

## ANÁLISIS DEL EFECTO POISSON EN LAS VIBRACIONES NATURALES DE MICROVIGAS TIMOSHENKO MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

### ANALYSIS OF THE POISSON EFFECT IN THE NATURAL VIBRATIONS OF TIMOSHENKO MICROBEAMS USING THE FINITE ELEMENT METHOD

Daniel H. Felix<sup>a</sup>, Simón Nogueira<sup>a</sup> y Santiago Maíz<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Ingeniería, Instituto de Ingeniería de la UNS (IIUNS), Universidad Nacional del Sur,  
Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, dhfelix@uns.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>*

**Palabras clave:** Timoshenko, microvigas, vibraciones, efecto Poisson, elementos finitos.

**Resumen.** En este trabajo se propone determinar y analizar la incidencia del efecto Poisson en los valores de los coeficientes de frecuencia naturales o libres de una microviga Timoshenko mediante la teoría modificada de la tensión del gradiente de deformación (MSGT), aplicando el método de elementos finitos en la modelización e implementación del algoritmo desarrollado. El modelo planteado por ende, tiene en cuenta además del efecto Poisson, la inercia rotatoria de la microviga, el efecto del corte y el efecto de escala de longitud del material. Debido a que estos microcomponentes se utilizan en microactuadores o en microsensores, se requiere de la mayor precisión posible en la determinación de los coeficientes de frecuencia natural para caracterizar su comportamiento dinámico adecuadamente, lo cual se pretende lograr mediante la presente propuesta.

**Keywords:** Timoshenko, microbeams, vibrations, poisson effect, finite elements.

**Abstract.** In this work, it is proposed to determine and analyze the incidence of the Poisson effect in the values of the natural or free frequency coefficients of a Timoshenko microbeam by means of the modified stress gradient strain theory (MSGT), applying the finite element method in the modeling and implementation of the developed algorithm. The proposed model therefore takes into account, in addition to the Poisson effect, the rotational inertia of the microbeam, the effect of cutting and the effect of the length scale of the material. Because these microcomponents are used in microactuators or microsensors, the highest possible precision is required in the determination of the natural frequency coefficients to characterize their dynamic behavior adequately, which is intended to be achieved through the present proposal.

## 1. INTRODUCCIÓN

La mecánica del continuo clásico o simplemente mecánica del continuo, es un extenso campo que abarca tanto la mecánica del sólido como la mecánica de fluidos. Su principal hipótesis simplificativa radica en el hecho de considerar a la materia como un conjunto continuo de puntos materiales, independiente de la escala de longitud en la que se esté trabajando. Si bien se trata en general de una teoría de elevada precisión en la gran mayoría de los casos de aplicación, no responde adecuadamente cuando el material contiene partículas cuyo tamaño medio es del orden del tamaño del elemento o volumen a considerar, ya sea sólido o líquido. Aunque este problema fue tenido en cuenta desde mediados del siglo XIX, no se transformó hasta inicios del siglo XX en un campo de investigación bien definido, considerándose como fecha de inicio de las investigaciones, una publicación realizada en 1909 por los hermanos Cosserat, denominada *Teoría del Continuo Generalizado*, que contemplaba en las hipótesis la existencia de partículas de tamaño finito. En homenaje a dicho trabajo icónico, el mismo se reeditó un siglo después, [Cosserat y Cosserat \(2009\)](#). Sin embargo, debido a la escasa necesidad de aplicación práctica en aquella época, las investigaciones fueron virtualmente abandonadas hasta la década de 1960, en que un gran número de investigadores, especialmente en el campo de la elasticidad, realizaron aportes muy significativos, generando diferentes variantes de la teoría original, [Mindlin \(1964\)](#), [Eringen \(1966\)](#), [Mindlin y Eshel \(1968\)](#). Si bien comenzaban a aparecer algunas necesidades de aplicación producto de los avances tecnológicos, especialmente dados por la micro y la nanotecnología, se presentaban dos importantes obstáculos para utilizar los resultados de los trabajos de investigación de dicha época, la complejidad del tratamiento matemático de las teorías desarrolladas y el gran número de parámetros necesarios en las ecuaciones constitutivas que requerían ser determinados experimentalmente. Afortunadamente, a comienzos del siglo XXI, aparece un segundo resurgimiento de las investigaciones tanto teóricas como experimentales, entre las que se citan: [Eringen \(2001\)](#), [Yang et al. \(2002\)](#); [Lam et al. \(2003\)](#); [Ma et al. \(2008\)](#); [Asghari et al. \(2010\)](#); [Magrab \(2012\)](#). En la presente propuesta, a modo de continuidad de investigaciones anteriores realizadas por los autores, [Guerrero et al. \(2015, 2016\)](#); [Felix et al. \(2015, 2016\)](#), se analiza numéricamente la influencia del coeficiente de Poisson en el comportamiento dinámico de una microviga Timoshenko. Se resuelve, mediante la aplicación del método de elementos finitos, un modelo muy completo que tiene en cuenta la deformación por corte, la inercia rotatoria y los efectos de escala del material con que se construye la microviga, esto último contemplado mediante la denominada Teoría Modificada del Segundo Gradiente, [Lam et al. \(2003\)](#) conocida en la literatura técnico-científica internacional, por su sigla en inglés como MSGT. Se trata de una teoría que reduce el número de parámetros de escala de longitud necesarios en las ecuaciones constitutivas adicionales de segundo orden, a solo 3, permitiendo reducir sensiblemente la complejidad del tratamiento matemático del problema. El uso de las teorías mencionadas, al contemplar componentes de tensión y deformación de segundo orden, permite una evaluación más precisa de la energía de deformación de la microviga cuando realiza vibraciones libres y en consecuencia esto permite alcanzar resultados mucho más precisos, comparados con los arrojados por la teoría clásica.

