de oscilación, con el  $i$ -ésimo periodo  $T_i$  y las amplitudes de los picos inicial y final del  $i$ -ésimo ciclo  $\theta_{i-1}$  y  $\theta_{i+1}$  respectivamente (Figura 1). El valor así obtenido permite conocer el decremento específico para dicho ciclo, y el promedio de todos los decrementos calculados provee un coeficiente de fricción constante para el modelo matemático.

$$\delta_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \ln \frac{\theta_i}{\theta_{i+1}}. \quad (3)$$

Cuando los valores de decrementos varían en un rango amplio, este método pierde exactitud y los resultados se alejan de los datos del ensayo. Se propone entonces un modelo de amortiguamiento basado en el método del decremento logarítmico, donde la expresión final del coeficiente  $\beta$  es una ecuación dependiente del ángulo de rotación  $\theta(t)$ . Dicha ecuación se obtiene a partir de los coeficientes para cada ciclo de oscilación, analizando por separado los conjuntos de picos positivos y negativos. En la sección 3 se analizan los valores obtenidos, y se evalúan los picos utilizando técnicas de mínimos cuadrados, proponiendo una ecuación polinómica del decremento en función de la amplitud del ángulo de rotación, que toma la forma

$$\beta = \text{sign}(\theta(t)) \times (a_n \theta(t)^n + a_{n-1} \theta(t)^{n-1} + \dots + a_2 \theta(t)^2 + a_1 \theta(t) + a_0). \quad (4)$$

Este modelo representa una adaptación del método tradicional de decremento logarítmico para situaciones donde exista una clara relación entre la amplitud de oscilación y el coeficiente de decremento. Más aun, en el caso particular cuando  $n = 0$ , el desarrollo de la ecuación devuelve el mismo resultado que el valor promediado del método tradicional. El la función signo dentro de  $\beta$  tiene como finalidad mantener la condición de extracción de energía de la función de decremento.

## 2.2. Acción de control

El sistema mediante el cual se propone influir en el movimiento de la rueda pendular consta de imanes colocados en los extremos de cada brazo, y un electroimán que puede ser excitado

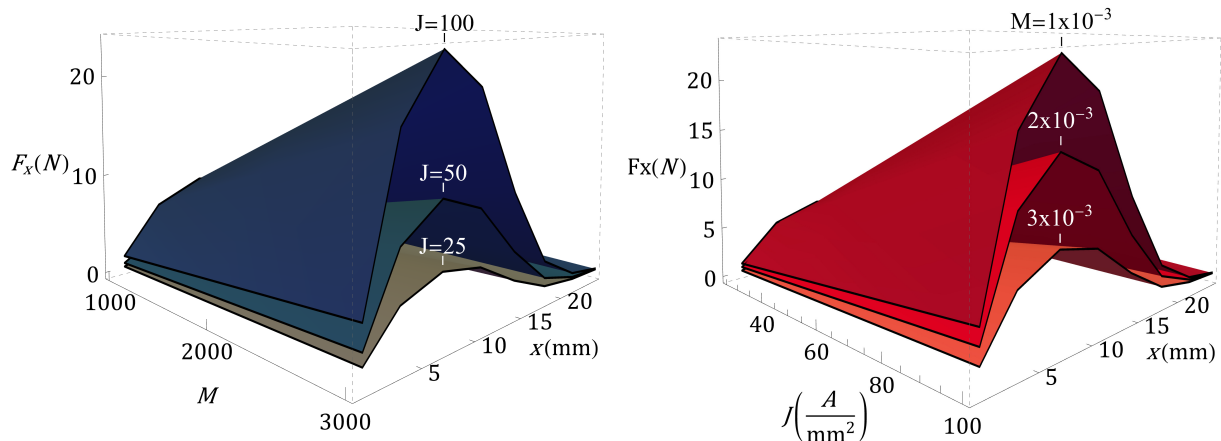


Figura 2: Comparación fuerzas tangenciales obtenidas por métodos numéricos para: a) Corrientes fijas en la bobina. b) Valores de magnetización fijos en el imán.

mediante una corriente cuando se cumplen ciertas condiciones pre-establecidas. La activación de la acción de control es dependiente tanto de la posición angular  $\theta$  como de  $d\theta/dt$ .

