

BANDAS DE ATENUACIÓN MULTIFRECUENCIA EN PLACAS DE METAMATERIAL

MULTIFREQUENCY ATTENUATION BANDS IN METAMATERIAL PLATES

Víctor H. Cortínez^{a,b,c}, Patricia N. Dominguez^{a,b}, Laura V. González de Paz^b y
Marianela Ripani^{b,c,d}

^a*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada CIMTA, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, vcortine@hotmail.com*

^b*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, pdoming@uns.edu.ar*

^c*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET*

^d*Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ingeniería, Laboratorio de Métodos Numéricos en Ingeniería (LMNI-LAME), Buenos Aires, Argentina.*

Palabras clave: placas localmente resonantes, atenuación de vibraciones, resonadores distribuidos.

Resumen. En este trabajo se presenta un enfoque para estudiar la dinámica de estructuras de metamaterial conformadas por una placa a la que se acopla un sistema general de resonadores elásticos distribuidos periódicamente sobre la misma. El análisis matemático de la dinámica transversal de la metaestructura se representa mediante una placa homogénea equivalente, formulada mediante la teoría de Mindlin, aunque presentando una densidad efectiva dependiente de la frecuencia de excitación. En el rango de frecuencias donde dicha densidad se hace negativa no existen frecuencias naturales y en consecuencia las amplitudes de vibración serán moderadas. Tal rango frecuencial se denomina “bandgap”. Se obtiene una expresión general de la densidad equivalente para un sistema arbitrario de resonadores como así también fórmulas explícitas para algunos casos particulares.

Keywords: locally resonant plates, vibration attenuation, distributed resonators.

Abstract. This paper presents an approach to study the dynamics of metamaterial structures composed by a plate with a coupled general system of periodically distributed elastic resonators. The mathematical analysis of the transversal dynamics of the metastructure is represented by an equivalent homogeneous plate, formulated using Mindlin's theory, but presenting an effective density that is dependent on the excitation frequency. In the frequency range where this density becomes negative, there are no natural frequencies and consequently the vibration amplitudes will be moderate. Such a range is known as bandgap. A general expression of the equivalent density is obtained for an arbitrary system of resonators as well as explicit formulas for some particular cases.

1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años, ha adquirido un interés notable el desarrollo de metamateriales y metaestructuras elásticas por sus propiedades mejoradas para la atenuación de vibraciones mecánicas y señales acústicas. Una de las características más importantes de tales metamateriales es la existencia de rangos de frecuencias denominados “bandgaps” (BG) en los cuales la propagación de ondas es fuertemente atenuada (Peng et al., 2015). Entre las posibles aplicaciones tecnológicas se han concebido metaestructuras localmente resonantes, consistentes de una estructura base (viga o placa, por ejemplo) acoplada a una serie de sistemas masa-resorte distribuidos regularmente sobre la misma (Sugino et al., 2017; Chen, J-H. et al., 2022; Wang et al., 2017). Existen varias aplicaciones de interés en relación a este tipo de estructuras que forman parte de diversos sistemas de ingeniería civil y mecánica sometidos a cargas dinámicas y en los que las amplitudes de vibración deben controlarse para evitar daños prematuros por fatiga del material. Asimismo, las placas de metamaterial tienen interés como paneles de aislación acústica ya que si se minimizan sus amplitudes de vibración también lo hará la transmisión de sonido a través de los mismos (Dominguez et al. 2021).

Clásicamente, el problema se ha estudiado considerando la propagación de ondas en una estructura periódica (placa y resonadores acoplados) infinita aplicando el enfoque de Bloch-Floquet (Chen, J-H. et al., 2022). A partir de un análisis de dispersión de ondas pueden determinarse los bandgaps en función de las características de la placa de metamaterial. Este enfoque, sin embargo, no brinda información sobre el comportamiento de las metaestructuras finitas. Por tal motivo, se han efectuado estudios numéricos de la dinámica de metaestructuras finitas recurriendo a simulaciones numéricas, generalmente realizadas con el método de elementos finitos (MEF) y usando como aproximación inicial la información sobre los bandgaps obtenida mediante el análisis de dispersión de ondas (Peng et al., 2015; Wang et al., 2017). Sin embargo, Sugino et al. (2017) han demostrado, al analizar una estructura de metamaterial consistente en una placa Kirchoff acoplada a varios sistemas masa-resorte de un grado de libertad, que la formación de bandgaps puede ser comprendida a partir del análisis modal de estructuras finitas. Esencialmente, analizaron las características del espectro en frecuencias de la placa de metamaterial. Recientemente, tal enfoque se extendió al estudio de metaestructuras de placas rigidizadas (Zhao et al., 2023).

