

DISTINTAS ALTERNATIVAS PARA OBTENER LA MATRIZ DE RIGIDEZ EN LA VIGA DE TIMOSHENKO

DIFFERENT ALTERNATIVES TO OBTAIN THE STIFFNESS MATRIX IN THE TIMOSHENKO BEAM

Alejandro T. Brewer^a, Fernando G. Flores^{ab}, Adriano Trono^{ab} y Sergio Preidikman^{ab}

^aUniversidad Nacional de Córdoba, FCEFYN, Departamento de Estructuras, Av. Velez Sarsfield 1611 , 5016 Córdoba, Argentina. alejandro.brewer@unc.edu.ar

^bInstituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) UNC-CONICET Av. Velez Sarsfield 1611 , 5016 Córdoba, Argentina.

Palabras clave: Viga de Timoshenko, Elementos Finitos.

Resumen.

La teoría de vigas de Timoshenko supone que la sección permanece plana luego de la deformación y admite que la sección no se mantiene normal al eje deformado, lo que permite incluir la deformación de corte. En el marco del método de elementos finitos la aproximación más simple formula elementos que presentan continuidad C^0 . Tomando precauciones para evitar el bloqueo, estos elementos exhiben un buen comportamiento. En este trabajo se obtiene la matriz de rigidez de un elemento de viga según las hipótesis del modelo de Timoshenko recurriendo a tres alternativas: la integración de las ecuaciones diferenciales de equilibrio, el método de las fuerzas y el principio de mínima energía potencial total. Las funciones de interpolación obtenidas presentan continuidad C^1 . Se comparan los resultados con los obtenidos utilizando elementos lagrangianos lineales y se enuncian algunas conclusiones.

Keywords: Bernoulli Beams, Finite Elements.

Abstract.

Timoshenko's beam theory assumes that the section remains plane after deformation and admits that the section does not remain normal to the deformed axis, which allows the inclusion of shear strains. In the framework of the finite element method the simplest approximation formulates elements having C^0 continuity. Using appropriate remedies to avoid shear locking, these elements exhibit good behavior. In this work, the stiffness matrix of a beam element is obtained according to the hypotheses of the Timoshenko model by resorting to three alternatives: the integration of the differential equations of equilibrium, the force method and the principle of minimum total potential energy. The interpolation functions obtained show C^1 continuity. The results are compared with those obtained using linear Lagrangian elements and some conclusions are stated.

1. INTRODUCCIÓN

Las hipótesis de la viga de Timoshenko se encuentran bien explicadas en la literatura y en el marco del método de elementos finitos las matrices de rigidez se formulan utilizando funciones de interpolación de Lagrange, lo que conduce a elementos de continuidad C^0 . Estas formulaciones pueden exhibir el fenómeno conocido como bloqueo por corte, por lo que gran parte de la exposición se dedica a explicar el fenómeno y cómo subsanarlo Oñate (2013). La hipótesis que asume que la sección permanece plana sólo puede sustentarse si se considera que la deformación de corte es constante en la sección. La identidad entre la energía de deformación de corte que produce una distribución de corte variable con la que se produce considerando una deformación de corte constante se logra introduciendo un factor que ajusta el área de la sección, que modificada, se denomina área de corte. Los valores del área de corte para distintas secciones se encuentran tabuladas Young y Budynas (2002) o pueden calcularse utilizando métodos numéricos Pilkey (2002).

En este trabajo las matrices de rigidez, se formulan utilizando métodos del análisis estructural. Los resultados permitirán definir los coeficientes que conforman la matriz genérica:

$$C_k \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & -K_1 & K_2 \\ K_2 & K_3 & -K_2 & K_4 \\ -K_1 & -K_2 & K_1 & -K_2 \\ K_2 & K_4 & -K_2 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y^1 \\ \beta_z^1 \\ u_y^2 \\ \beta_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_y^1 \\ M_z^1 \\ F_y^2 \\ M_z^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

En la expresión (1) se supone que los desplazamientos u_y^i y las fuerzas F_y^i son positivos si tienen el sentido positivo del eje y , y los giros β_z^i y momentos M_z^i son positivos si sus representaciones vectoriales tienen el sentido positivo del eje z , con $i = 1, 2$.

2. LA TEORÍA DE VIGA DE TIMOSHENKO

En esta teoría las hipótesis fundamentales, entre otras (Flores y Brewer (2018)), son: a) las secciones transversales normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas pero no necesariamente ortogonales a dicho eje después de la deformación, y b) la dirección z , normal al plano de la viga, es una de las direcciones principales de inercia de la sección.