La acción sobre el péndulo corresponde a la fuerza de Lorentz ejercida por el campo electromagnético generado por el electroimán, sobre el imán montado en la rueda. Esta fuerza se obtiene mediante la resolución de las ecuaciones de Maxwell mediante elementos finitos en un dominio tridimensional. La implementación se realiza en el programa de cálculo numérico FlexPDE. La componente tangencial de la fuerza calculada es la que impulsa al péndulo, mientras que la radial debe ser tenida en cuenta para el diseño del soporte del eje sobre el que rota el péndulo. Analizando el conjunto bobina-imán con distintos valores de densidad de corriente  $J$ , magnetización del imán  $M$  y distancias entre los centros de ambos componentes, se obtuvieron los estados magnetostáticos del sistema, lo cual implica que se despreció el movimiento del péndulo en el cálculo. La justificación para dicha simplificación radica en que la velocidad de acción del motor de pulsos es mucho mayor que la del movimiento del sistema pendular, por lo cual esta última puede ser despreciada.

Las simulaciones se llevaron a cabo considerando el desplazamiento horizontal del imán con respecto a la bobina, y para pequeños desplazamientos, que es donde se aplica la acción de control, los resultados obtenidos son semejantes a los que se esperan al considerar que el imán rota con respecto a eje  $O$ .

Se realizaron simulaciones comparativas de las fuerzas resultantes utilizando un modelo con corriente fija, y otro con magnetización fija, obteniéndose en ambos casos fuerzas máximas equivalentes (véase la Figura 2). La variación de fuerza obtenida indica una dependencia lineal con respecto tanto a la densidad de corriente como de la magnetización, y polinómica de grado superior con respecto a la separación entre los ejes. Se propone entonces una función de control dependiente de  $J$ ,  $M$  y para pequeños desplazamientos se toma  $x = r\theta$ .

Empleando el set de datos obtenidos mediante el cálculo de elementos finitos, se propuso un polinomio  $c(\theta)$  para describir el comportamiento de la fuerza de la acción de control. Al resolver para el set de datos mediante el método de mínimos cuadrados, se obtiene la magnitud de la fuerza actuante para cada conjunto de coeficientes  $J$  y  $M$ , los cuales deben luego ser determinados experimentalmente para ajustar el modelo. La ecuación obtenida para  $c(\theta)$  es

$$c(\theta) = 0,143 + 1,759x + 0,009x^2 - 0,016x^3 - \dots - 0,0002x^4 + \dots \\ \dots + 0,0001x^5 - 7,28 \times 10^{-6}x^6 + 1,66 \times 10^{-7}x^7 - 1,4 \times 10^{-9}x^8. \quad (5)$$

Si ahora se tienen en cuenta además las condiciones de activación, la función de la acción de control es

$$P(\theta, \theta') = \frac{JM}{10^5} \times c(\theta) * H(\theta) * H(\theta') * Sgn(\theta'), \quad (6)$$

donde  $H(\theta)$  y  $H(\theta')$  son funciones de Heaviside definidas como

$$H(\theta) = \begin{cases} 0, & |\theta| > \theta_{act} \\ 1, & \theta_{des} \leq |\theta| \leq \theta_{act} \\ 0, & |\theta| < \theta_{des} \end{cases} \quad H(\theta') = \begin{cases} 1, & |\theta'| \leq v_{rmin} \\ 0, & |\theta'| > v_{rmin} \end{cases},$$

con  $\theta_{act}$  y  $\theta_{des}$  los ángulos de activación y desactivación respectivamente, y  $v_{rmin}$  la velocidad mínima de rotación. Considerando la simetría existente en el dispositivo, las fuerzas para valores negativos de  $\theta$  se consideran iguales y de sentido contrario a las aquí desarrolladas. Una función signo  $Sgn(\theta')$  permite accionar el dispositivo en un lado u otro de la bobina dependiendo del sentido de rotación.