Por otra parte, los autores han desarrollado otro método para determinar bandgaps en metaestructuras finitas aunque restringido a vigas flexo-torsionales (Dominguez et al., 2022; Cortínez y Dominguez, 2022).

En este trabajo se presenta una generalización de este último enfoque para estructuras de metamaterial conformadas por placas Mindlin acopladas a un sistema general de resonadores elásticos distribuidos periódicamente, con el fin de determinar la formación de bandgaps para estructuras finitas generalizando así la propuesta de Sugino et al. (2017).

Aquí, el análisis matemático de la dinámica transversal de la metaestructura tipo placa se representa mediante una placa homogénea equivalente presentando una densidad efectiva dependiente de la frecuencia de excitación. Los bandgaps se determinan donde dicha densidad se hace negativa. Se obtiene una expresión general de la densidad equivalente para un sistema arbitrario de resonadores y fórmulas explícitas para algunos casos particulares. El presente estudio está limitado a placas localmente resonantes (Rohan et al., 2009), es decir no se contempla el efecto Bragg. Se muestran ejemplos numéricos de aplicación.

2 DINÁMICA FLEXIONAL DE PLACAS LOCALMENTE RESONANTES CON SISTEMAS ARBITRARIOS DE RESONADORES DISTRIBUIDOS

Se presentan a continuación las ecuaciones gobernantes para la dinámica flexional de placas con resonadores distribuidos y luego se obtiene una expresión general para la densidad equivalente de la placa localmente resonante.

2.1 Ecuaciones gobernantes para la dinámica de placas con resonadores distribuidos

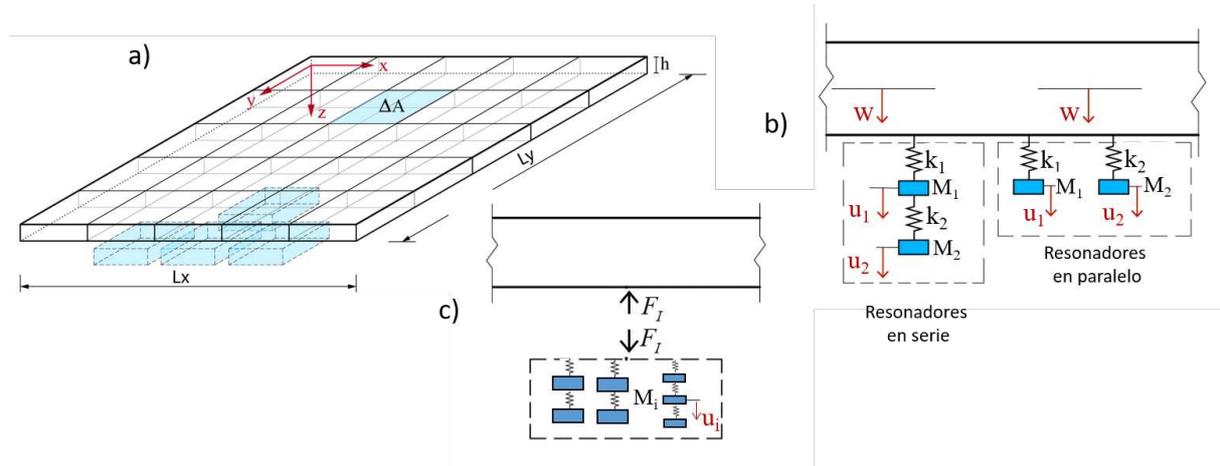


Figura 1: Placa Mindlin con resonadores periódicamente distribuidos: a) Geometría de la placa, b) Esquema de resonadores en serie y en paralelo, c) Interacción placa-sistema de resonadores.

Se considera una placa de pequeño espesor, concebida como una sucesión de N_s celdas de igual área ΔA (Figura 1a), sujeta a cargas armónicas transversales. Cada celda (o tramo de placa) contiene N_r resonadores orientados en la dirección del eje z como se muestra en la Figura 1c. Se asume que las N_s celdas tienen idéntica configuración de resonadores y que la distancia entre ellas es muy pequeña frente al área de la placa. Esta característica hace posible considerar, de manera aproximada, que los resonadores se encuentran distribuidos de manera continua sobre la placa (homogeneización). La dinámica flexional de tal sistema localmente resonante se describe mediante la teoría de Mindlin:

$$\begin{aligned} \tilde{G}h \left(\nabla^2 w - \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right) + \bar{q}_z \cos(\omega t) - \frac{F_I}{\Delta A} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ D \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \tilde{G}h \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \right) &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (1a,b,c) \\ D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \tilde{G}h \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right) &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \end{aligned}$$

