

## COMPARACIÓN ENTRE RESULTADOS EXPERIMENTALES Y NUMÉRICOS DE MEMBRANAS ESTIRADAS CON ARRUGAS

### A COMPARISON OF EXPERIMENTAL AND NUMERICAL RESULTS OF WRINKLED STRETCHED MEMBRANES

**Fernando G. Flores<sup>a,b</sup> y Alejandro T. Brewer<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> *Universidad Nacional de Córdoba y CONICET (IDIT) Av. Velez Sarsfield 1611 , 5016 Córdoba, Argentina. fernando.flores@unc.edu.ar*

<sup>b</sup> *Universidad Nacional de Córdoba, FCEFYN, Departamento de Estructuras, Av. Velez Sarsfield 1611 , 5016 Córdoba, Argentina. alejandro.brewer@unc.edu.ar*

**Palabras clave:** Membranas, Elementos Finitos

**Resumen.** El análisis de membranas en tensión bajo sollicitaciones que conducen a la aparición de arrugas se realiza habitualmente con modelos sin resistencia a la compresión. Estos predicen el comportamiento global de la membrana, pero no detallan el número y altura de las arrugas. El funcionamiento de muchas membranas depende de la geometría deformada y, por lo tanto, el análisis requiere obtener los detalles de las arrugas. Los resultados experimentales de estas películas son difíciles de reproducir, conduciendo a patrones de deformación diferentes con estructuras prácticamente idénticas. Para el análisis estructural detallado es necesario recurrir a formulaciones de láminas delgadas. En este trabajo se realiza una comparación de un conjunto de resultados experimentales con modelos numéricos de elementos finitos de láminas sin rotaciones. La simulación se realiza dentro de un programa de elementos finitos con integración explícita de las ecuaciones de movimiento con un fuerte amortiguamiento (relajación dinámica). Diferentes estrategias en las condiciones iniciales o en las condiciones de carga permiten obtener configuraciones geométricas que pueden compararse con las experimentales.

**Keywords:** Membranes, Finite Elements.

**Abstract.** The behavior of stretched membranes under different sollicitations that lead to the appearance of wrinkles, is usually performed with models based on precluding compressive stresses. They can predict the global behavior of the membrane but without details, such as the of number and height of wrinkles. There are many membranes where performance is dependent on the deformed geometry and therefore the structural analysis requires the details of wrinkle formation. The experimental results of these films are difficult to reproduce leading to different patterns of deformation with practically identical structures. For the detailed structural analysis it is necessary to resort to formulations of thin shells. In this work a comparison of a set of experimental results with numerical models of rotation-free finite elements is attempted. The simulation is performed within a finite element program with explicit integration of the equations of motion including a strong damping (dynamic relaxation). Different strategies in the initial conditions and load conditions, allow to obtain geometric configurations that can be compared with the experimental ones.

## 1. INTRODUCCIÓN

El uso de membranas como elemento estructural es diverso. Desde estructuras inflables hasta tenso estructuras, muchas veces cubriendo grandes superficies. Una aplicación novedosa en estudio son las velas solares, que requieren, para su mayor eficacia, disminuir la formación de arrugas, es decir lograr una membrana tan plana como sea posible durante su etapa de trabajo.

El análisis de estructuras planas membranales se remonta a comienzos del siglo XX, dentro de la industria aeronáutica con el análisis de vigas en campo de tensión diagonal (CTD), donde una membrana rectangular enmarcada sólo podía tomar tensión en la dirección de la diagonal traccionada y no aportaba al equilibrio en la dirección comprimida. Estas placas metálicas, si bien tienen una baja resistencia al pandeo, son relativamente muy gruesas en comparación con otras aplicaciones modernas. El análisis de arrugas en membranas tradicionalmente se trata usando la teoría del CTD, con elementos de membrana en conjunción con leyes constitutivas o cinemáticas que impiden la existencia de compresiones. La principal limitación de esta aproximación es que no provee la configuración detallada de las arrugas. Una descripción completa de los trabajos llevados a cabo sobre la teoría del CTD puede encontrarse en [Steigmann \(1990\)](#) y las referencias allí citadas. Hay una gran cantidad de trabajos en la literatura usando técnicas diferentes para introducir el comportamiento sin-compresión en elementos de membrana. Para mencionar sólo algunos trabajos, [Raible et al. \(2005\)](#) desarrollaron un algoritmo para arrugas para materiales ortótropos basado en la descomposición del tensor de deformación. [Akita et al. \(2007\)](#) presentaron una técnica de proyección para obtener una matriz de elasticidad de tensión plana modificada. [Pagitz y Abdalla \(2010\)](#) presentaron una aproximación multi-grilla incluyendo grados de libertad (GdL) de rotación en el plano que definen la dirección de la arruga. Arrugas de membranas inelásticas han sido consideradas por [Mosler y Cirak \(2009\)](#). Para capturar la geometría detallada de las arrugas [Weinberg y Neff \(2008\)](#) propusieron un modelo de membrana delgada geoméricamente exacto incluyendo GdL de rotación e introduciendo una viscosidad artificial.