## 2. SISTEMA DE ECUACIONES GOBERNANTES

### 2.1. Ecuaciones de la viga clásica

La forma fuerte o forma diferencial del sistema de ecuaciones que gobiernan la viga clásica Timoshenko isótropa, cuando efectúa vibraciones libres, puede expresarse del siguiente modo en función de los desplazamientos transversales  $w$  y de los giros  $\phi$  de las secciones transversales

de la viga:

$$-(\lambda + 2\mu) I_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \kappa \mu A \left( \phi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\rho I_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1a)$$

$$\kappa \mu A \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1b)$$

siendo  $\lambda$  y  $\mu$ , las conocidas constantes de Lamé definidas para materiales isótropos,  $\rho$  la densidad del material,  $\kappa$  el coeficiente de corte y  $A$  e  $I_y$  el área y el momento de inercia de la sección transversal de la viga respectivamente. Las constantes de Lamé son a su vez función del módulo elástico o módulo de Young  $E$  y del coeficiente de Poisson  $\nu$  del material de la viga, siendo:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2)$$

Viendo las ecs. (1) y (2) puede apreciarse a priori que la influencia del coeficiente de Poisson  $\nu$  en una viga Timoshenko clásica, la cual se dá a través de las constantes de Lamé, se encuentra presente en todos los términos del miembro izquierdo de las ecuaciones diferenciales.

## 2.2. Ecuaciones de la microviga

Extenderemos ahora las ecuaciones gobernantes para el caso de una microviga Timoshenko, que contempla adicionalmente los efectos de escala de longitud del material. Aplicando la teoría modificada del segundo gradiente de desplazamientos, conocida por su sigla en inglés como MSGT, Lam et al. (2003). Resulta en este caso el siguiente sistema de ecuaciones en su forma fuerte:

$$c_1 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - c_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + c_3 \phi + c_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - c_3 \frac{\partial w}{\partial x} = -\rho I_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3a)$$

$$-c_4 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + c_3 \frac{\partial \phi}{\partial x} + c_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3b)$$

con:

$$c_1 = \mu I_y \left( \frac{4}{5} l_1^2 + 2 l_0^2 \right) \quad (4a)$$

$$c_2 = \left[ \mu A \left( \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 + 2 l_0^2 \right) + I_y (\lambda + 2\mu) \right] \quad (4b)$$