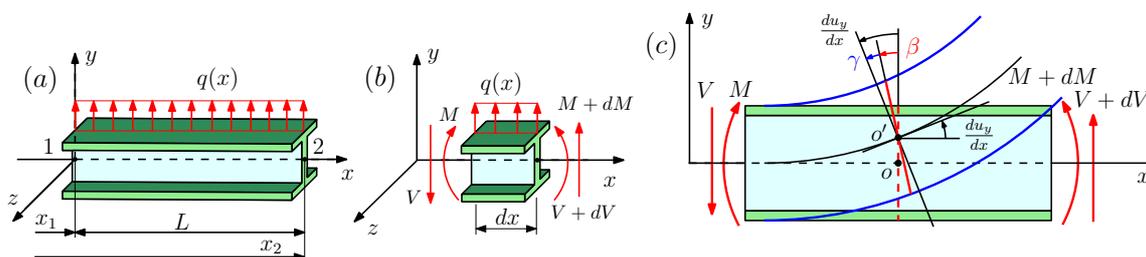


Figura 1: Viga de Timoshenko

Se asume que el plano de movimiento (o plano de carga) de la viga es el plano (x, y) y que el eje x coincide con el centro de corte de las secciones. En la Figura 1(a) se ha representado un elemento de viga cuyo nudo inicial 1 se ubica a la distancia x_1 del origen y su nudo final 2, a la distancia x_2 . Se muestra también una carga arbitraria distribuida $q(x)$. Las ecuaciones de equilibrio, ver la Figura 1(b), resultan:

$$V_x + q(x) = 0 \quad ; \quad V(x) + M_x = 0 \quad (2)$$

donde el subíndice $'x$ indica la derivada respecto de la variable x . En la fig. 1(c) se describe la cinemática de una sección: la línea de trazos en rojo representa una sección antes de la deformación. La línea continua en rojo, la posición deformada. Se asume que los puntos “o” y “o'” son muy próximos y que por estar ubicados en la línea baricéntrica no experimentan desplazamiento horizontal, $u_x(x_o) = 0$. Entoces, si se aplica un momento y la sección gira un ángulo β antihorario respecto a la posición original de la sección, el desplazamiento horizontal resulta:

$$u_x = -\beta y \quad \text{y la deformación específica } \varepsilon = u_x'x = -\beta'x y \quad (3)$$

La deformación de corte se determina a partir de la definición dada en la teoría lineal de elasticidad:

$$\gamma = u_x'y + u_y'x = -\beta + u_y'x \rightarrow \beta = u_y'x - \gamma \quad (4)$$

donde $\gamma = \gamma_m$ es la deformación media de corte (ver Apéndice). El momento flector y el esfuerzo de corte se determinan mediante las ecuaciones constitutivas:

$$M = EI \beta'x \quad ; \quad V = GA_c \gamma \quad (5)$$

3. INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Reemplazando las ec. constitutivas (5) y cinemáticas (4) en las de equilibrio (2), se tiene

$$GA_c (u_y'xx - \beta'x) + q(x) = 0 \quad ; \quad EI\beta'xx + GA_c (u_y'x - \beta) = 0 \quad (6)$$

Despejando $u_y'x$ de la segunda (6)

$$u_y'x = -\frac{EI}{GA_c} \beta'xx + \beta = -\frac{L^2}{12} \alpha \beta'xx + \beta \quad (7)$$

donde el coeficiente $\alpha = 12EI / (A_c G L^2)$ mide la relación entre las rigideces de flexión ($12EI/L^3$) y de corte ($A_c G/L$). Reemplazando (7) en la primera de equilibrio (6)

$$-EI \beta'xxx + q(x) = 0 \quad \text{ó} \quad \beta'xxx = \frac{q(x)}{EI} \quad (8)$$

Dado que el interés, en este trabajo, está centrado en la obtención de la matriz de rigidez, se resolverá la ec. (8) homogénea; integrándola tres veces resulta:

$$\beta = A \frac{x^2}{2} + Bx + C \quad (9)$$

que llevada a la ec.(7) e integrando nuevamente permite escribir:

$$u_y = A \left(-\frac{L^2}{12} \alpha x + \frac{x^3}{6} \right) + B \frac{x^2}{2} + Cx + D \quad (10)$$