En las expresiones previas, ρ es la densidad del material de la placa y h el espesor de la misma, w corresponde al desplazamiento transversal del plano medio de la placa en la dirección z , ϕ_x y ϕ_y son los giros flexionales en las direcciones x e y respectivamente, G es el módulo de elasticidad transversal del material y χ corresponde al factor de corte, siendo $\tilde{G} = G\chi$, D es la rigidez a flexión de la placa y μ el coeficiente de Poisson. Asimismo, \bar{q}_z

corresponde a la amplitud de la carga distribuida aplicada en la dirección de z , ω es la frecuencia de excitación, t es el tiempo y F_I corresponde a la fuerza de interacción entre el conjunto de los resonadores actuando en cada celda de área ΔA y la placa, esto es

$F_I = \sum_{i=1}^{N_r} M_i \frac{d^2 u_i}{dt^2}$. El sistema se complementa con las correspondientes condiciones de borde.

Se puede expresar el desplazamiento u_i de cada uno de los resonadores de masa M_i (Figura 1c) en función del desplazamiento de la placa w y del desplazamiento relativo v_i de la masa del resonador con respecto al de la placa, esto es $u_i = w + v_i$, y entonces, en la ecuación (1a) F_I se puede reescribir como:

$$F_I = \sum_{i=1}^{N_r} M_i \left(\frac{d^2 v_i}{dt^2} + \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \quad (2)$$

Considerando que las fuerzas elásticas dependen de v_i , el sistema de ecuaciones para el sistema de resonadores puede expresarse como:

$$\mathbf{K}\mathbf{v} + \mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} = -\tilde{\mathbf{M}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez de los resonadores, \mathbf{v} es el vector de desplazamientos relativos de los resonadores con respecto a la placa, \mathbf{M} corresponde a la matriz diagonal cuyas componentes son las masas de los resonadores y $\tilde{\mathbf{M}}$ al vector de las mismas.

Asumiendo vibraciones armónicas, la solución del problema de vibraciones forzadas estacionarias se obtiene mediante las expresiones:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} \cos(\omega t), \quad w = W \cos(\omega t), \quad \phi_x = \varphi_x \cos(\omega t) \quad \text{y} \quad \phi_y = \varphi_y \cos(\omega t) \quad (4)$$

Introduciendo (2) y (3) en (1a), teniendo en cuenta (4) y considerando los resonadores distribuidos: $M_i / \Delta A = \alpha_i \rho h$, donde α_i es el cociente entre la masa del resonador i -ésimo y la masa de la celda de la placa, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuyas incógnitas son las amplitudes de los desplazamientos \mathbf{V}, W y de los giros φ_x, φ_y :

$$\begin{aligned} -\tilde{G}h \left(\nabla^2 W - \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \right) - \rho h \omega^2 \left(W + W \sum_{i=1}^{N_r} \alpha_i + \sum_{i=1}^{N_r} \alpha_i V_i \right) &= \bar{q}_z \\ D \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + \tilde{G}h \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \varphi_x \right) + \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 \varphi_x &= 0 \quad (5a,b,c) \\ D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + \tilde{G}h \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \varphi_y \right) + \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 \varphi_y &= 0 \end{aligned}$$

2.2 Solución del sistema de resonadores mediante análisis modal

El sistema de resonadores se puede resolver convenientemente expresando la solución

del problema en términos de las autofunciones ψ_n y de las frecuencias naturales ω_n del problema de vibraciones libres:

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) \psi_n = 0 \quad n = 1, \dots, N \quad (6)$$

donde ψ_n y ω_n cumplen condiciones de ortogonalidad. Una vez obtenidas las autofunciones ψ_n se puede expresar \mathbf{V} como:

$$\mathbf{V} = \sum_n C_n \psi_n \quad (7)$$

Para hallar las constantes C_n se desarrolla mediante expansión modal la solución de vibración forzada (3) considerando (4), obteniéndose:

$$C_n = \frac{\psi_n^T \tilde{\mathbf{M}} \omega^2 W}{\omega_n^2 (1 - (\omega / \omega_n)^2) \psi_n^T \mathbf{M} \psi_n} \quad (8)$$