### 2.3. Ecuación del movimiento

En base al desarrollo anterior y al tomar en cuenta la acción de control, el modelo matemático para la dinámica del sistema pendular propuesto con la acción de control es

$$I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta \frac{d\theta}{dt} + Ml_c(H_s \Omega_S^2 \text{Cos}(\Omega_S t) + g) \text{Sin}(\theta) - P(\theta, \theta') = 0, \quad (7)$$

que puede ser resuelta de manera numérica reemplazando los coeficientes obtenidos de manera experimental en los ensayos. En la sección 4 se resuelve de manera numérica esta ecuación diferencial y se analiza su capacidad de predecir el movimiento del dispositivo pendular.

## 3. MODELO EXPERIMENTAL

### 3.1. Descripción del dispositivo

La rueda pendular está fabricada en plástico de baja densidad ( $\rho_{plastico} = 0,7056 \text{ g/cm}^3$ ), con un diámetro externo de 205 mm que aporta rigidez estructural. Cuatro brazos separados en ángulos de  $\pi/2$  rad permiten definir distintas configuraciones pendulares. Se denota al brazo de mayor masa y longitud como brazo principal (ver Figura 3) con masa  $m_1$  y longitud  $l_1$ , y al resto de ellos en sentido antihorario siguiendo la misma regla. Cada uno de estos brazos posee 4 orificios orientados de forma radial a distancias de 25, 45, 65 y 85 mm del eje de rotación, donde se colocan las masas utilizadas para los estudios. La masa de la estructura de plástico es de 67,5 g.

Para el armado de los experimentos se considera que se puede colocar como máximo una masa en cada brazo, y que los brazos 2 y 4 deben poseer masas similares a distancias similares del eje de rotación. Las masas son fabricadas en cilindros de acero de 16 mm de diámetro, con alturas que toman valores discretos de entre 10 y 35 mm. La densidad del acero utilizado es  $\rho_{acero} = 7,7525 \text{ g/cm}^3$ .

El dispositivo móvil se completa con imanes cilíndricos permanentes N52 de 15 mm de diámetro y 4 mm de espesor, ubicados en el extremo de cada brazo y orientado de forma radial con su polo norte apuntando en el sentido contrario al eje de rotación. La masa de cada uno de estos imanes es de 5,3 g, y su centro de masa se encuentra a 102 mm del eje de rotación.

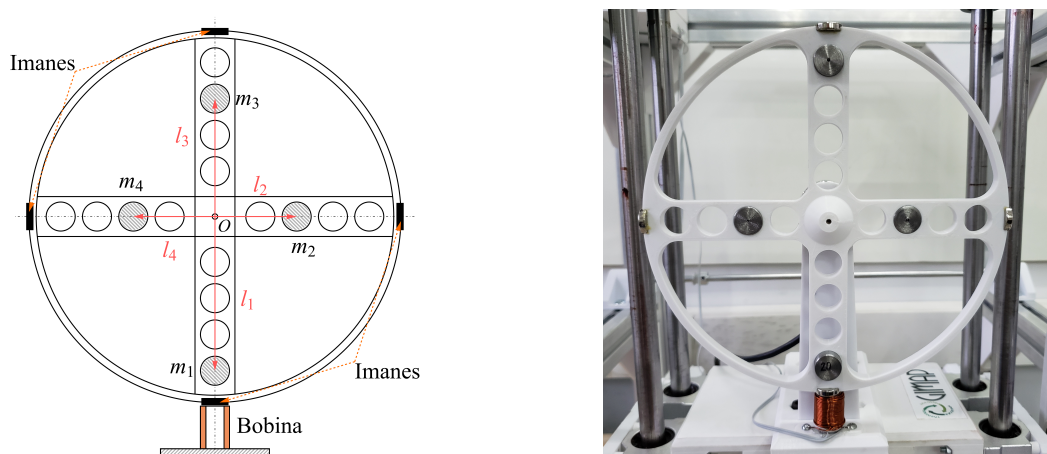


Figura 3: Sistema pendular de masas múltiples con su dispositivo de acción de control. La masa  $m_1$  denota al brazo principal de longitud  $l_1$ , y el resto de los brazos siguiendo la misma regla en sentido antihorario.