Las constantes en las ec. (9) y (10) se determinan imponiendo condiciones esenciales en los extremos. Por ejemplo, cuando $u_y(0) = u_y^1$ y los demás desplazamientos son nulos resultan las siguientes constantes:

$$A = \frac{12 u_y^1}{L^3 (1 + \alpha)} \quad ; \quad B = \frac{-6 u_y^1}{L^2 (1 + \alpha)} \quad ; \quad C = 0 \quad ; \quad D = u_y^1 \quad (11)$$

reemplazando las constantes (11) en las ec. (10), (9), (4) y (5) resultan:

$$\beta(x) = T_1(x) u_y^1 \quad ; \quad u_y(x) = U_1(x) u_y^1 \quad (12)$$

$$V(x) = -\frac{12EI}{L^3 (1 + \alpha)} u_y^1 \quad ; \quad M(x) = \frac{EI}{L^2 (1 + \alpha)} \left[12 \frac{x}{L} - 6 \right] u_y^1 \quad (13)$$

Las funciones $T_1(x)$ y $U_1(x)$ se detallan en la Tabla 2. Interesa conocer cuánto valen las fuerzas y momentos que los extremos hacen sobre la viga para que se cumplan las condiciones de contorno impuestas. Estos valores se obtienen evaluando las expresiones en (13) en los extremos. Considerando las convenciones de signo establecidas en (1) resultan:

$$\begin{bmatrix} F_y^1 \\ M_z^1 \\ F_y^2 \\ M_z^2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{(1 + \alpha) L^2} \begin{bmatrix} 12/L \\ 6 \\ -12/L \\ 6 \end{bmatrix} u_y^1 \quad (14)$$

La expresión (14) es la primer columna de la matriz (1). Los demás coeficientes se pueden obtener en forma similiar y se presentan a continuación en la primera fila de la Tabla 1:

	C_K	K_1	K_2	K_3	K_4
Timoshenko	$\frac{EI}{(1+\alpha)L^2}$	$\frac{12}{L}$	6	$(4 + \alpha) L$	$(2 - \alpha) L$
Bernoulli	$\frac{EI}{L^2}$	$\frac{12}{L}$	6	$4 L$	$2 L$

Tabla 1: Coeficientes de la Matriz de Rigidez

Se observa que cuando $\alpha = 0$ (rigidez al corte elevada), los coeficientes de rigidez toman los valores correspondientes al modelo de Bernoulli.

Cuando ninguno de los desplazamientos nodales son nulos, los giros y desplazamientos resultan:

$$\beta(x) = T_1(x) u_y^1 + T_2(x) \beta_z^1 + T_3(x) u_y^2 + T_4(x) \beta_z^2 \quad (15)$$

$$u_y(x) = U_1(x) u_y^1 + U_2(x) \beta_z^1 + U_3(x) u_y^2 + U_4(x) \beta_z^2 \quad (16)$$

donde las funciones $T_i(x)$ y $U_i(x)$ se detallan en la Tabla 2:

i	$T_i(x)$	$U_i(x)$
1	$\frac{6c_\alpha}{L} [\xi^2 - \xi]$	$c_\alpha [2\xi^3 - 3\xi^2 - \alpha\xi + (1 + \alpha)]$
2	$c_\alpha [3\xi^2 - (4 + \alpha)\xi + (1 + \alpha)]$	$c_\alpha L [\xi^3 - (2 + \frac{\alpha}{2})\xi^2 + (1 + \frac{\alpha}{2})\xi]$
3	$\frac{6c_\alpha}{L} [-\xi^2 + \xi]$	$c_\alpha [-2\xi^3 + 3\xi^2 + \alpha\xi]$
4	$c_\alpha [3\xi^2 - (2 - \alpha)\xi]$	$c_\alpha L [\xi^3 - (1 - \frac{\alpha}{2})\xi^2 - \frac{\alpha}{2}\xi]$

Tabla 2: Funciones de interpolación para el giro $\beta(x)$ y desplazamiento $u_y(x)$

donde $c_\alpha = (1 + \alpha)^{-1}$ y $\xi = x L^{-1}$. Para el modelo de Bernoulli, las expresiones (15) y (16) también son válidas haciendo $\alpha = 0$. En tal caso se verifica que $U_i|_{\alpha=0} = H_i$ y $T_i|_{\alpha=0} = H_i'$; las funciones H_i se conocen como funciones de Hermite de primer orden.