Sustituyendo luego (7) y (8) en (5a) se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & -\tilde{G}h \left(\nabla^2 W - \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \right) - \bar{\rho} h \omega^2 W = \bar{q}_z \\ & D \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + \tilde{G}h \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \varphi_x \right) = 0 \quad + C.B. \quad (9a,b,c) \\ & D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + \tilde{G}h \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \varphi_y \right) = 0 \end{aligned}$$

donde $\bar{\rho}$ es la densidad equivalente dependiente de la frecuencia de excitación ω dada por:

$$\bar{\rho}(\omega) = \rho \left(1 + \sum_{i=1}^{Nr} \alpha_i + \sum_{n=1}^N \frac{\left(\sum_{i=1}^{Nr} \alpha_i \psi_{ni} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{Nr} \alpha_i \psi_{ni}^2 \right) \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)} \right) \quad (10)$$

La expresión (10) corresponde a la fórmula general de la densidad equivalente y sirve para cualquier tipo de resonadores. Observar que en las ecuaciones (9) se ha despreciado, como simplificación, la inercia rotatoria que, en general, afecta únicamente las frecuencias muy altas.

3 ANÁLISIS DE BANDGAP

Si W_n y ω_{pn} constituyen la solución del problema de vibraciones libres (9 con $\bar{q}_z = 0$) es posible obtener el cociente de Rayleigh entre la energía de deformación L_{sn} y la energía cinética L_{kn} de la siguiente forma:

$$\omega_{pn}^2 = \frac{L_{sn}}{L_{kn}} = \frac{\frac{1}{2} \int_A D \left[\left(\frac{\partial \varphi_{xn}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{yn}}{\partial y} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial \varphi_{xn}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{yn}}{\partial y} + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_{xn}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{yn}}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \tilde{G}h \left[\left(\frac{\partial W_n}{\partial x} - \varphi_{xn} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_n}{\partial y} - \varphi_{yn} \right)^2 \right] dA}{\frac{1}{2} \int_A \bar{\rho} h W_n^2 dA} \quad (11)$$

Siendo la energía de deformación L_{sn} positiva, para que la ecuación (11) sea válida y existan frecuencias naturales ω_{pn} en la placa, se debe cumplir que el denominador de la ecuación sea positivo. Por el contrario, para que no existan dichas frecuencias naturales el denominador debe ser negativo, y esto solamente es posible si $\bar{\rho} < 0$, es decir, para que exista bandgap se debe cumplir:

$$\bar{\rho} = \rho \left(1 + \sum_{i=1}^N \alpha_i + \sum_{n=1}^N \frac{\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \psi_{ni} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \psi_{ni}^2 \right) \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)} \right) < 0 \quad (12)$$

Es posible demostrar, observando la estructura de la ecuación (12) (Rohan et al. 2009; Cortínez y Dominguez, 2022) que la densidad equivalente es una función creciente que va desde $-\infty$ a $+\infty$ y que el bandgap comienza cuando $\bar{\rho}$ tiende a $-\infty$ por la izquierda y se extiende hasta que $\bar{\rho} = 0$.

4 CASOS PARTICULARES

Se presentan a continuación las expresiones de la densidad equivalente para los casos particulares de sistemas de resonadores con masas en paralelo y en serie.

4.1 Dos masas en paralelo

Para el caso de dos masas en paralelo (Figura 1b), la expresión de la densidad equivalente (12) se reduce a:

$$\bar{\rho} = \rho \left(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\alpha_1 \omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\alpha_2 \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \quad (13)$$

donde ω_1 y ω_2 corresponden a las frecuencias naturales de cada uno de los resonadores aislados, y α_1 y α_2 son las relaciones de masa resonador/placa para el resonador 1 y 2, respectivamente. Existe bandgap cuando $\bar{\rho} < 0$. Particularmente, en este caso existen 2 bandgaps cuyos extremos pueden obtenerse de manera sencilla para cada uno de ellos. Como ya se comentó en la sección anterior, el límite inferior de los bandgaps se obtiene cuando $\bar{\rho} \rightarrow -\infty$ por izquierda y esto sucede para $\omega = \omega_1$ y para $\omega = \omega_2$, de manera que ω_1 y ω_2 constituyen los límites inferiores de los bandgaps. Asimismo, los límites superiores se producen cuando $\bar{\rho} = 0$ lo que conduce a la siguiente expresión cuyas raíces constituyen

dichos límites:

$$\omega^4 + (-\omega_1^2(\alpha_1 + 1) - \omega_2^2(\alpha_2 + 1))\omega^2 + (1 + \alpha_1 + \alpha_2)\omega_1^2\omega_2^2 = 0 \quad (14)$$