El conjunto se encuentra acoplado mediante un eje de 3 mm de diámetro a un brazo de sujeción. El brazo se encuentra diseñado de tal manera que permite sostener no solo al eje del péndulo, sino también a un dispositivo de medición del desplazamiento angular, modelo LPD3806-400BM-G5-24C, que realiza 50 mediciones por segundo. De este modo se puede determinar la curva temporal del movimiento, y con ella las características físicas del sistema.

El dispositivo de control es una bobina de núcleo de aire fabricada con alambre esmaltado de 0.7 mm de diámetro. Las dimensiones de la bobina son  $d_{int} = 5$  mm,  $d_{ext} = 8$  mm y  $h = 18$  mm, y para su fabricación se arrollaron 88 espiras, por las cuales circula una corriente continua de 24 V y 1,46 A. La distancia entre el extremo de la bobina y los imanes es de 0,5 mm.

Para la generación de las funciones de forzamiento externo se diseñó una plataforma móvil acoplada a un mecanismo de movimiento recíproco accionado por un motor de paso a paso. La amplitud del forzamiento puede configurarse para cada ensayo con un rango continuo de 2 a 44 mm, y con saltos de 30 mm entre posiciones para el rango 68 a 368 mm, lo que posibilita una gran variedad de ensayos para amplitudes de forzamiento bajas, y ensayos bien definidos para amplitudes mayores.

El motor paso a paso permite ajustar perfiles de movimiento específicos para simular distintos perfiles de olas, con velocidades angulares máximas de 80 rpm. Para la verificación de los modelos matemáticos, el equipo de ensayos permite la generación de forzamientos periódicos bien controlados, mientras que los forzamientos estocásticos permiten introducir variaciones de velocidad o periodos sin forzamiento aleatorios para asemejar de mejor manera el oleaje marino y de esta manera verificar la robustez de la acción de control.

### 3.2. Determinación de parámetros de inercia y amortiguamiento

En la Figura 3 se mostró un esquema simplificado del dispositivo pendular. La masa de cada uno de los componentes que lo forma fue determinada por separado con una precisión de  $\pm 0,1$  g, teniendo también en cuenta en el estudio a las masas e inercias tanto de la estructura del péndulo, como de los imanes del sistema de control. La configuración para los ensayos utilizados en este trabajo es  $m_1=31,2$  g,  $m_2=m_4=15,6$  g,  $m_3=18,7$  g,  $l_1=l_3=85$  mm,  $l_2=l_4=25$  mm. A partir de la configuración del ensayo se determinaron la masa total, la ubicación del centro de masa y el momento de inercia polar referido al eje de rotación del sistema pendular

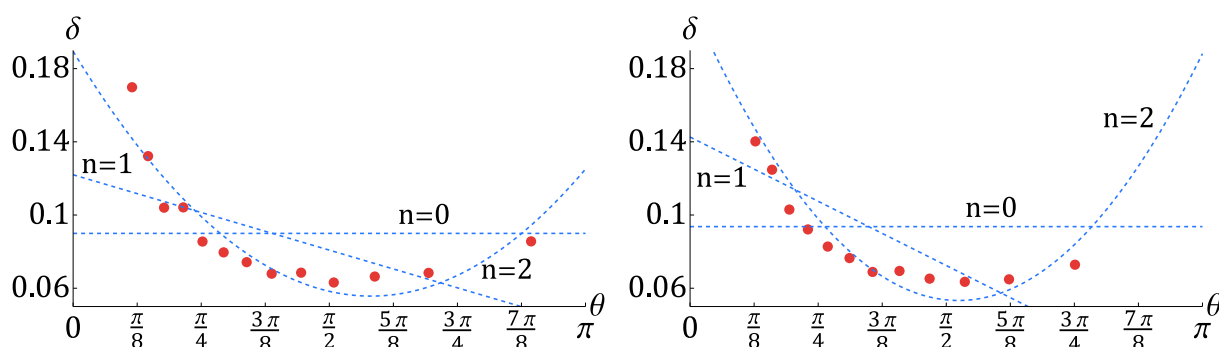


Figura 4: Factores de decremento en relación a la amplitud del pico inicial del ciclo para el cual fue determinado. A la izquierda se muestran los resultados usando los picos positivos, a la derecha los de los picos negativos. En rojo se denotan los valores de decremento obtenidos mediante la ecuación 3, y en celeste las distintas funciones desarrolladas mediante la ecuación 4.