En general, si se desea la configuración detallada, la simulación debe tener en cuenta tanto los efectos membranales como los flexionales, i.e. se necesitan elementos de lámina. Los aspectos principales de este problema pueden ser resumidos como sigue (ver también Ref. [Ramm y Wall \(2005\)](#)): a) las hipótesis de Kirchhoff-Love para análisis de láminas son razonables, b) la rigidez flexional es muy baja pero debe considerarse para obtener: b1) tamaño y número de las arrugas, y b2) formas 3D de deformadas detalladas, c) pueden ser necesarias discretizaciones finas, d) deben considerarse grandes desplazamientos y rotaciones y e) debe tomarse en cuenta comportamiento anisotrópo con deformaciones moderadas.

El uso de elementos de láminas estándar, i.e. basados en el requisito de continuidad  $C^0$ , pueden tener problemas debido a las aproximaciones usualmente utilizadas para tratar el corte transversal. En la primera década del siglo XXI se han desarrollado una importante cantidad de elementos basados en la teoría clásica de láminas (i.e. despreciando deformaciones de corte transversales). Todas estas aproximaciones son no-conformes (salvo tal vez las desarrolladas bajo el paradigma de isogeometría) y no incluyen GdL de rotación. La mayoría de las aproximaciones calculan las curvaturas recurriendo a una parcela de elementos y en muchos casos pueden verse como una generalización de un esquema en diferencias finitas para una malla arbitraria de triángulos; ver por ejemplo [Sabourin y Brunet \(2006\)](#); [Flores y Oñate \(2007\)](#). Otras aplicaciones recurren a la isogeometría, usando técnicas de subdivisión de superficies [Cirak et al. \(2000\)](#) o NURBS (ver por ejemplo [Kiendl et al. \(2015\)](#)). Tres de las principales ventajas de los elementos sin rotaciones son que: a) el número total de grados de libertad se reduce no-

tablemente (típicamente a un 50 o 60 %) con importantes ahorros en almacenamiento y tiempo de proceso, b) los problemas asociados con los vectores rotación o ternas locales (por ejemplo matrices tangentes no simétricas) que son en general dificultosas y costosas de parametrizar y actualizar, no aparecen y c) no se requiere de técnicas especiales para resolver problemas que se presentan en el caso de láminas delgadas (e.g. bloqueo por corte). Existen también algunas desventajas, pueden mencionarse: a) sensibilidad a nudos irregulares (un nudo regular es aquel compartido por 6 triángulos), b) la combinación con otros elementos finitos, como vigas o elementos de sólido, no es directa y c) la codificación resulta más compleja.

El análisis elástico con grandes desplazamientos de láminas muy delgadas (membranas o películas) requiere de técnicas especiales debido a que el problema es numéricamente sensible. Los aspectos principales a considerar y los problemas que aparecen comúnmente en estas simulaciones son (para integradores implícitos): a) matrices de rigidez tangente mal condicionadas, b) pueden necesitarse estrategias especiales debido a rigideces nulas o negativas (membrana y flexión), c) número de GdL muy grande y la necesidad de gran capacidad de almacenamiento, d) bloqueo por corte (cuando se usan elementos del tipo Reissner-Mindlin), e) para iniciar el proceso de pandeo puede ser necesario incluir imperfecciones geométricas, f) puede haber presencia de contacto y auto-contacto, donde funcionan mejor los elementos de bajo orden, g) se requieren pasos de avance cortos y una continua reformulación de la matriz de rigidez y h) pueden aparecer matrices no simétricas debido a contacto con fricción o sistemas locales con GdL de rotación.

En Flores y Oñate (2011) se propuso usar el elemento triangular de lámina sin GdL de rotación descrito en Flores y Oñate (2007) en el programa SIMPACT (Flores (2012)) con un esquema de integración explícita de las ecuaciones de movimiento para la simulación del comportamiento de membranas, estrategia que ya había sido usada para el inflado/desinflado de estructuras inflables. En ese caso se mostraron ejemplos de membranas isotropas y ortótropas rectangulares sometidas a corte y telas sobre pedestales. En lo que nos interesa aquí, las simulaciones realizadas con la estrategia propuesta sobre membranas mostraron muy buenas propiedades de convergencia, con discretizaciones razonables y tiempos de simulación relativamente bajos en computadoras de escritorio. Las membranas consideradas tenían una relación de aspecto (lado/espesor) entre 1.000 y 3.000. En el presente trabajo se analizan 3 membranas cuya relación de aspecto es entre 15.000 y 24.000, es decir membranas mucho más delgadas que requieren discretizaciones más finas y mayor demanda de cálculo. En los 3 casos existen además resultados experimentales (Wong y Pellegrino (2006); Lecieux y Bouzidi (2010)) que permiten comparar resultados e identificar las ventajas y limitaciones de las simulaciones numéricas utilizadas.