4.2 Dos masas en serie

Cuando las dos masas de los resonadores se colocan en serie (Figura 1b), la expresión de la densidad equivalente (12) tiene la siguiente forma:

$$\bar{\rho} = \rho \left(1 + \sum_{i=1}^2 \alpha_i + \sum_n \frac{\gamma_n \omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2} \right), \quad \gamma_n = \frac{\left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i \psi_{ni} \right)^2}{\sum_{i=1}^2 \alpha_i \psi_{ni}^2} \quad (15)$$

donde los valores de ω_n corresponden a las frecuencias naturales del sistema de resonadores que son las raíces de la siguiente ecuación:

$$\omega_n^4 - (\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2 + \beta \bar{\omega}_2^2)\omega_n^2 + \bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2 = 0 \quad (16)$$

siendo:

$$\bar{\omega}_1^2 = \frac{k_1}{M_1}, \quad \bar{\omega}_2^2 = \frac{k_2}{M_2}, \quad \beta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (17)$$

Las frecuencias ω_1 y ω_2 obtenidas a partir de la solución de la ecuación (16) constituyen los límites inferiores de los bandgaps, mientras que los límites superiores se pueden obtener analíticamente resolviendo la siguiente ecuación bicuadrática ($\bar{\rho} = 0$):

$$\omega^4 \left(1 + \sum_{i=1}^2 \alpha_i - \gamma_1 - \gamma_2 \right) + \left(\omega_2^2 \gamma_1 + \omega_1^2 \gamma_2 - \left(1 + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \right) (\omega_1^2 + \omega_2^2) \right) \omega^2 + \left(1 + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \right) \omega_1^2 \omega_2^2 = 0 \quad (18)$$

5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Se consideran las vibraciones flexionales de una placa simplemente apoyada de lados $L_x=L_y=1\text{m}$ y espesor $h=L_x/20\text{m}$, acoplada a sistemas de resonadores masa-resorte distribuidos de manera uniforme (Figura 1). Las características del material de la placa huésped (sin resonadores) son: módulo de elasticidad $E=2\text{e}11\text{ Pa}$, coeficiente de Poisson $\mu=0.3$, densidad $\rho=7800\text{kg}/\text{m}^3$. Las dos primeras frecuencias naturales de esta placa son $\omega_{1placa}=1473\text{ rad}/\text{s}$ y $\omega_{2placa}=3676\text{ rad}/\text{s}$. En principio se pretende que los sistemas de resonadores acoplados produzcan la atenuación de estas dos frecuencias. Para ello se analiza el comportamiento de dos sistemas de resonadores: a) con dos masas en paralelo en cada celda y b) con dos masas en serie en cada celda (Figura 2). En el primer caso a) se varió inicialmente la masa total de los resonadores con respecto a la masa de la placa ($\alpha_T = \alpha_1 + \alpha_2$), manteniendo constantes la relación de masas de los resonadores ($\beta = M_2/M_1 = 1$) y los valores de frecuencia de los resonadores $\omega_1 = 0.96\omega_{1placa}$ y $\omega_2 = 0.96\omega_{2placa}$. Los resultados se muestran en la Figura 2a) y, como era de esperar, los anchos de los bandap *BG1* y *BG2* sobre las dos frecuencias naturales de la placa a atenuar, aumentan a medida que lo hace α_T , fundamentalmente el *BG2*. En la Figura 2b) se muestran los resultados de la variación de la relación de masas de los resonadores β manteniendo constantes el valor de $\alpha_T = 0.25$ y las frecuencias de los resonadores

$\omega_1 = 0.98\omega_{1placa}$ y $\omega_2 = 0.98\omega_{2placa}$. Como se puede ver, a medida que aumenta β disminuye el *BG1* y aumenta el *BG2*. Por otra parte, en la [Figura 2c](#)) se puede apreciar el efecto de la variación de las frecuencias de los resonadores ω_1 y ω_2 rad/s manteniendo constantes el valor de $\beta = 1$ y el de la masa total de los mismos $\alpha_T = 0.25$. Como se puede apreciar, el ancho de los bandgaps se mantiene constante y simplemente se desplazan hacia frecuencias mayores.