$$c_3 = \mu A \kappa \quad (4c)$$

$$c_4 = \mu A \left( \frac{16}{15} l_1^2 - \frac{1}{4} l_2^2 \right) \quad (4d)$$

$$c_5 = \mu A \left( \frac{1}{4} l_2^2 + \frac{8}{15} l_1^2 \right) \quad (4e)$$

siendo:  $l_0$ ,  $l_1$  y  $l_2$ , las constantes de escala de longitud del material, las cuales se obtienen en forma indirecta, mediante ensayos experimentales. Como puede apreciarse el coeficiente de Lamé  $\mu$ , también está presente en los términos adicionales que aparecen debido a la contemplación de los efectos de escala, y por ende también está presente el coeficiente de Poisson  $\nu$  en dichos términos. Un desarrollo detallado que lleva a la determinación de las ecs(3a,b), puede encontrarse en Felix et al. (2016, 2017). Para obtener las primeras frecuencias naturales aplicaremos

el método de elementos finitos, para lo cual se requiere plantear la forma débil de las ecuaciones gobernantes.

Como puede apreciarse, la microviga requiere resolver un sistema de ecuaciones de orden superior al de la viga clásica. Esta característica condicionará la elección del elemento finito, de modo tal que las correspondientes funciones de forma pudan reproducir la forma aproximada de la desplazamiento y del giro de la sección transversal de la microviga.

### 3. FORMA DÉBIL DE LAS ECUACIONES GOBERNANTES DE LA MICROVIGA

La forma débil de las ecuaciones gobernantes que corresponde al sistema de ecs. (3a,b) puede obtenerse aplicando el principio de Hamilton, estableciendo:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T) dt = 0 \quad (5)$$

siendo  $U$  la energía de deformación y  $T$  la energía cinética. Como puede apreciarse en la ec.(5) no aparece la energía potencial, debido a que se trata de vibraciones libres.

De acuerdo a la teoría MSGT aplicada, la variación de la energía de deformación de la microviga, en función de las tensiones y deformaciones, se expresa del siguiente modo, [Felix et al. \(2017\)](#):

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} + p_i \delta \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \delta \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^{(S)} \delta \chi_{ij}^{(S)}) dA dx \quad (6)$$

siendo:  $\sigma_{ij}$  y  $\epsilon_{ij}$  las componentes de tensión y deformación de la teoría de elasticidad clásica, mientras que el resto de los términos de tensión y deformación presentes en la ec.(6) corresponden a la teoría MSGT.

Si se expresa la ec.(6) en término de los desplazamientos  $w$  y giros  $\phi$  de la sección transversal de la microviga resulta:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_0^L [c_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x^2} - \left( c_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} - c_3 \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta \phi \\ + \left( c_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_4 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + c_3 \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \frac{\partial \delta \phi}{\partial x}] dx \end{aligned} \quad (7)$$

mientras que la variación de la energía cinética en función de los desplazamientos queda:

$$\delta T = \rho \int_0^L \left[ A \left( \frac{\partial^2 w}{dt^2} \right) \delta w + I_y \left( \frac{\partial^2 \phi}{dt^2} \right) \delta \phi \right] dx \quad (8)$$

recordando que en la expresión (7) la influencia del coeficiente de Poisson  $\nu$  se encuentra implícita en las constantes  $c_1$  a  $c_5$ .

### 4. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Como fue mencionado anteriormente, la microviga requiere resolver un sistema de ecuaciones de orden superior al de la viga clásica. Para resolver el sistema de ecuaciones planteado mediante el método de elementos finitos cumpliendo con el requerimiento de continuidad en  $C_2$  de las funciones de forma del elemento, utilizaremos un elemento de viga de 2 nodos con 4 grados de libertad por nodo desarrollado por [Zhang et al. \(2014\)](#), siendo las componentes del elemento las siguientes:

$$\{U_e\} = \{w_1, w_{x1}, \phi_1, \phi_{x1}, w_2, w_{x2}, \phi_2, \phi_{x2}\}^T \quad (9)$$