4. MÉTODO DE LAS FUERZAS.

Una alternativa para obtener la matriz de rigidez incluyendo el efecto del corte es utilizando el método de las fuerzas (ver [Bauchau y Craig \(2009\)](#)) o método de flexibilidad. Los coeficientes de la matriz se obtienen por columnas imponiendo un desplazamiento prefijado unitario según la columna de interés, mientras se anulan los demás desplazamientos. Luego se determinan, utilizando el método de flexibilidad, las fuerzas y momentos de extremo de barra que garantizan los desplazamientos impuestos. Por ejemplo, si interesa la primera columna de la matriz (1), entonces debe imponerse una condición de apoyos $\mathbf{u}^T = [u_y^1, \beta_z^1, u_y^2, \beta_z^2] = [1, 0, 0, 0]$; se observa que si estos desplazamientos se reemplazan en (1) resulta una identidad numérica uno a uno entre los elementos de la primera columna con los términos de carga.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{31} \\ K_{21} & K_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y^1 = 1 \\ \beta_z^1 = 0 \end{bmatrix} = \delta_{10} \begin{bmatrix} u_y^1 = 1 \\ \beta_z^1 = 0 \end{bmatrix} + X_1 \begin{bmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{21} \end{bmatrix} + X_2 \begin{bmatrix} \delta_{12} \\ \delta_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 = \frac{12 EI}{(1+\alpha)L^3} = K_{11} \\ X_2 = \frac{6 EI}{(1+\alpha)L^2} = K_{21} \end{bmatrix}$$

con:

$$\delta_{11} = \frac{L^3}{3EI} + \frac{L}{A_c G} ; \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{L^2}{2EI} ; \delta_{22} = \frac{L}{EI}$$

Figura 2: Planteo para la obtención de la primera columna

En la Figura 2 los elementos K_{i1} , ($i = 1, 2, 3, 4$) se identifican con las fuerzas de extremo de barra necesarias para imponer los desplazamientos. El problema hiperestático se resuelve por superposición. En la Figura 2 se incluyen los estados unitarios, las ecuaciones de compatibilidad y los valores que resultan para las incógnitas X_1 y X_2 . Conocidas las incógnitas hiperestáticas, por superposición, se pueden obtener las reacciones de apoyo que garantizan los desplazamientos prescritos y, por lo tanto, los valores de los coeficientes de la primera columna de la matriz de rigidez. El mismo procedimiento puede extenderse para obtener los demás coeficientes de la matriz y resultan idénticos a los que se detallan en la primera fila de la Tabla 1.

El desplazamiento $u_y(x)$ y giro $\beta(x)$ en función de los desplazamientos nodales, se pueden determinar a partir de los resultados obtenidos al determinar cada columna de la matriz de rigidez. Por ejemplo, al determinar la primera columna, la participación de u_y^1 en la definición de $u_y(x)$ y $\beta(x)$ se obtiene a partir de la fuerza F_y^1 y el momento M_z^1 en el extremo 1 que permiten escribir las funciones que describen la distribución del corte $V(x)$ y momento flector $M(x)$; posteriormente se igualan con las ecuaciones constitutivas (5), se utilizan las cinemáticas (4) y resultan:

$$V(x) = -K_{11} u_y^1 = \gamma(x) GA_c = (u_y'x - \beta(x)) GA_c \tag{17}$$

$$M(x) = K_{11} u_y^1 x - K_{21} u_y^1 = EI \beta_x \tag{18}$$

en las que K_{11} y K_{21} (ó K_1 y K_2 en la Tabla 1) son los primeros elementos de la primera columna de la matriz en (1). Integrando la expresión (18), teniendo en cuenta que $\beta(0) = 0$, se obtiene $\beta(x)$; llevando $\beta(x)$ a la ec.(17) y recordando que $u_y(0) = u_y^1$, se obtiene $u_y(x)$:

$$\beta(x, u_y^1) = \frac{6 c_\alpha}{L} (\xi^2 - \xi) u_y^1 \quad \text{y} \quad u_y(x, u_y^1) = c_\alpha \left(2\xi^3 - 3\xi^2 - \alpha \xi + \frac{1}{c_\alpha} \right) u_y^1 \tag{19}$$

donde $c_\alpha = (1 + \alpha)^{-1}$ y $\xi = x L^{-1}$. Los resultados coinciden con los obtenidos previamente, ver ec.(12). La participación en $\beta(x)$ y $u_y(x)$ de los demás desplazamientos nodales se obtiene en forma similar y se corresponden con las expresiones (15) y (16).