Tabla 1: Coeficientes de amortiguamiento para distintas condiciones iniciales de ensayo.  $\theta_0$  representa la posición angular inicial del ensayo,  $\omega_{expp}$  la frecuencia natural amortiguada del ensayo,  $\delta(\theta)_{n=0}$  muestra el coeficiente de decremento obtenido por el método tradicional y  $\delta(\theta)_{n=1}$  la función lineal obtenida mediante mínimos cuadrados.

Ensayo N°	$\theta_0$	$\omega_{expp}$ (1/s)	$\delta(\theta)_{n=0}$	$\delta(\theta)_{n=1}$
1	$-\pi/4$	3,4632	0,00013490	$0,00024672 - 0,00022194 \theta(t)$
2	$\pi/4$	3,4631	0,00012638	$0,00021156 - 0,00015275 \theta(t)$
3	$-0,35\pi$	3,4051	0,00012340	$0,00023181 - 0,00016950 \theta(t)$
4	$0,35\pi$	3,4046	0,00010960	$0,00018922 - 0,00011280 \theta(t)$
5	$-0,414\pi$	3,3821	0,00011443	$0,00020674 - 0,00013067 \theta(t)$
6	$0,414\pi$	3,3763	0,00010666	$0,00018330 - 0,00009992 \theta(t)$
7	$-0,446\pi$	3,3583	0,00010464	$0,00018258 - 0,00009836 \theta(t)$
8	$0,446\pi$	3,3543	0,00010427	$0,00017379 - 0,00008528 \theta(t)$
9	$-0,9\pi$	3,1839	0,00009092	$0,00013175 - 0,00003643 \theta(t)$
10	$0,89\pi$	3,1740	0,00008996	$0,00012199 - 0,00002621 \theta(t)$

completo. Los valores obtenidos para la posición de reposo son  $m_{tot} = 169,75$  g,  $l_{cm} = (0, -6,29, 0)$  mm e  $I_0 = 1.021.451,28$  gmm<sup>2</sup>.

Se realizaron diez ensayos para distintas condiciones iniciales de posición, siempre con  $v_0 = 0$ , y se obtuvieron las respuestas temporales de la posición angular, con las cuales se determinó la amplitud y tiempo de ocurrencia de los picos de las oscilaciones (Figura 1). Descartando los eventos donde  $\theta_{pico} \leq 0,1$  rad debido a la precisión de la medición, los picos fueron separados en dos grupos, uno para aquellos con signo positivos y otro para los de signo negativos. Para cada ciclo de oscilación definido entre dos picos consecutivos se determinaron el decremento logarítmico según la ecuación 3, y la función de decremento modificada refiriendo el valor del decremento de cada ciclo a la amplitud del pico inicial de este, para luego generar una lista que fue evaluada mediante técnicas de mínimos cuadrados, obteniéndose un polinomio de grado  $n$  (Figura 4). En la tabla 1 se muestran los resultados de los ensayos realizados, que luego son promediados para obtener los valores utilizados en las simulaciones de verificación del modelo matemático.

Para  $n = 0$  se aprecia una tendencia a la baja del coeficiente a medida que crece el valor inicial de  $\theta_0$ . Esto puede explicarse al considerar que existe un factor de fricción de Coulomb