## 2. MEMBRANA RECTANGULAR SOMETIDA A CORTE

La Figura 1 muestra la geometría de una membrana rectangular restringida de desplazarse en los bordes inferior y superior y libre en los laterales. El borde superior es desplazado un valor  $\delta_c$  lo que genera compresiones y la membrana sale de su plano generando arrugas. Resultados experimentales de este modelo fueron publicados en Wong y Pellegrino (2006) que también obtuvieron las propiedades mecánicas del material (Kapton<sup>TM</sup>).

Al ser la geometría plana, el análisis numérico conduce a que la misma se mantenga plana. Existen diferentes formas de lograr que la membrana salga de su plano: a) buscar el valor  $\delta_{crit}$  que hace que la matriz tangente tenga determinante nulo, es decir encontrar el punto de bifurcación del equilibrio y realizar el cambio de trayectoria, usualmente usando sistemas extendidos Wriggers et al. (1988) b) realizar primero un análisis lineal de bifurcación y utilizar el primer

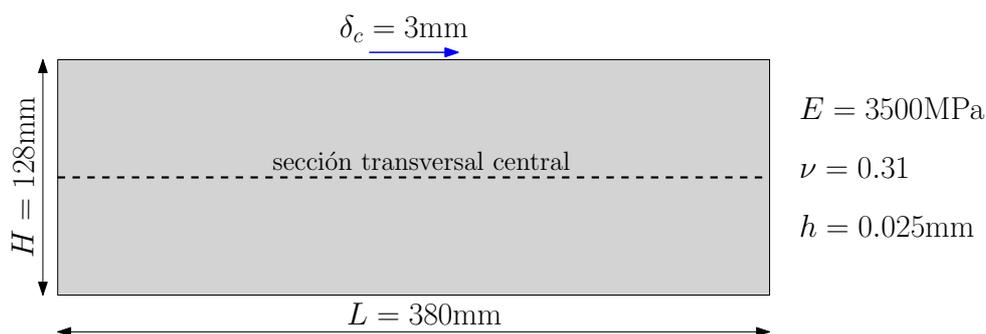


Figura 1: Membrana sometida a corte. Geometría.

modo de pandeo como una imperfección geométrica para luego realizar un análisis no-lineal del modelo imperfecto c) colocar una carga pequeña en la dirección transversal (por ejemplo el peso propio) y d) considerar una velocidad inicial en la dirección transversal. En el caso de técnicas de integración implícita, lo habitual es considerar la opción “b”. En estructuras esbeltas, pero con una rigidez apreciable, esta técnica es adecuada y permite avanzar sobre la trayectoria secundaria sin dificultades. Las imperfecciones geométricas existen en todas las estructuras y naturalmente en todas las membranas, pero no tienen la forma del primer modo de pandeo; se utiliza esta forma debido a que se supone que es la que más rápidamente se desarrolla. Esto requiere un factor de escalamiento del modo crítico, por parte del usuario, que normalmente se expresa como un porcentaje del espesor, por ejemplo  $h/4$  que en este ejemplo sería del orden de  $6 \mu m$ . En el caso de películas, la estrategia puede ser muy costosa debido a que la membrana rápidamente puede saltar a otros modos de deformación, lo cual requiere pasos de avance muy pequeños, constante actualización de la matriz de rigidez y posible pérdida de convergencia. En este trabajo, donde se usa un integrador explícito de las ecuaciones de equilibrio, se opta por las opciones “c” o “d”. En este caso en particular se considera la acción del peso propio en la dirección transversal a la membrana.

La relación de aspecto en este ejemplo es  $\frac{L}{h} = 15200$ , lo cual está muy por encima de las membranas simuladas en Flores y Oñate (2011), por lo que se espera tener que considerar mallas muy densas. Aquí se utilizaron mallas estructuradas con una relación entre los incrementos  $\Delta x/\Delta y \cong 0,75$ . Un valor que puede servir de referencia para evaluar la convergencia es la fuerza necesaria para mover el borde superior. En la Figura 2.a se ha graficado el valor de dicha fuerza en función del número total de elementos triangulares para siete modelos numéricos diferentes. Se observa que las tres primeras discretizaciones están lejos de convergencia y que las últimas dos si parecen acercarse a la convergencia, es decir que se necesitan al menos  $10^5$  elementos para tener un modelo confiable. Adicionalmente, en el mismo gráfico, se ha incluido el resultado obtenido con un modelo 2D en base a la teoría del CTD. Allí se usó un elemento serendípito de 8 nudos (Brewer et al. (2018)) y puede verse que con pocos elementos se obtienen resultados aceptables (en dicha curva se ha supuesto que un elemento de 8 nudos es equivalente a 8 triángulos de 3 nudos). En la simulación 2D los tiempos de proceso son mucho menores, pero no hay posibilidades de determinar la distribución de las arrugas y sus alturas. Por otro lado, en la Figura 2.b se grafican las tensiones principales a lo largo de la sección transversal central. La mayor es naturalmente la tracción en la dirección longitudinal de la arruga. Notar que la segunda no es nula y la excelente correlación entre ambos modelos.