La matriz de rigidez que corresponde al modelo de Bernoulli se obtiene ignorando la participación del diagrama de corte, ver Figura 2, en la determinación del coeficientes de flexibilidad δ_{11} . En forma similar, conocidos la fuerza y momento de extremo asociados con la obtención de cada columna, las ecuaciones constitutivas y cinemáticas del modelo de Bernoulli, se pueden determinar las funciones H_i que interpolan el desplazamiento y las $H_{i'x}$ que interpolan el giro.

5. APLICACIÓN DEL PMEPT

Las filas de la matriz de rigidez de una viga, pueden también obtenerse aplicando el principio de mínima energía potencial total (*PMEPT*), escribiendo el funcional π en función de los desplazamientos nodales:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI [\beta(x)']^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L GA_c [\gamma(x)]^2 dx - P_c \quad (20)$$

expresión en la que el primer término es la energía interna producida por la flexión, el segundo mide la energía de deformación producida por el corte y el último, el potencial de las cargas. Si sólo actúan cargas nodales, P_c se escribe como:

$$P_c = u_y^1 F_y^1 + \beta_z^1 M_z^1 + u_y^2 F_y^2 + \beta_z^2 M_z^2 \quad (21)$$

El *PMEPT* establece que si π se obtiene utilizando desplazamientos compatibles con los vínculos, entonces el mínimo de π satisface equilibrio. En este caso, las matrices se obtienen por filas. Para la viga de Timoshenko la primera fila de la matriz de rigidez se escribe como:

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_y^1} = EI \int_0^L T_{1'x} [\beta'_{1x}] dx + GA_c \int_0^L [U_{1'x} - T_1] [u_{y'x} - \beta(x)] dx - F_y^1 = 0 \quad (22)$$

en la que $\beta(x)$ y $u_y(x)$ están definidas en las expresiones (15) y (16) y $\gamma(x)$ en la ec.(4). Las demás filas de la matriz se obtienen en forma similar y sus coeficientes toman los valores descriptos en la Tabla (1).

Los elementos de la matriz de rigidez para el modelo de Bernoulli, también pueden obtenerse de la expresión (22) haciendo $\alpha = 0$ en las expresiones contenidas en la Tabla 2. El término de corte desaparece debido a la identidad $u_{y'x} = \beta$.

6. ELEMENTOS FINITOS DE CONTINUIDAD C^0

En el marco del método de elementos finitos, el elemento más sencillo para formular la matriz de rigidez considerando la deformación de corte, es el que interpola los desplazamientos y giros nodales en forma lineal. Como en todo problema de residuos ponderados, se busca una solución débil forzando el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio (6) integrándolas, previamente multiplicadas por funciones de peso (que se asocian con desplazamientos virtuales), en el dominio que define al elemento:

$$\int_0^L [\delta u_y (V_x + q(x)) + \delta \beta_z (M_x + V(x))] dx = 0 \quad (23)$$

Los desplazamientos y giros, reales y virtuales se aproximan haciendo

$$u_y = N_i u_y^i \quad ; \quad \beta_z = N_i \beta_z^i \quad ; \quad \delta u_y = N_i \delta u_y^i \quad ; \quad \delta \beta_z = N_i \delta \beta_z^i \quad i = 1, 2 \quad (24)$$

donde $N_1 = 1 - x/L$ y $N_2 = x/L$ son funciones de Lagrange lineales. Previo al reemplazo de las expresiones (24), la ec.(23) se integra por partes. El uso de las ecuaciones constitutivas y la forma matricial de los desplazamientos reales y virtuales permiten obtener los elementos de la matriz de rigidez que se muestran en la primera fila de la Tabla 3.

	C_K	K_1	K_2	K_3	K_4
TL_{sIR}	$\frac{EI}{\alpha L^2}$	$\frac{12}{L}$	6	$(4 + \alpha) L$	$(2 - \alpha) L$
TL_{cIR}	$\frac{EI}{\alpha L^2}$	$\frac{12}{L}$	6	$(3 + \alpha) L$	$(3 - \alpha) L$

Tabla 3: Coeficientes de las Matrices de Rigidez

Como se verá en la sección de ejemplos, estos elementos, lagrangianos sin Integración Reducida (TL_{sIR}) pueden dar desplazamientos mucho menores a los que presenta la viga de Bernoulli, fenómeno que se conoce como bloqueo por corte. Una de los remedios es subintegrar los términos asociados con el corte, lo que conduce a los elementos de la segunda fila (TL_{cIR}) que no bloquean. El tratamiento de la expresión (23), consideraciones sobre el bloqueo y otras propuestas en la formulación de elementos finitos en vigas de Timoshenko pueden encontrarse en Oñate (2013) y Bhatti (2006).