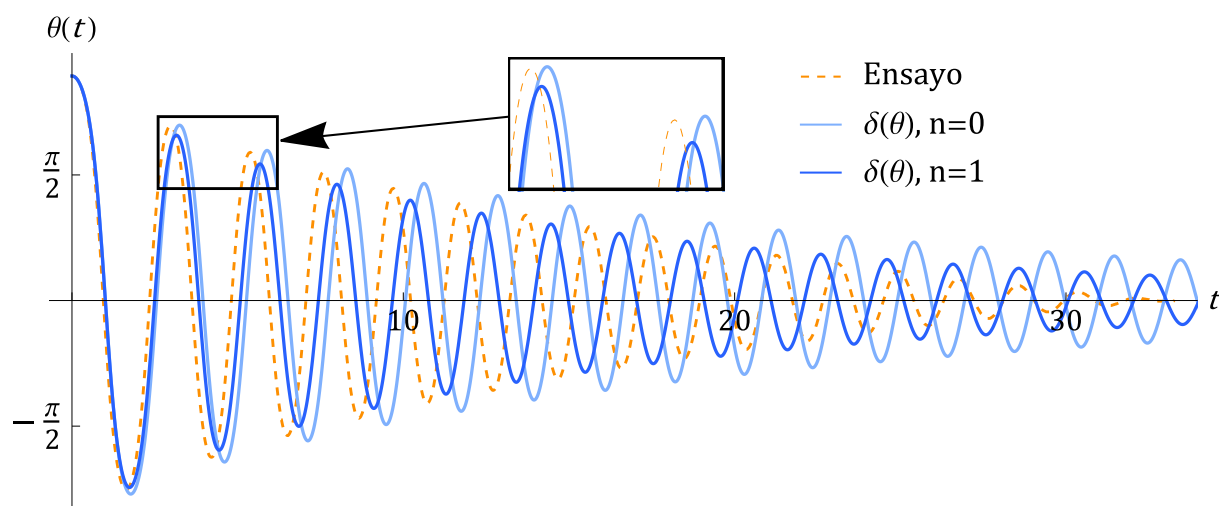


Figura 5: Comparación de respuestas temporales para la solución numérica del modelo matemático (ecuación 8). En líneas de trazo naranja se muestra la respuesta temporal experimental. En celeste la respuesta predicha por el modelo de decaimiento logarítmico tradicional, y en azul aquella del modelo modificado.

que depende del signo de la velocidad y no es capturado por este método, pero sin embargo afecta a los resultados obtenidos. En tal sentido, todos los ensayos que inician en un ángulo negativo cuentan con un factor de fricción resultante mayor que para los casos de ángulos iniciales positivos de igual amplitud, lo cual indica la existencia de rozamientos que producen fricción seca.

Para el estudio de decaimiento se considera la ecuación 7 sin excitación externa, es decir que  $H_s = 0$  y que  $P(\theta, \theta') = 0$ . De este modo, la ecuación utilizada es

$$I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + c \operatorname{Sgn} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) + M l_c g \operatorname{Sin}(\theta) = 0, \quad (8)$$

la cual al ser resuelta de forma numérica para las condiciones iniciales y con los coeficientes determinados para un determinado ensayo, provee la respuesta temporal esperada del sistema sin excitación externa. El modelo propuesto de decaimiento es comparado con el modelo tradicional en la Figura 5. Se concluye de este estudio que el modelo propuesto predice de mejor modo el decaimiento de la amplitud en las sucesivas oscilaciones, y se acerca más a la frecuencia real del sistema ensayado que el método tradicional.

#### 4. COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Las ecuaciones desarrolladas permiten finalmente realizar una comparación entre las historias temporales de los ensayos realizados con simulaciones numéricas, y de este modo validar el modelo matemático propuesto. En la Figura 6 se muestra la historia temporal de las velocidades cuando sobre la rueda pendular actúa solamente el motor de pulsos para bajos niveles de corrientes en la bobina. Se comprueba que cuando la fuerza electromagnética no es lo suficientemente grande, el sistema alcanza la condición de oscilación con una amplitud máxima en la que la fuerza de amortiguamiento se equipara con la de la acción de control. Para el caso de fuerzas de mayor magnitud, tanto en el ensayo como en la simulación se obtienen rotaciones luego de un periodo de oscilaciones que van aumentando en amplitud hasta superar un límite, momento en el que la rueda pendular comienza a rotar (Figura 7). La acción de control se manifiesta en