En la Figura 3 se ve la membrana deformada, en la parte superior la obtenida en la simulación (malla más densa), en tanto que en la parte inferior se ve una foto del experimento. A lo largo de la “sección transversal central” puede verse que la altura de las arrugas es máxima hacia los

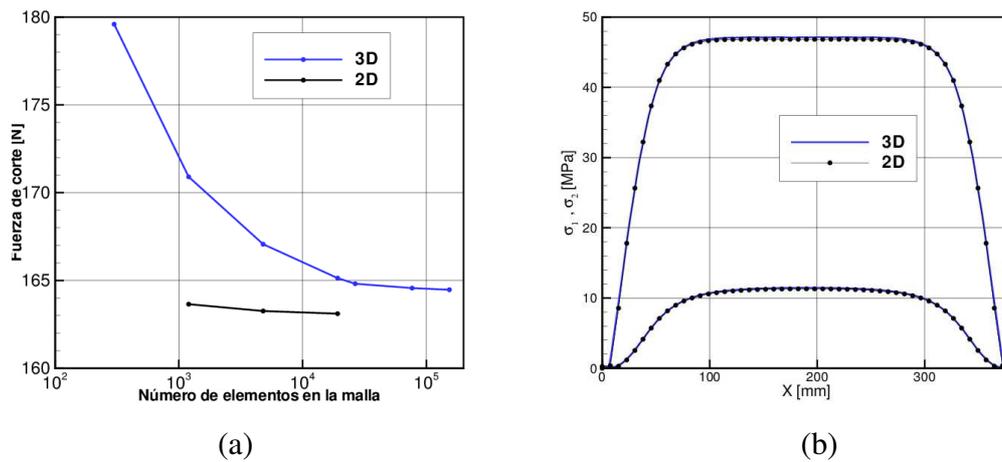


Figura 2: Membrana sometida a corte. (a) Fuerza de corte. (b) tensiones principales

bordes y relativamente uniforme en la parte central. El peso propio hace que los bordes libres sin tensiones se desplacen ligeramente hacia abajo. Sobre los contornos horizontales puede verse que la longitud de onda de las arrugas es particularmente baja.

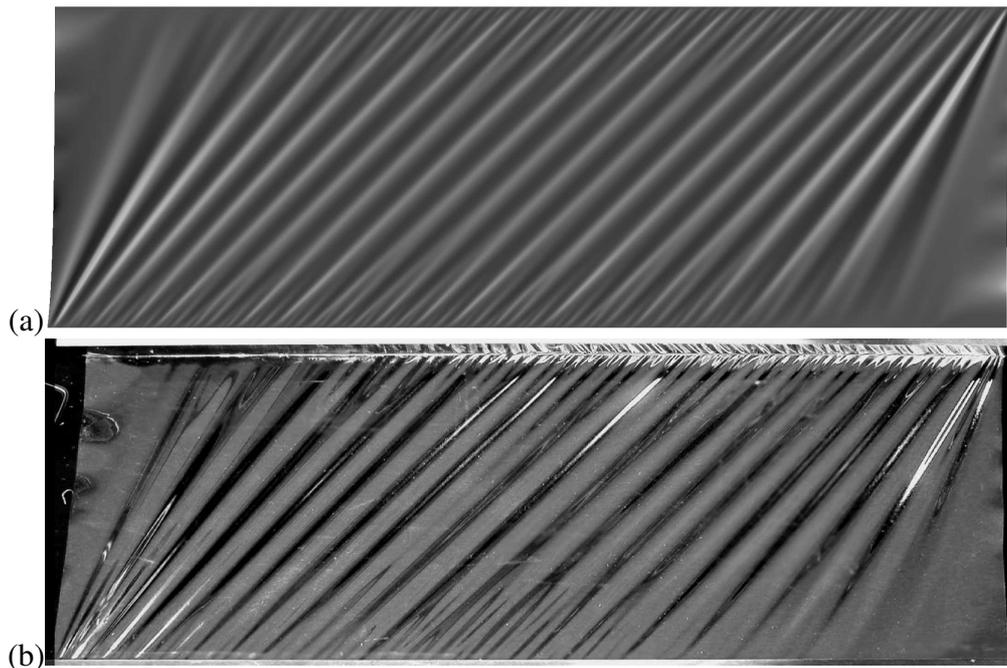


Figura 3: Geometría deformada de membrana sometida a corte. (a) simulación, (b) experimento.

En la Figura 4 se muestra un perfil de desplazamientos en el primer tercio de la “sección transversal central. Se incluyen resultados obtenidos con las tres mallas más densas consideradas. Como podría inferirse de la Figura 2 los resultados de las dos mas densas son muy similares y difieren de la malla  $48 \times 200$  donde aparecen arrugas ligeramente más altas y de mayor longitud. También se incluyen los resultados experimentales que comparan muy bien teniendo en cuenta la extrema esbeltez de estas películas y las inevitables imperfecciones geométricas existentes en el experimento. Como referencia, el tiempo de CPU para simular la malla más densa con un procesador *i7 - 6700* bajo el SO Windows fue de 1h 30min..