Las funciones de forma para el elemento elegido son [Felix et al. \(2016\)](#):

$$N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (10a)$$

$$N_2(\xi) = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) a \quad (10b)$$

$$N_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (10c)$$

$$N_4(\xi) = (\xi^3 - \xi^2) a \quad (10d)$$

siendo  $\xi$  la variable espacial adimensional y  $a$  la longitud del elemento. Las interpolaciones del desplazamiento y del giro resultan entonces:

$$w(\xi) = N_1(\xi) w_1 + N_2(\xi) w_{x1} + N_3(\xi) w_3 + N_4(\xi) w_{x2} \quad (11a)$$

$$\phi(\xi) = N_1(\xi) \phi_1 + N_2(\xi) \phi_{x1} + N_3(\xi) \phi_3 + N_4(\xi) \phi_{x2} \quad (11b)$$

Si utilizamos la representación matricial para expresar las funciones de forma dadas en las ecs.(10a-d) nos queda:

$$[N_w] = [N_1(\xi), N_2(\xi), 0, 0, N_3(\xi), N_4(\xi), 0, 0] \quad (12a)$$

$$[N_\phi] = [0, 0, N_1(\xi), N_2(\xi), 0, 0, N_3(\xi), N_4(\xi)] \quad (12b)$$

con lo cual, la forma aproximada de  $w$  y  $\phi$ , dada en las ecs.(11) se pueden expresar en la siguiente forma más compacta:

$$w(\xi) = [N_w] \{U_e\} \quad (13a)$$

$$\phi(\xi) = [N_\phi] \{U_e\} \quad (13b)$$

Reemplazando las formas interpoladas de  $w$  y  $\phi$  en las ecs.(13a,b) e integrando en el dominio del elemento elegido, luego de las correspondientes operaciones algebraicas, se llega a las expresiones de la matriz de rigidez y de de masa de dicho elemento, las cuales resultan:

$$\begin{aligned} [k_e] = & \frac{c_1}{a^3} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 [N_\phi]}{\partial \xi^2} \right)^T \left( \frac{\partial^2 [N_\phi]}{\partial \xi^2} \right) d\xi - \frac{c_4}{a^2} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right)^T \left( \frac{\partial [N_\phi]}{\partial \xi} \right) d\xi \\ & + \frac{c_2}{a} \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_\phi]}{\partial \xi} \right)^T \left( \frac{\partial [N_\phi]}{\partial \xi} \right) d\xi - c_3 \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \right)^T ([N_\phi]) d\xi \\ & + c_3 a \int_0^1 ([N_\phi])^T ([N_\phi]) d\xi + \frac{c_5}{a^3} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right)^T \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right) d\xi \\ & - \frac{c_4}{a^2} \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_\phi]}{\partial \xi} \right)^T \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right) d\xi + \frac{c_3}{a} \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \right)^T \left( \frac{\partial [N_\phi]}{\partial \xi} \right) d\xi \\ & - c_3 \int_0^1 ([N_\phi])^T \left( \frac{\partial [N_\phi]}{\partial \xi} \right) d\xi \end{aligned} \quad (14)$$

$$[m_e] = \rho a \left( A \int_0^1 ([N_w])^T ([N_w]) d\xi + I_y \int_0^1 ([N_\phi])^T ([N_\phi]) d\xi \right) \quad (15)$$

Un desarrollo detallado de las matrices de rigidez y de masa del elemento puede obtenerse en [Felix et al. \(2017\)](#). Una vez obtenidas las matrices de rigidez y de masa del elemento mediante

las ecs. (14) y (15) se procede al ensamblado de las mismas para obtener la matriz de rigidez y de masa del modelo, siendo:

$$[K] = \sum_{e=1}^n [k_e]_{ij} = \text{Ensamblado}([k_e]) \quad (16a)$$

$$[M] = \sum_{e=1}^n [m_e]_{ij} = \text{Ensamblado}([m_e]) \quad (16b)$$

En la expresión (16.a),  $[K]$ , es la matriz de rigidez global de la microviga y  $[k_e]$  es la matriz de rigidez del elemento. Como lo indica la expresión (16.a), la matriz de rigidez global se obtiene ensamblando las matrices de rigidez de los elementos.