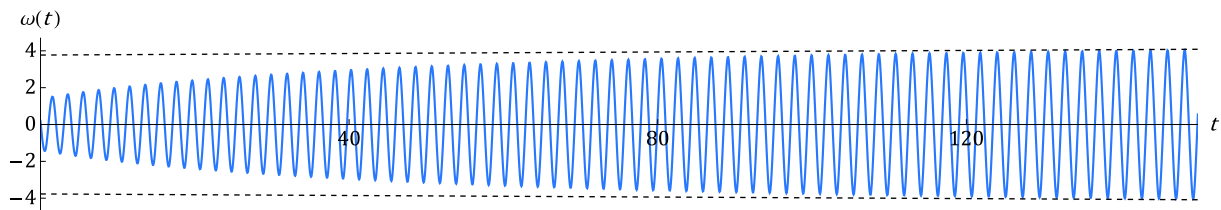


Figura 6: Respuesta temporal simulada de la velocidad de la rueda pendular para una baja fuerza electromagnética de control y sin forzamiento externo. El estado transitorio crece, y en la condición estacionaria se alcanza el equilibrio entre el decremento por pérdidas de energía y el impulso de la acción de control

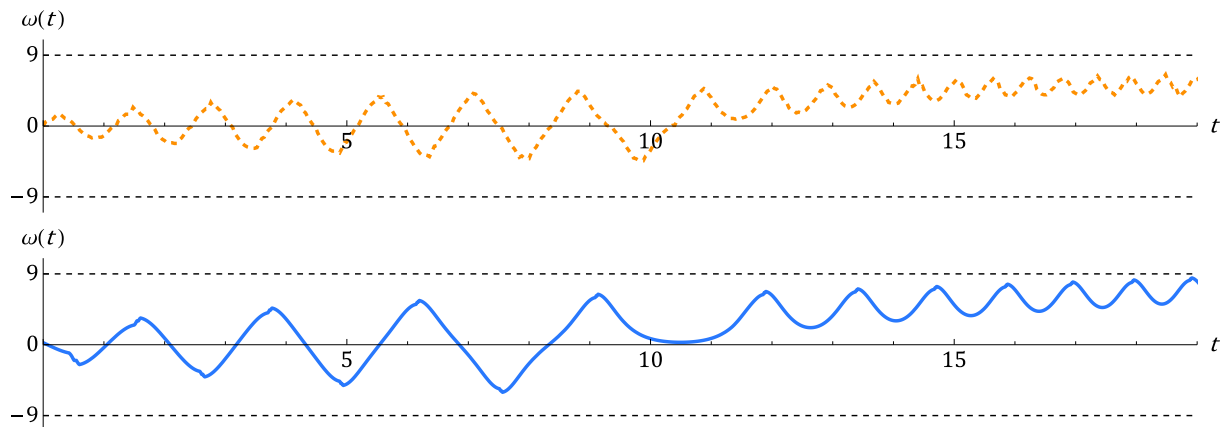


Figura 7: Respuestas temporales de velocidades de la rueda pendular con alta fuerza electromagnética de control y sin forzamiento externo. En naranja se muestra un ensayo realizado con condiciones iniciales aleatorias. En azul se muestra la respuesta temporal simulada para las mismas condiciones iniciales.

la forma de saltos de amplitud en los picos de las curvas de velocidad, quedando demostrada la capacidad del dispositivo de inducir rotaciones por cuenta propia. Cabe aclarar en este punto que las discrepancias en las frecuencias de oscilación son debidas a que el ensayo experimental fue realizado para otra configuración de masas. Esto sin embargo permite corroborar que el modelo no responde exclusivamente a la configuración para la cual fueron determinados los coeficientes utilizados durante este trabajo, sino que el comportamiento cualitativo es similar para distintas configuraciones experimentales.

Finalmente, en la Figura 8 se simula la Ecuación 7 sin acción de control con  $H_s=9$  mm y  $\Omega_s=6,404$  1/s, y luego con las mismas condiciones iniciales se realiza la simulación con acción de control de baja fuerza electromagnética. De este modo se comprueba que incluso si la acción de control no es capaz por si misma de inducir rotaciones en la rueda pendular, la configuración de la acción de control es tal que permite alcanzar el estado dinámico buscado de manera eficaz y veloz.