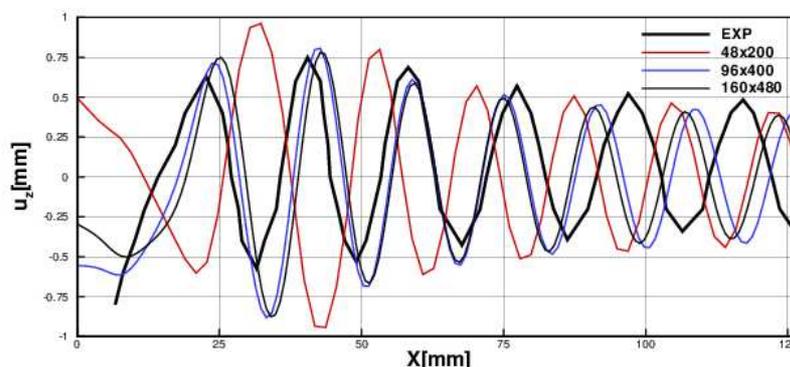


Figura 4: Membrana sometida a corte. Perfil de desplazamientos.

### 3. MEMBRANA CUADRADA BAJO CARGAS DE ESQUINA

El segundo ejemplo es una membrana cuadrada con sus esquinas truncadas y sometidas a cargas diagonales como indica la Figura 5. Las propiedades mecánicas del material y el espesor son las mismas del primer ejemplo. Las esquinas truncadas están reforzadas y dichos bordes se mueven como cuerpo rígido en la dirección diagonal. Inicialmente se cargan las dos diagonales con un valor de 5N y luego se aumenta sólo en una dirección. La malla utilizada contiene 24.310 nudos y 48.200 elementos triangulares.

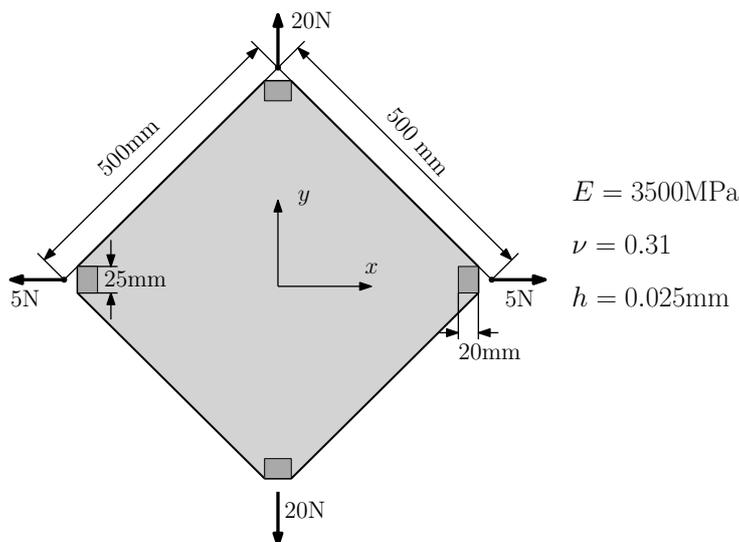


Figura 5: Membrana cuadrada bajo cargas de esquina. Geometría

Dada la simetría geométrica es dable esperar una deformación simétrica, pero debido a las inevitables imperfecciones también es factible e incluso más probable una deformada no-simétrica. En la Figura 6 se muestra las geometrías deformadas, experimental y la simulación. En este último caso se imponen velocidades iniciales sobre cuatro puntos, dos a cada lado de la diagonal más traccionada con direcciones opuestas a los fines de obtener una deformada antisimétrica. En la Figura 7 se muestran perfiles de desplazamiento a lo largo de la parte central de la diagonal menos traccionada. A la izquierda se comparan los resultados experimentales, que muestran una cierta antisimetría aunque esta no es completa, con la simulación que es efectivamente antisimétrica. En tanto que a la derecha se muestran resultados de simulaciones con 3 mallas (de 60, 80 y 100 elementos por lado) para el caso simétrico el cual se obtiene con-

siderando como acción transversal al peso propio. En este último caso puede verse una rápida convergencia. Debe observarse entonces que no existe una única deformada posible, la cual depende de las imperfecciones geométricas iniciales. Muy probablemente la forma antisimétrica es la que puede desarrollarse con más facilidad, pero no en forma pura. El tiempo de CPU para la malla más densa es de 20 minutos. Naturalmente podría haberse usado una condición de simetría respecto a la diagonal horizontal dado que respecto a esta dirección los resultados experimentales son casi simétricos