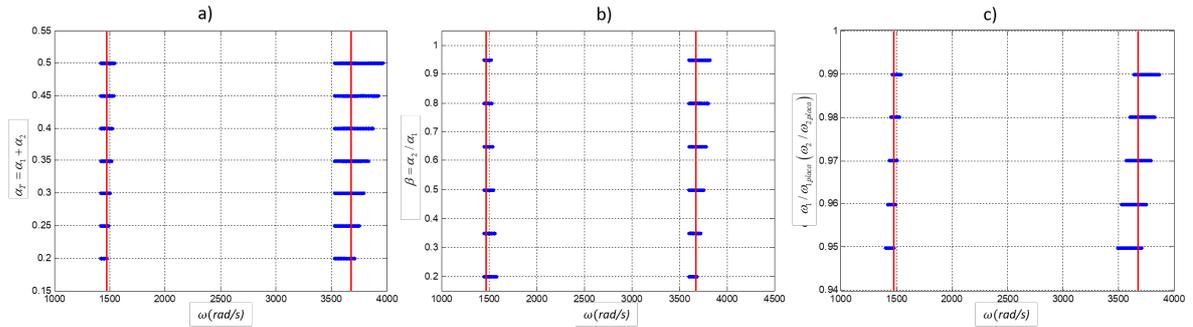


Figura 2: Variación del ancho y posición de los bandgaps *BG1* y *BG2* para dos masas en paralelo según la variación de: a) la masa total de los resonadores α_T , b) la relación de masas de los mismos β y c) las frecuencias propias de los resonadores ω_1 y ω_2 .

Para evaluar la efectividad del bandgap se analizó la vibración forzada de la placa con resonadores de dos masas en paralelo ($\beta = 1$, $\alpha_T = 0.25$, $\omega_1 = 0.98\omega_{1placa}$ y $\omega_2 = 0.98\omega_{2placa}$) sometida a una carga $\bar{q}_z = 1000 \cos(\omega t) Pa$ sobre la mitad derecha de la misma. Tales resultados fueron obtenidos mediante el Método de Elementos Finitos. Para esta configuración, el *BG1* se extiende entre 1444 y 1520 rad/s y el *BG2* entre 3602 y 3825.

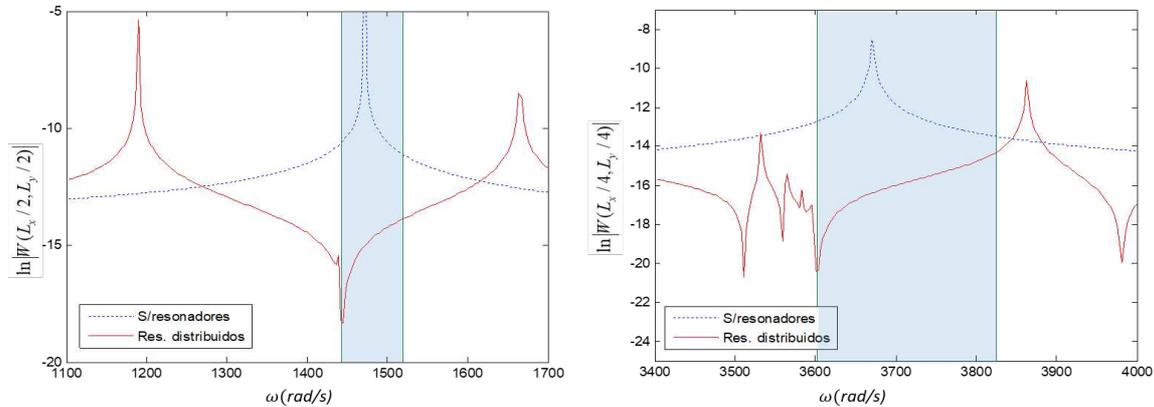


Figura 3: Respuesta en frecuencia a) $\ln|W(L_x/2, L_y/2)|$ en cercanía de $\omega_{1placa} = 1473 \text{ rad/s}$ y b)

$$\ln|W(L_x/4, L_y/4)| \text{ en cercanía de } \omega_{2placa} = 3676 \text{ rad/s}$$

En la [Figura 3a](#)) se muestra la respuesta en frecuencia $\ln|W(L_x/2, L_y/2)|$ en cercanías de la primera frecuencia a atenuar ($\omega_{1placa} = 1473 \text{ rad/s}$) y en la [Figura 3b](#)) la respuesta en frecuencia $\ln|W(L_x/4, L_y/4)|$ en cercanías de la segunda frecuencia ($\omega_{2placa} = 3676 \text{ rad/s}$). Como se puede observar, el conjunto de resonadores produjo la atenuación de las dos frecuencias naturales de la placa en los bandgaps calculados.