7. EJEMPLOS

En la Figura 3 se muestran los desplazamientos u_y de los puntos de aplicación de cargas puntuales actuando en vigas, de sección rectangular, en voladizo y con ambos extremos fijos, referidos a los que resultan del modelo de Bernoulli bajo las mismas condiciones. Esto significa que la función $u_y^B/u_y^B = 1$ representa la respuesta del modelo de Bernoulli para vigas de cualquier relación h/L , donde h es la altura de la sección y L la longitud de la viga. En ambas figuras se muestran las respuestas que se obtienen utilizando matrices de rigidez cuyos elementos se describen en las Tablas 1 y 3. Para el trazado de las gráficas se utilizó un módulo de poisson $\nu = 0,3$.

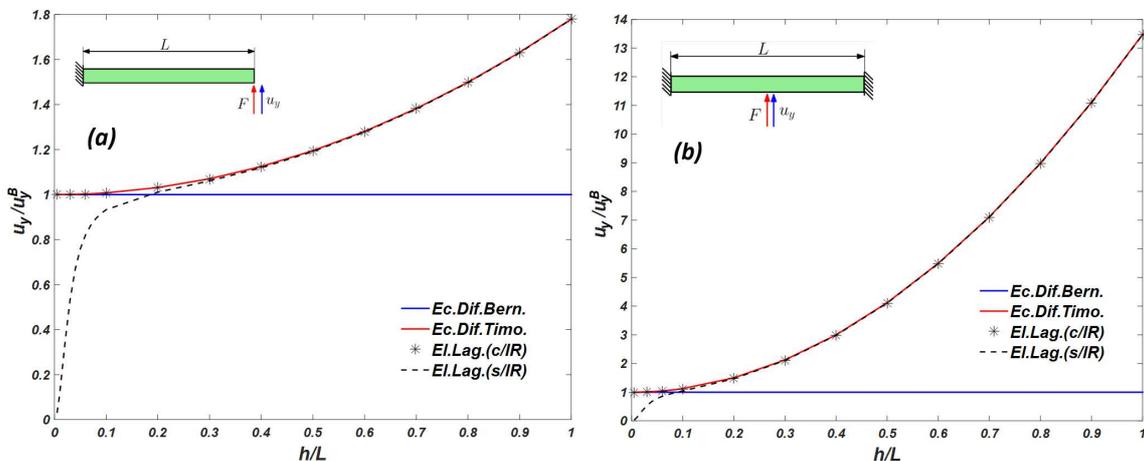


Figura 3: Vigas con distintas condiciones de apoyo

Para una sección rectangular el coeficiente α toma el valor $\alpha = 3,12 \left(\frac{h}{L}\right)^2$. Tanto en la Figura 3(a) como en la 3(b) se observa que cuando $\alpha \rightarrow 0$, la sección se rigidiza al corte, $\gamma \rightarrow 0$, y $\beta \rightarrow u_y'x$ (ver ec.(4)) y el comportamiento de la viga de Timoshenko (curva en rojo) se corresponde con el modelo de Bernoulli. Dado que los valores que se muestran en la Tabla 1 corresponden a la solución de la ecuación diferencial que describe al modelo de Timoshenko y que el método de las fuerzas también es una opción para la obtención de dichos coeficientes, resulta sencillo obtener, para los modelos de la figura, la función analítica que describe la curva $u_y^T/u_y^B(h/L)$: a) para la viga en voladizo, aplicando el principio de trabajos virtuales resulta,

$$u_y^T = \frac{1}{3} \frac{L^3}{EI} F + \frac{L}{GA_c} F \quad \therefore \quad \frac{u_y^T}{u_y^B} = 1 + 3 \frac{EI}{GA_c L^2} = 1 + 0,78 \left(\frac{h}{L}\right)^2 \quad (25)$$

que si se evalúa, por ejemplo, en $h/L = 1$ resulta $u_y^T/u_y^B = 1,78$, que es el valor máximo en la Figura 3(a); b) para la viga con ambos extremos empotrados, si bien también se puede utilizar el método de las fuerzas y el principio de trabajos virtuales, resulta más directo y sencillo resolver el problema ensamblando 2 elementos de longitud $L/2$ cada uno. Dado que el problema es simétrico y por las características de los coeficientes de las matrices, al ensamblar e imponer las condiciones de borde se obtiene