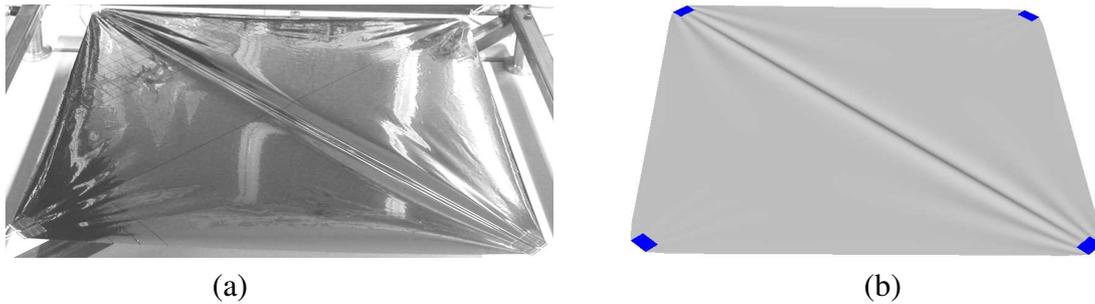


Figura 6: Membrana cuadrada bajo cargas de esquina. (a) Experimental (b) Simulación

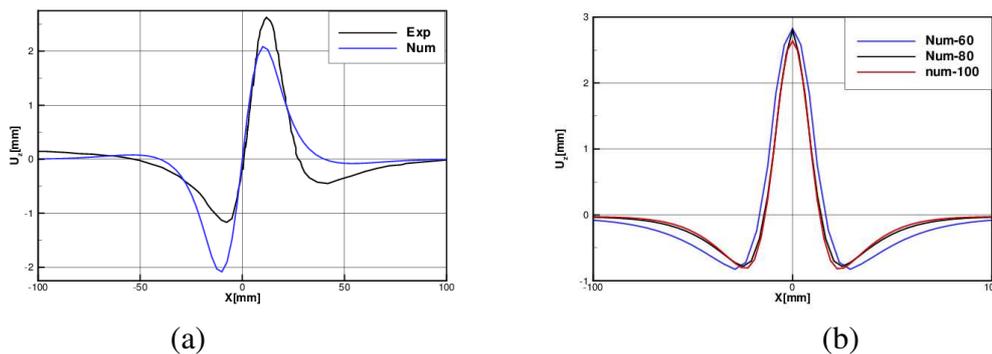


Figura 7: Perfiles de desplazamiento en la zona central . (a) antisimétrico (b) simétrico

#### 4. MEMBRANA OCTOGONAL

Varias películas con la geometría mostrada en la Figura 8.a fueron sometidas a ensayo por Lecieux y Bouzidi (2010). La membrana tiene cuatro bordes empotrados y 4 bordes libres. Inicialmente se somete a la membrana a una tensión uniforme de bajo valor, a los fines de tener una membrana plana, luego se la empotra y se la acorta en la dirección  $X$  un valor  $2\delta_1$ , lo cual deforma y desplaza en la dirección vertical principalmente las zonas cercanas a los bordes verticales (Figura 8.b), y luego se la estira un valor  $2\delta_2$  en la dirección  $Y$  lo que produce una geometría arrugada (Figura 8.c). Los ensayos incluyen distintos valores de  $\delta_1$  y  $\delta_2$  y 3 espesores de membrana. Aquí se considera el caso con el menor espesor  $h = 25\mu m$  y  $\delta_1 = \delta_2 = 3mm$ . La relación entre el lado que inscribe a la membrana y el espesor es de 24.000.

Nuevamente debido a la simetría geométrica y de movimientos impuestos es de esperar una deformada simétrica como se ve en la Figura 8.c. Sin embargo, las evidencias experimentales no son así. Experimentalmente el marco se coloca en posición horizontal, y por lo tanto, la gravedad actúa normal a la membrana; entonces para que la membrana salga de su plano se recurre a colocar la fuerza gravitatoria en la dirección transversal. Inicialmente se consideró

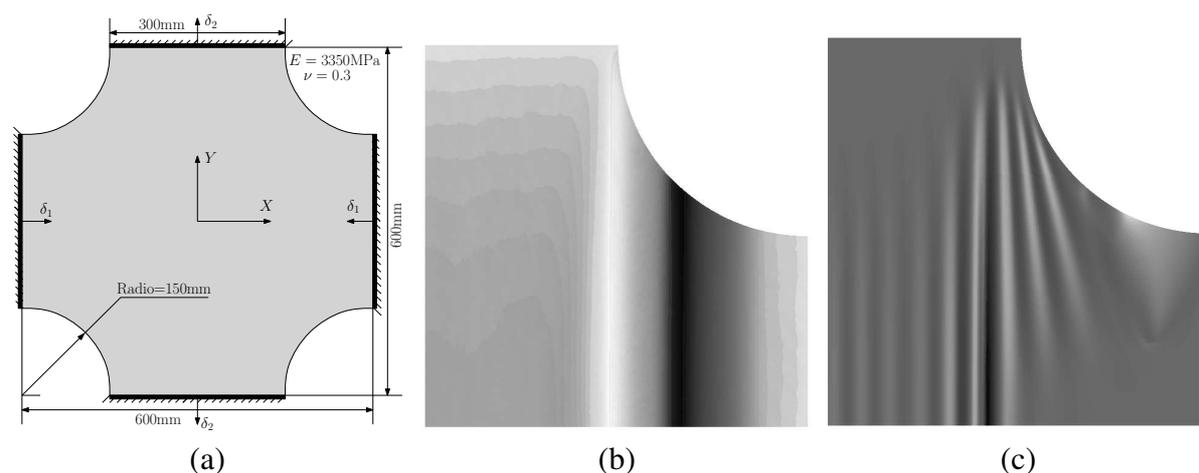


Figura 8: Membrana octogonal. (a) geometría, (b) deformada etapa 1, (c) deformada etapa 2