Cálculos similares a los realizados para los resonadores con dos masas en paralelo se llevaron a cabo para resonadores con dos masas en serie. En este caso, se realizaron

numerosos cálculos y no se logró una atenuación efectiva de la segunda frecuencia. A modo de ejemplo, en la Figura 4 se muestran algunos de los resultados obtenidos.

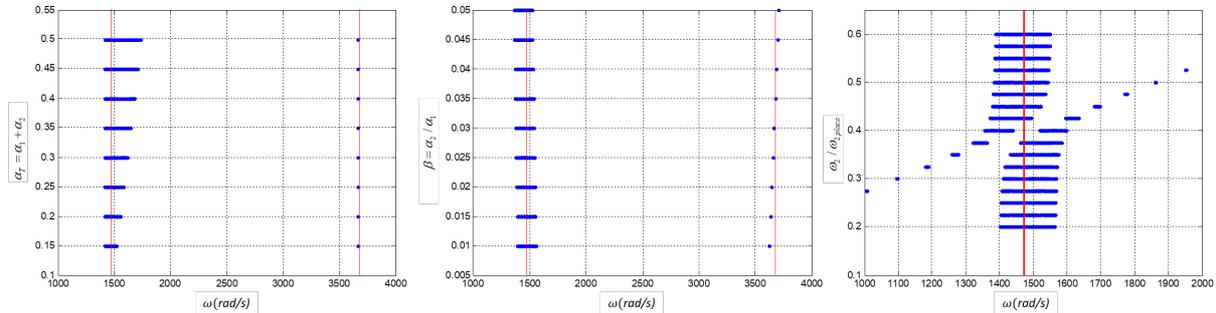


Figura 4: Variación del ancho y posición de los bandgaps $BG1$ y $BG2$ para dos masas en serie según la variación de: a) la masa total de los resonadores α_T , b) la relación de masas de los mismos β y c) la frecuencia propia del resonador ω_2 c/r a la segunda frecuencia de la placa

En la Figura 4a) se puede ver la variación del ancho y posición de los bandgaps $BG1$ y $BG2$ manteniendo constante la relación de masas de los resonadores ($\beta = M_2 / M_1 = 0.03$) y los valores de frecuencia de los resonadores $\omega_1 = 0.98\omega_{1placa}$ y $\omega_2 = 0.98\omega_{2placa}$. Al aumentar α_T aumenta el ancho del $BG1$, pero en este caso no hay modificación del $BG2$ que es prácticamente inexistente. En la Figura 4b) se muestra el resultado de la variación de β , manteniendo constantes $\alpha_T = 0.25$ y las frecuencias de los resonadores, iguales a las del caso anterior. Como se puede apreciar, no hay variación en ninguno de los BG . Caber aclarar que otras relaciones mayores de dicho parámetro no aportaron buenos resultados. En la Figura 4c) se intentó variar la frecuencia ω_2 del resonador 2 con respecto a la segunda frecuencia de la placa. Obviamente, al acercarse la frecuencia del segundo resonador a la primera frecuencia de la placa, se produce la interacción con el resonador 1. En este caso, se podrían utilizar ambos resonadores para crear un bangap ampliado sobre la primera frecuencia de la placa.

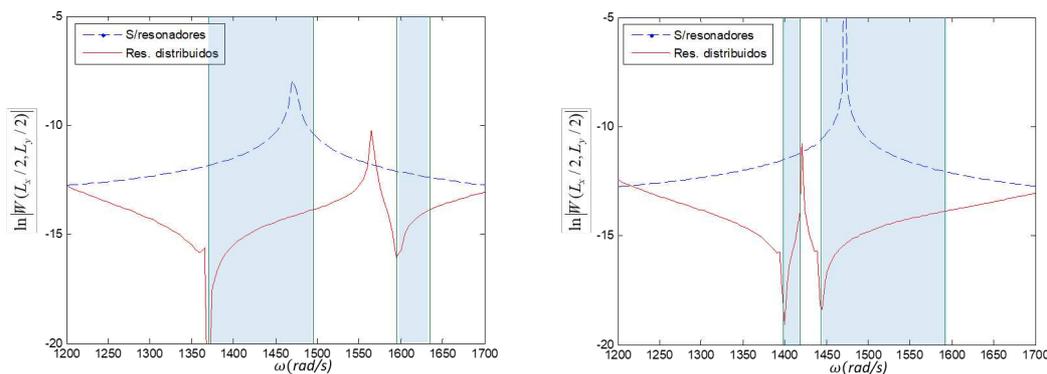


Figura 5: Respuesta en frecuencia $\ln|W(L_x/2, L_y/2)|$ en cercanía de $\omega_{1placa} = 1473 \text{ rad/s}$ para resonadores con 2 masas: a) en serie y b) en paralelo