$$2 K_1 u_y^2 = F \quad \therefore \quad u_y^2 = u_y^T = \frac{(1 + \alpha) L^3}{192 EI} F \quad (26)$$

y haciendo $\alpha = 0$ en la anterior, se obtiene el desplazamiento del modelo de Bernoulli, por lo que

$$\frac{u_y^T}{u_y^B} = 1 + \alpha = 1 + 3,12 \left(\frac{2h}{L}\right)^2 = 1 + 12,48 \left(\frac{h}{L}\right)^2 \quad (27)$$

que, por ejemplo, evaluada en $h/L = 1$ proporciona el máximo valor en la Figura 3(b). Las expresiones exactas (25) y (27) muestran que para cualquier relación h/L el desplazamiento es igual o mayor a la solución de Bernoulli.

Además del comportamiento de la solución exacta, la Figura 3 muestra los resultados obtenidos con los elementos lagrangianos de la Tabla 3 con (Timosh.c/IR) y sin integración reducida (Timosh.s/IR).

Viga en voladizo								
Timoshenko	1.0000	1.0001	1.0020	1.0078	1.0312	1.1950	1.3822	1.7800
Timosh.c/IR	0.9994	0.9995	1.0013	1.0072	1.0306	1.1944	1.3816	1.7794
Timosh.s/IR	0.0303	0.1110	0.7588	0.9330	1.0109	1.1912	1.3799	1.7786
$\frac{h}{L}$	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.7	1

Tabla 4: Resultados de la relación u_y/u_y^B usando elementos lagrangianos

En la Tabla 4, para la viga en voladizo, se muestran los resultados obtenidos con 20 elementos. También se modeló el elemento exacto, cuyos resultados se incluyen para comparación. Se observa que el elemento con integración reducida se comporta muy bien, mientras que el otro elemento (Timosh.s/IR) bloquea cuando $\alpha \rightarrow 0$. Por el contrario cuando la relación h/L aumenta, los resultados tienden a los de la solución exacta.

En relación a la convergencia, el elemento exacto converge al resultado utilizando el menor número de elementos que permita modelar el problema. En los ejemplos mostrados alcanzan 1 elemento para la viga en voladizo y 2 elementos para la viga con extremos fijos.

	Número de elementos en la viga en voladizo									
$\frac{h}{L}$	1	2	3	4	6	10	15	18	20	Exacto
0.1	0.7578	0.9453	0.9800	0.9922	1.0009	1.0053	1.0067	1.0070	1.0072	1.0078
0.2	0.7812	0.9687	1.0034	1.0156	1.0243	1.0287	1.0301	1.0304	1.0306	1.0312
0.5	0.9450	1.1325	1.1672	1.1794	1.1881	1.1925	1.1939	1.1942	1.1944	1.1950

Tabla 5: Convergencia del elemento lagrangiano integrado en forma reducida

Los resultados del elemento Timosh.c/IR, en función de la cantidad de elementos, para la viga en voladizo, se muestra en la Tabla 5 para tres relaciones h/L . Se puede constatar que los errores porcentuales no sólo disminuyen al aumentar el número de elementos, sino que también disminuyen al aumentar la relación h/L .

8. CONCLUSIONES

En este trabajo se obtiene la matriz de rigidez de un elemento de viga según las hipótesis del modelo de Timoshenko recurriendo a tres alternativas: la integración de las ecuaciones diferenciales de equilibrio, el método de las fuerzas y el principio de mínima energía potencial total. Los dos primeros métodos permiten determinar tanto la matriz de rigidez como las funciones de interpolación para desplazamientos y giros. Se concluye que:

1. La matriz obtenida según los métodos mencionados corresponde a la solución de la ecuación diferencial homogénea y por lo tanto es una solución exacta. En consecuencia este elemento de continuidad C^1 no bloquea y muestra convergencia con el menor número de elementos que permitan modelar el problema.
2. Se observa que los polinomios que interpolan los desplazamientos y giros en el modelo de Timoshenko se reducen a los polinomios de Hermite y su derivada cuando la relación de rigideces $\alpha = 0$. Y del mismo modo la matriz de Timoshenko se reduce a la de Bernoulli. Es decir que el modelo de Bernoulli está incluido en el de Timoshenko. Entonces, los desplazamientos que se obtienen según Timoshenko son iguales (vigas largas y bajas) o mayores (vigas cortas y altas) que los que resultan utilizando el modelo de Bernoulli.
3. Los elementos lagrangianos de continuidad C^0 con integración reducida muestran un buen comportamiento y convergen a la solución exacta desde abajo a medida que se aumenta el número de elementos y la relación entre la altura de la sección y la longitud de la viga.