## 5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se detalló la implementación de una acción de control de tipo electromagnética, sin acoplamiento mecánico y accionada por una ley de control que permite inducir rotaciones en un sistema pendular de masas múltiples. La acción de control permite acortar de manera significativa el estado transitorio del sistema pendular, conduciéndolo a la condición de

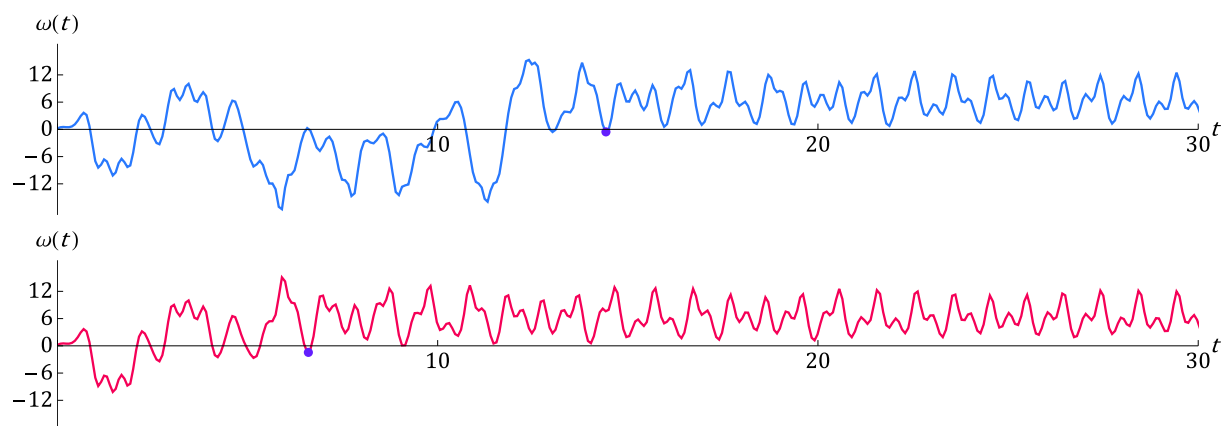


Figura 8: Respuestas temporales simuladas para las condiciones iniciales  $\theta_0=-0,0630754$  y  $\omega_0=0,21152$ , para una rueda pendular con forzamiento externo  $G(t) = -0,009 * \cos(6,404 * t)$ . La rueda sin acción de control (azul) alcanza las rotaciones luego de 14,425 segundos (marcador violeta), mientras que la rueda pendular con la acción de control de baja fuerza electromagnética (rosa) alcanza las rotaciones luego de 6,6 segundos.

rotación en un tiempo menor al que se necesita cuando solamente actúa el forzamiento externo.

Si bien el dispositivo cumple su función, es necesario realizar la optimización de la ley de control, de modo que el consumo energético alcance un valor mínimo manteniendo la capacidad de inducir rotaciones en los dispositivos pendulares.

La acción de control destaca por no hallarse acoplada mecánicamente a la rueda pendular, evitando un aporte extra de fricción y por consiguiente, pérdidas de energía. Al mismo tiempo presenta una simplicidad de fabricación que la vuelve atractiva para su futura implementación en prototipos sometidos a la inclemencia del oleaje oceánico.

## REFERENCIAS

- Das S. y Wahi P. Initiation and directional control of period-1 rotation for a parametric pendulum. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 472(2196):20160719, 2016. doi:<https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0719>.
- de Paula A., Savi M., Wiercigroch M., y Pavlovskaja E. Bifurcation control of a parametric pendulum. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22:1250111, 2012. doi:10.1142/S0218127412501118.
- Dotti F., Reguera F., y Machado S. A review on the nonlinear dynamics of pendulum systems for energy harvesting. En *PANACM 2015 First Pan-American Congress on Computational Mechanics*. 2015.
- Lenci S., Brocchini M., y Lorenzoni C. Experimental Rotations of a Pendulum on Water Waves. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 7(1), 2011. ISSN 1555-1415. doi:10.1115/1.4004547. 011007.
- Reguera F., Dotti F.E., y Machado S.P. Rotation control of a parametrically excited pendulum by adjusting its length. *Mechanics Research Communications*, 72:74–80, 2016. ISSN 0093-6413. doi:<https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2016.01.011>.
- Strzalko J., Grabski J., Wojewoda J., Wiercigroch M., y Kapitaniak T. Synchronous rotation of the set of double pendula: experimental observations. *Chaos*, 22(4):047503, 2012. doi:10.1063/1.4740460.