Para verificar esta posibilidad, se analizó la vibración forzada para una carga $\bar{q}_z = 1000 \cos(\omega t) Pa$, $\alpha_T = 0.25$, $\beta = 0.01$, $\omega_1 = 0.95\omega_{1placa}$ y $\omega_2 = 0.425\omega_{2placa}$, y los resultados obtenidos se muestran en la Figura 5a). Como se puede observar, no existen frecuencias naturales de la estructura en ninguna de las dos zonas de BG que se crean

(entre 1370 y 1495 rad/s y entre 1596 y 1635 rad/s), apareciendo un pico en la zona de propagación intermedia. Con amortiguamiento en los resonadores, este pico podría mitigarse y entonces, se podría crear un BG ampliado, entre 1370 y 1635 rad/s . En la [Figura 5b](#)) se muestra la respuesta en frecuencia de la estructura en el mismo punto y para la misma carga pero acoplado resonadores con 2 masas en paralelo en cada celda. En este caso los valores adoptados fueron: $\alpha_T = 0.25$, $\beta = 1$, $\omega_1 = 0.95\omega_{1placa}$ y $\omega_2 = 0.98\omega_{1placa}$ y como puede apreciarse se crean dos BG (entre 1399 y 1418 rad/s el primero y entre 1444 y 1592 rad/s el segundo) que podrían crear un BG efectivo entre 1399 y 1592 rad/s . Si bien el BG efectivo en este caso es un poco menor, la zona de propagación es bastante más pequeña y sería más fácil eliminar el pico resonante que aparece en ella con amortiguamiento en los resonadores.

6 CONCLUSIONES

Se ha estudiado la formación de bandgaps en placas Mindlin acopladas a conjuntos de resonadores masa-resorte distribuidos de manera homogénea sobre las mismas. El análisis matemático de la dinámica transversal de dichas placas se realizó modelando una placa homogénea equivalente donde la densidad efectiva depende de la frecuencia de excitación, obteniéndose los bandgaps donde dicha densidad se hace negativa. Se obtuvo analíticamente una expresión general de la densidad equivalente para un sistema arbitrario de resonadores y luego fórmulas explícitas para casos particulares de resortes con masas en serie y en paralelo. Se presentaron algunos resultados numéricos de la obtención de bandgaps y la verificación de la efectividad de los mismos mediante el análisis de vibración forzada.

REFERENCIAS

- Chen, J-H., Chao, I-C. y Chen, T. Bandgaps for flexural waves in infinite beams and plates with a periodic array of resonators. *Journal of Mechanics* 38, 376–389, 2022.
- Cortínez, V. H. y Dominguez, P.N. Una teoría general para la estimación de bandgaps en la vibración flexo-torsional de vigas Vlasov, *Mecánica Computacional* 39, 531-540, 2022.
- Dominguez, P. N., Cortínez, V. H. y Sequeira, M. E. Diseño óptimo de metamateriales acústicos localmente resonantes, *Mecánica Computacional* 38, 149-158, 2021.
- Dominguez, P. N., Cortínez, V. H. y Piovan, M. T. Attenuation bands for flexural-torsional vibrations of locally resonant Vlasov beams. *Thin-Walled Structures* 181 110115, 2022.
- Peng, H., Pai, F-P. y Deng, H., Acoustic multi-stopband metamaterial plates design for broadband elastic wave absorption and vibration suppression. *International Journal of Mechanical Sciences* 103, 104-114, 2015.
- Rohan, E., Miara, B. y Seifrt, F. Numerical simulation of acoustic band gaps in homogenized elastic composites, *International Journal of Engineering Science* 47(4):573-594, 2009.
- Sugino, C., Xia, Y., Leadenham, S., Ruzzene, M. y Erturk, A., A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures, *Journal of Sound and Vibration* 406, 104-123, 2017.
- Wang, T., Sheng, M. P., Guo, Z. W. y Qin, Q. H., Acoustic characteristics of damped metamaterial plate with parallel attached resonators, *Archives of Mechanics* 69, 29-52, 2017.
- Zhao, T., Yang, Z., Xu, Y. y Tian, W., Bandgap formation and low-frequency structural vibration suppression for stiffened plate-type metastructure with general boundary conditions, *Chinese Journal of Aeronautics*, 2023 (article in press).