APÉNDICE

En la teoría de vigas de Timoshenko, la sección se mantiene plana, por lo que la deformación de corte, variable en la coordenada y , ($\gamma(x, y) = \sigma_{xy}(x, y)/G$), debe asumirse constante. Se define la deformación media de corte $\gamma(x, y) = \gamma_m(x)$ igualando la energía de deformación que se produce considerando la distribución de la tensión de corte variable, con la energía que produciría una tensión media de corte ($\sigma_m(x) = G \gamma_m(x)$). Para una sección rectangular, esto implica:

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{\sigma_{xy}^2}{G} dV = \frac{1}{2} \int \frac{1}{G} \left[\frac{VS}{Ib} \right]^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{V^2}{I^2 b^2 G} \left(\int_A S^2 dA \right) dx \quad (28)$$

donde el valor de la tensión, en este caso, se calcula utilizando la expresión de Jouravsky; S es el momento estático de la sección, $S = \left[\frac{b}{2} (c^2 - y^2) \right]$, que se encuentra sobre la coordenada y y $\int_A S^2 dA = \frac{4}{15} c^5 b^3$; expresión en la que b y c son el ancho y la mitad de la altura de la sección. Reemplazando, esta integral en la expresión de la energía resulta:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{V^2(x)}{\frac{5}{6} A G} dx = \frac{1}{2} \int_0^L V(x) \frac{V(x)}{A_c G} dx = \frac{1}{2} \int_0^L V(x) \gamma_m dx = \frac{1}{2} \int_0^L A_c G \gamma_m^2 dx$$

en la que $A = 2cb$ es el área de la sección transversal, y $A_c = 5A/6$ es el área de corte para la sección rectangular. La deformación media de corte se define como $\gamma_m = \frac{V(x)}{A_c G}$.

A partir de γ_m se puede mostrar que la sección permanece plana y cuánto contribuye al desplazamiento: en un tramo de viga de longitud ΔL la deformación de corte se puede interpretar descomponiendo su efecto según lo descrito en la Figura 4

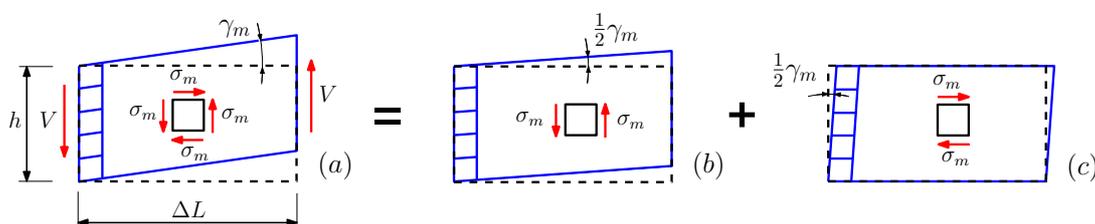


Figura 4: Deformación por corte en un tramo de viga

Se asume que el borde izquierdo en la Figura 4 (a) está empotrado. En la figura (b) se considera el efecto de las tensiones de corte “verticales” que desplazan verticalmente la cara derecha un valor $\frac{1}{2} \gamma_m \Delta L$. En la figura (c) las tensiones de corte “horizontales” desplazan la superficie superior respecto de la inferior en $\frac{1}{2} \gamma_m h$, y si se considera que el borde izquierdo está empotrado, entonces debe rotarse la figura (c) un ángulo $\frac{1}{2} \gamma_m$ con lo cual la figura (c) se hace idéntica a la (b) y la suma de ambas equivale a la (a).

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero de la SeCyT-UNC y de CONICET

REFERENCIAS

- Bauchau O. y Craig J. *Structural Analysis, With Applications to Aerospace Structures*. Springer, 2009.
- Bhatti M. *Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures*. John Wiley and Sons, 2006.
- Flores F. y Brewer A. *Notas del curso El Método de Elementos Finitos*. Departamento de Estructuras, FCEfyN-UNC, 2018.
- Oñate E. *Structural Analysis with the Finite Element Method, Linear Static, Vol.2*. Springer, 2013.
- Pilkey W. *Analysis and Design of Elastic Beams. Computational Methods*. John Wiley Sons, New York, USA, 2002.
- Young W. y Budynas R. *Roark's Formulas for Stress and Strain*. McGraw-Hill, New York, USA, 2002.