Por otra parte, en la expresión (16.b),  $[M]$ , es la matriz de masa global y  $[m_e]$  es la correspondiente matriz de masa del elemento. Como lo indica la expresión (16.b), la matriz de masa global se obtiene ensamblando las matrices de masa de los elementos.

Finalmente, para obtener una solución distinta de la trivial, imponemos la nulidad del determinante de los coeficientes. Es decir, resolvemos la ecuación de autovalores o ecuación característica de la solución aproximada obtenida mediante el método de elementos finitos:

$$|[K] - \omega_i^2 [M]| = 0 \quad (17)$$

La ecuación característica (17) permite obtener los primeros valores de frecuencia natural de la microviga  $\omega_i$ . Para independizarnos de las propiedades mecánicas macroscópicas del material,  $E$  y  $\rho$  y geométricas de la sección transversal,  $A$  e  $I_y$ , podemos obtener la forma adimensional de la ec. (18), que nos permite calcular los coeficientes de frecuencia natural de la microviga, expresándose ahora de la siguiente forma:

$$|[K^*] - \Omega_i^2 [M^*]| = 0 \quad (18)$$

siendo las matrices  $K^*$  y  $M^*$ , la forma adimensional de las matrices  $K$  y  $M$ , mientras que la expresión de los coeficientes de frecuencia naturales resulta:

$$\Omega_i = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho A}{E I_y}} \quad (19)$$

Con las expresiones desarrolladas se obtuvieron los resultados numéricos que siguen a continuación.

## 5. RESULTADOS NUMÉRICOS

En primer lugar se realizó un análisis de convergencia de los primeros dos coeficientes de frecuencia de la microviga, considerando diferentes condiciones de borde. Para ello se resolvió un caso particular adoptando:  $L/h = 10$ ,  $\kappa = 5/6$ ,  $h/l = 1$ ,  $\nu = 0,4$ :

En función de los resultados que arroja el análisis numérico de convergencia mostrado en la Tabla 1, se adoptó una malla de 30 elementos, ya que con la misma los valores de frecuencia se estabilizan para la precisión deseada.

Una vez verificada numéricamente la convergencia del algoritmo, se implementó el mismo para obtener los primeros dos coeficientes de frecuencia natural de una microviga Timoshenko en función de la constante de escala de longitud del material  $h/l$  y del coeficiente de Poisson  $\nu$  y para las condiciones de contorno clásicas:  $Art - Art$ ,  $Emp - Emp$  y  $Emp - Lib$ , como se

$ne$	$Art - Art$		$Emp - Emp$		$Emp - Lib$	
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$
5	34.1394	105.825	51.9119	115.778	13.2140	59.0448
10	34.1371	105.744	51.9036	115.666	13.2137	59.0265
15	34.1367	105.737	51.9022	115.656	13.2137	59.0246
20	34.1366	105.735	51.9018	115.653	13.2137	59.0242
30	34.1365	105.734	51.9016	115.652	13.2137	59.0239
40	34.1365	105.734	51.9016	115.652	13.2137	59.0239

Tabla 1: Análisis numérico de convergencia de los primeros coeficientes de frecuencia  $\Omega_i$ , de una microviga Timoshenko para diferentes C.B., con:  $L/h = 10$ ,  $\kappa = 5/6$ ,  $h/l = 1$ ,  $\nu = 0,4$ .

muestra en la Tabla 2. En la primer columna, los valores de  $h/l$  van de 1 a *infinito*, siendo este último el correspondiente a la Teoría Clásica (TC), la cual no contempla los efectos de longitud de escala del material.