la geometría total, con distintas mallas, la más densa de 102.400 elementos, con simulaciones que en general mostraban resultados simétricos respecto a ambos ejes, salvo en la zona cercana al borde libre. Finalmente se modeló un cuarto de la membrana con doble simetría y 40.000 elementos. En la Figura 8.b se muestra la deformada al final de la primera etapa, cuando se ha impuesto el movimiento  $\delta_1$  en la dirección  $X$  hacia adentro en ambos laterales. Este acortamiento de la membrana conduce a la deformada indicada con desplazamientos hacia abajo por efecto de la gravedad. En la parte central la membrana permanece plana. En la segunda etapa se realiza el alargamiento en la dirección  $Y$ , lo cual produce deformaciones negativas en la dirección  $X$  debido al efecto Poisson y tensiones de tracción, lo cual conduce a que en los laterales la membrana se levante en la parte central y queden dos zonas sin tensión (“slack”) en las partes adyacentes a los bordes libres. A pesar de la gravedad, la membrana se levanta en las zonas cercanas al borde libre, tanto en el experimento como en la mayoría de las simulaciones.

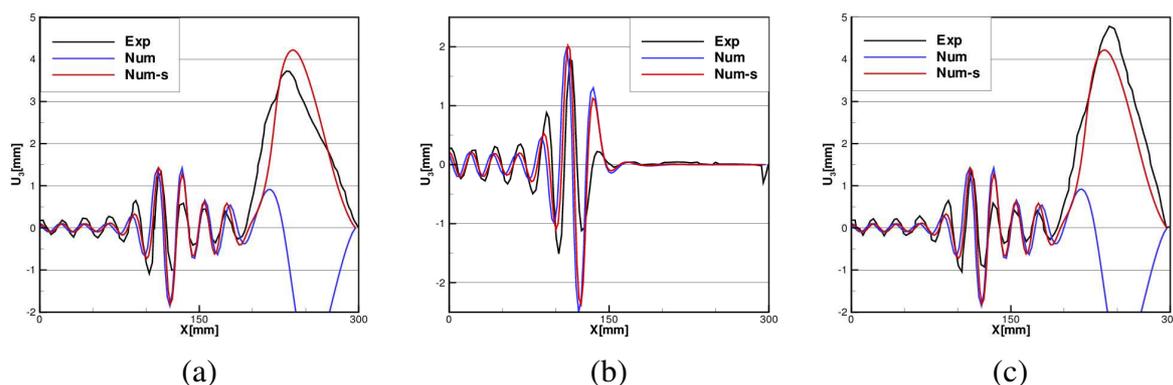


Figura 9: Membrana octogonal. Perfiles de desplazamiento en: (a)  $Y = -150$ , (b)  $Y = 0$ , (c)  $Y = +150$

En la Figura 9 se muestran los perfiles de desplazamiento transversal de la mitad derecha de la membrana para tres coordenadas  $Y$  diferentes. Con la simulación se han obtenido resultados simétricos, no sólo respecto al eje  $Y$  sino también respecto al eje  $X$ , de tal forma que los resultados numéricos del primer y el tercer gráfico son iguales. No así los resultados experimentales que muestran algunas diferencias. La denominación Num se refiere a la simulación de la membrana completa (102.400 elementos y 5hs 20min de CPU), en tanto que la denominación Num-s se refiere a la simulación numérica de un cuarto de la geometría (40.000 elementos y

1h 50min de CPU). Los resultados de los perfiles son muy similares para ambas simulaciones salvo en la zona “slack”. Adicionalmente los resultados muestran una excelente correlación con los resultados experimentales en cuanto al número de arrugas y una muy buena en lo referido a la altura de las mismas.

En la Figura 10 se muestran los perfiles de tensiones  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{yy}$  en dos cortes en la dirección  $X$  para las coordenadas  $Y = 0$  e  $Y = 150\text{mm}$ . En la zona central la tensión  $\sigma_{yy}$  es uniforme en ambos perfiles, en tanto que  $\sigma_{xx}$  es prácticamente nula. En los laterales las tensiones  $\sigma_{yy}$  bajan rápidamente, pero particularmente en las partes cercanas al borde libre, en tanto que la tensión  $\sigma_{xx}$  crece hacia el borde en el perfil central, pero es muy baja en el corte que pasa cercano al borde libre.