$h/l$	$\nu$	$Art - Art$		$Emp - Emp$		$Emp - Lib$	
		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$
1	0.2	35.9589	112.487	55.4585	123.894	13.8615	62.7463
	0.3	34.7730	108.502	53.4332	119.289	13.4184	60.5343
	0.4	34.1365	105.735	51.9016	115.652	13.2137	59.0239
5	0.2	12.9940	48.8035	27.3927	68.4298	4.68710	27.5899
	0.3	13.5695	50.4726	28.2257	69.5799	4.90483	28.5840
	0.4	15.7285	56.9571	31.5452	75.2550	5.71904	32.4097
12	0.2	10.7674	41.0025	23.1473	59.0000	3.87213	23.1236
	0.3	11.6640	43.9727	24.7300	62.0931	4.20319	24.8471
	0.4	14.3084	52.4550	29.2048	70.6473	5.18700	29.7968
TC	0.2	10.2294	39.0589	22.0750	56.5002	3.67652	22.0167
	0.3	11.2153	42.3976	23.8714	60.1742	4.03906	23.9456
	0.4	13.9868	51.4106	28.6547	69.5334	5.06723	29.1919

Tabla 2: Primeros dos coeficientes de frecuencia  $\Omega_i$ , de una microviga Timoshenko en función del parámetro  $h/l$  y del coeficiente de Poisson  $\nu$ , para diferentes C.B. con:  $L/h = 10$ ,  $\kappa = 5/6$ .

Un hecho interesante de observar en la Tabla 2 es que cuando el parámetro de escala  $h/l = 1$  los coeficientes de frecuencia se reducen cuando  $\nu$  aumenta, mientras que este comportamiento se invierte para el resto de los casos, es decir para  $h/l \geq 5$ .

Finalmente se realizó un ploteo paramétrico de la frecuencia fundamental  $\Omega_1$  de la microviga para diferentes valores del coeficiente de Poisson  $\nu$ , siendo el valor del parámetro de escala de longitud del material adimensional  $h/l$ , el que define cada curva.

En la Figura 1a se consideró una microviga articulada en ambos extremos con valores de  $h/l \leq 5$  mientras que en la Figura 1b se consideraron valores de  $h/l \geq 5$ .

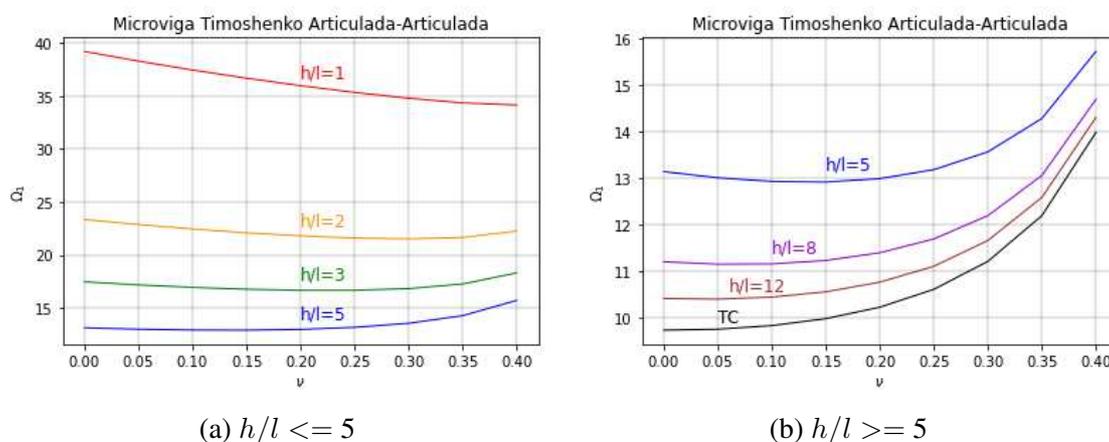


Figura 1: Primer coeficiente de frecuencia natural  $\Omega_1$  de una microviga Timoshenko Art-Art,  $L/h = 10$ ,  $\kappa = 5/6$ .

De un modo similar, en la Figura 2a se consideró una microviga empotrada en ambos extremos con valores de  $h/l \leq 5$  mientras que en la Figura 2b se plotearon para el mismo caso las curvas correspondientes a valores de  $h/l \geq 5$ .

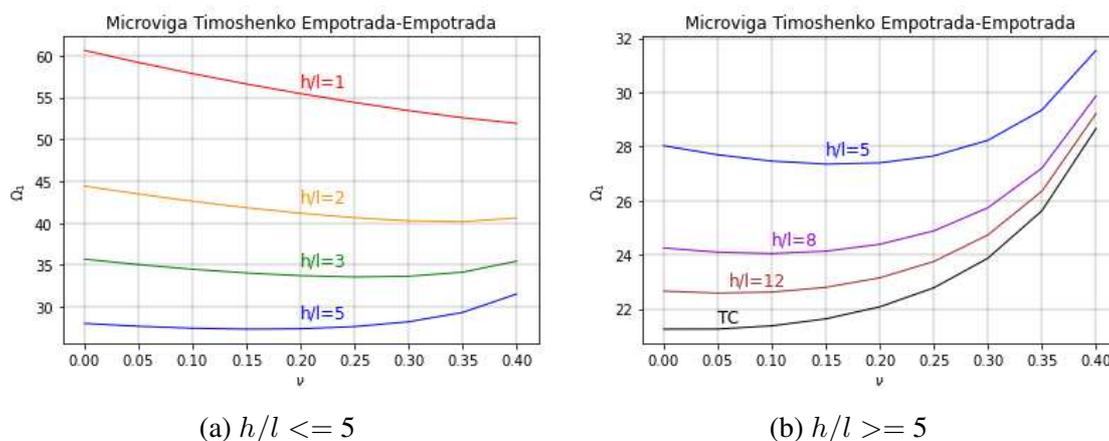


Figura 2: Primer coeficiente de frecuencia natural  $\Omega_1$  de una microviga Timoshenko Emp-Emp,  $L/h = 10$ ,  $\kappa = 5/6$ .

Finalmente se obtuvieron las curvas paramétricas para el caso de una microviga empotrada en un extremo y libre en el otro, como muestran las Figuras 3a y 3b.

En todos los casos resueltos se adoptó una esbeltez de la microviga  $L/h = 10$  y un valor del factor de corte  $\kappa = 5/6$ .

En cada una de las condiciones de borde consideradas se repitió la curva correspondiente a  $h/l = 5$  con el fin de observar como se aprecia la curva correspondiente en diferentes escalas.



- Eringen A. Linear theory of micropolar elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 15:909–923, 1966.
- Eringen A. *Non Local Continuum Theories*. Springer, 2001.
- Felix D., Guerrero G., y Bambill D. Size-dependent dynamic analysis of Timoshenko microbeam using the finite element method. *First Pan-American Congress on Computational Mechanics (PANACM)*, 1, 2015.
- Felix D., Guerrero G., y Bambill D. Análisis dinámico de microvigas Timoshenko mediante la teoría elástica del primer gradiente de deformación y el método de elementos finitos. *Mecánica Computacional*, 34:797–797, 2016.
- Felix D., Guerrero G., y Bambill D. Teoría modificada del segundo gradiente en vibraciones naturales de sistemas de microvigas Timoshenko por el método de elementos finitos. *Mecánica Computacional*, 35:2127–2144, 2017.
- Guerrero G., Bambill D., y Felix D. Free vibration of timoshenko micro beams using the modified couple stress theory. *Pan-American Congress on Computational Mechanics (PANACM)*, 2015.
- Guerrero G., Bambill D., y Felix D. Teoría modificada del gradiente. *Mecánica Computacional*, 34, 2016.
- Lam D., Yang F., Chong A., J. W., y P. T. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51:1477–1508, 2003.
- Ma H., Gao X., y Reddy J. A microstructure-dependent timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:3379–3391, 2008.
- Magrab E. *Vibrations of Elastic Systems With Applications to MEMS and NEMS*. Springer, 2012.
- Mindlin R. *Micro-structure in Linear Elasticity*. Technical Report of Columbia University, 1964.
- Mindlin R. y Eshel N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 4:109–124, 1968.
- Yang F., Chong A., Lang D., y P. T. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39:2731–2743, 2002.
- Zhang B., Yuming H., Dabiao L., Zhipeng G., y Shen L. Non-classical timoshenko beam element based on the strain gradient elasticity theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 79:22–39, 2014.