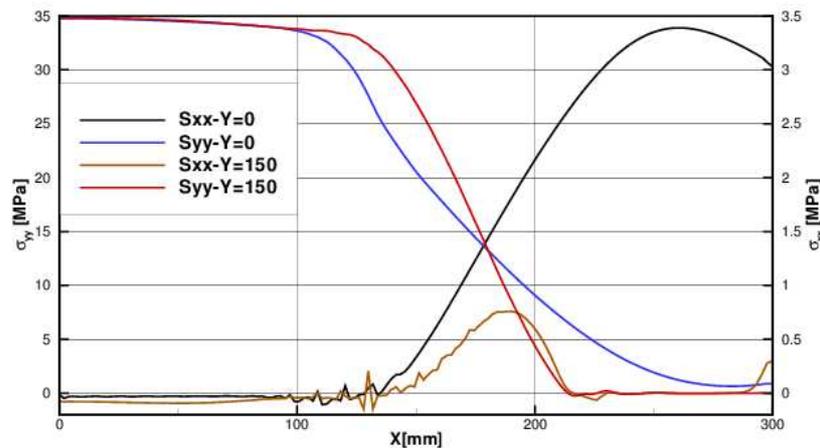


Figura 10: Membrana octogonal. Perfiles de tensiones en el centro ( $Y = 0$ ) y un cuarto ( $Y = 150$ )

## 5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se realiza una revisión bibliográfica de los distintos enfoques y estrategias propuestos para analizar el comportamiento de membranas estructurales planas. En Flores y Oñate (2011) se analizaron estructuras de este tipo pero con menores relaciones de aspecto de las que pueden aparecer si se estudian membranas más delgadas. En ese marco, interesaba utilizar la herramienta desarrollada, proponer estrategias de simulación y verificar su comportamiento en problemas más demandantes. Para los ejemplos considerados las simulaciones realizadas muestran que:

- La estrategia de integrar explícitamente es adecuada para estos problemas
- El elemento triangular sin rotaciones es adecuado
- Usar el peso propio es adecuado para sacar a la membrana de su plano
- Usar velocidades iniciales en pocos puntos permite que aparezcan comportamientos asimétricos
- Las mallas a utilizar han de ser densas para captar los detalles de las arrugas
- Las simulaciones son manejables en una computadora de escritorio

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero de CONICET y de la SeCyT-UNC.

## REFERENCIAS

- Akita T., Nakashino K., Natori C., y K.C. P. A simple computer implementation of membrane wrinkle behaviour via a projection technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71:1231–1259, 2007.
- Brewer A., Flores F., y Preidikman S. Un modelo simple para el análisis de vigas Wagner utilizando el método de elementos finitos. *Mecánica Computacional*, XXXVI:123–132, 2018.
- Cirak F., Ortiz M., y Schroeder P. Subdivision surfaces: a new paradigm for thin-shell finite-element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:2039–2072, 2000.
- Flores F. *Simpact, Análisis Dinámico Explícito de Sólidos por el Método de Elementos Finitos, version 7.2*. Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, 2012.
- Flores F. y Oñate E. A rotation-free shell triangle for the analysis of kinked and branching shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:1521–1551, 2007.
- Flores F. y Oñate E. Wrinkling and folding analysis of elastic membranes using an enhanced rotation-free thin shell triangular element. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47:982–990, 2011.
- Kiendl J., Hsu M., Wu M., y Reali A. Isogeometric Kirchhoff Love shell formulations for general hyperelastic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 291:280–303, 2015.
- Lecieux Y. y Bouzidi R. Experimental analysis on membrane wrinkling under biaxial load comparison with bifurcation analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 47:2459–2475, 2010.
- Mosler J. y Cirak F. A variational formulation for finite deformation wrinkling analysis of inelastic membranes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:2087–2098, 2009.
- Pagitz M. y Abdalla M. Simulation of tension fields with in-plane rotational degrees of freedom. *Comput Mech*, 46:747–757, 2010.
- Raible T., Tegeler K., Löhnert S., y Wriggers P. Development of a wrinkling algorithm for orthotropic membrane materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:2550–2568, 2005.
- Ramm E. y Wall W. Shell structures - a sensitive interrelation between physics and numerics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:381–427, 2005.
- Sabourin F. y Brunet M. Detailed formulation of the rotation-free triangular element "s3" for general purpose shell analysis. *Engineering Computations*, 23:469–502, 2006.
- Steigmann D. Tension-field theory. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A: Math. Phys. Sci.*, 429:141–173, 1990.
- Weinberg K. y Neff P. A geometrically exact thin membrane model investigation of large deformations and wrinkling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74:871–893, 2008.
- Wong Y. y Pellegrino S. Wrinkled membranes. Part I: Experiments. *Journal of Mechanics of Materials and Structure*, 1:1–23, 2006.
- Wriggers P., Wagner W., y Miehe C. A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis. 70:329–347, 1988.