

DINÁMICA DE VIGAS VLASOV LOCALMENTE RESONANTES CON RESONADORES GRADUADOS

DYNAMICS OF LOCALLY RESONANT VLASOV BEAMS WITH GRADUATED RESONATORS

Víctor H. Cortínez^{a,b,c} y Patricia N. Dominguez^{a,b}

^a*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada CIMTA, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, vcortine@hotmail.com*

^b*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, pdoming@uns.edu.ar*

^c*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET*

Palabras clave: vigas Vlasov, atenuación de vibraciones, vigas localmente resonantes, resonadores graduados.

Resumen. En este trabajo se presenta un estudio sobre la atenuación en banda ancha de las vibraciones flexo-torsionales de vigas Vlasov localmente resonantes con resonadores graduados. Tales vigas pueden concebirse como una sucesión de celdas cuasi periódicas con resonadores amortiguados adosados. Cada celda, o tramo de viga, está compuesta por una serie de resonadores de igual masa pero con frecuencias locales naturales ligeramente diferentes. Se propone un enfoque analítico basado en una formulación homogeneizada de tal tipología estructural para la determinación de la configuración de bandgaps y la evaluación de la eficiencia en la atenuación de vibraciones forzadas. Se demuestra que la estructura localmente resonante considerada produce una zona de atenuación de vibraciones flexo-torsionales más ancha que los bandgaps producidos por vigas localmente resonantes con resonadores idénticos.

Keywords: Vlasov beams, vibration attenuation, locally resonant beams, multiple resonators.

Abstract. This work presents a study on the broadband attenuation of flexural-torsional vibrations in locally resonant Vlasov beams with graded resonators. Such beams can be conceived as a sequence of quasi-periodic cells with attached resonators featuring internal damping. Each cell, or beam segment, consists of a series of resonators with equal mass but slightly different local natural frequencies. An analytical approach based on a homogenized formulation of such structural typology is proposed to determine the bandgap configuration and assess the efficiency in attenuating forced vibrations. It is demonstrated that the considered locally resonant structure produces a wider zone of flexural-torsional vibration attenuation than the bandgaps produced by locally resonant beams with identical resonators.

1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años ha habido un interés creciente en el desarrollo de metamateriales y estructuras localmente resonantes debido a su capacidad para atenuar vibraciones a partir de la incorporación de resonadores inmersos en los mismos, que actúan como absorbedores dinámicos. Se demuestra que en tales estructuras emergen bandas de atenuación, denominadas bandgaps, definidas como rangos de frecuencias libres de resonancias y, consecuentemente, con amplitudes de vibración moderadas. En particular, este concepto ha sido utilizado para la construcción de estructuras esbeltas localmente resonantes (vigas), con una gran cantidad de resonadores distribuidos periódicamente, que pueden ser materializadas con metodologías constructivas relativamente simples, para atenuar vibraciones transversales, torsionales o longitudinales (Sun et al., 2010, Sugino et al., 2017). Recientemente, el concepto de estructuras localmente resonantes fue extendido para la absorción de vibraciones flexo-torsionales acopladas en vigas de sección transversal asimétrica (Dominguez et al., 2022, Cortínez y Dominguez, 2022).

En este trabajo se analiza la posibilidad de ensanchar las zonas de atenuación para este tipo de vibraciones mediante la incorporación de resonadores graduados. Las correspondientes estructuras localmente resonantes pueden concebirse como una sucesión de celdas cuasi periódicas con resonadores que tienen amortiguamiento interno. Cada una de estas celdas está equipada con una serie de resonadores de igual masa pero con frecuencias naturales locales ligeramente diferentes. Estudios recientes han demostrado que esta estrategia es efectiva para atenuar vibraciones flexionales en vigas (Hu et al., 2021).

En particular, se propone un enfoque general para evaluar la zona de atenuación en función de las características del sistema de resonadores graduados. El enfoque se basa en una formulación homogeneizada de la teoría de Vlasov (Vlasov, 1961) para la dinámica flexo-torsional del sistema viga-resonadores (vigas Vlasov localmente resonantes). A partir del análisis de las ecuaciones correspondientes se obtiene una fórmula para la determinación de la estructura de bandgaps como así también expresiones analíticas para estudiar la respuesta dinámica en la zona de atenuación extendida. Se brindan ejemplos numéricos para ilustrar la efectividad de la estrategia en tales zonas como así también la conveniencia del enfoque matemático de evaluación propuesto en el diseño del sistema de resonadores.

2 DINÁMICA FLEXO-TORSIONAL DE VIGAS DE PARED DELGADA LOCALMENTE RESONANTES MONOSIMÉTRICAS

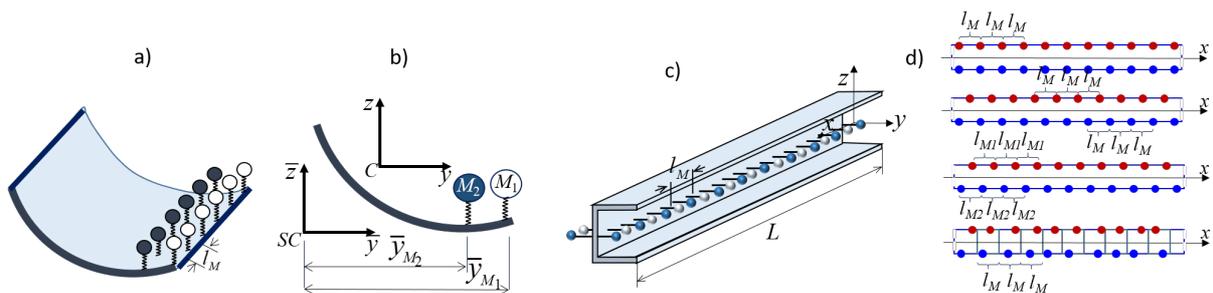


Figura 1: Viga de pared delgada con resonadores periódicamente distribuidos.

Se considera la viga monosimétrica de pared delgada, concebida como una sucesión de Ns celdas de igual longitud l_M , sujeta a cargas armónicas transversales (Figura 1). Cada celda (o tramo de viga) contiene Nr resonadores orientados en la dirección del eje z como se muestra en la Figura 1a -1c. Se asume que las Ns celdas tienen idéntica configuración de resonadores y que la distancia entre ellas es muy pequeña frente a la longitud total de la viga ($l_M \ll L$). Esta característica hace posible considerar, de manera aproximada, que los resonadores se encuentran distribuidos de manera continua sobre la viga (homogeneización). La dinámica flexo-torsional de tal sistema localmente resonante se describe mediante la teoría de Vlasov (Dominguez et al. 2022; Cortínez y Dominguez, 2022):

$$EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - y_s \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + CA \left(\frac{\partial w}{\partial t} - y_s \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = - \sum_{j=1}^{Nr} \rho A \alpha_j \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} + \bar{q}_z \cos(\omega t)$$

$$EC_w \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - GJ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{I_s}{A} \phi - y_s w \right) + CA \left(\frac{I_s}{A} \frac{\partial \phi}{\partial t} - y_s \frac{\partial w}{\partial t} \right) = - \sum_{j=1}^{Nr} \rho A \alpha_j \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} \bar{y}_{Mj} \quad (1a,b,c)$$

$$+ \bar{m}_x \cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} + 2\eta_j \omega_j \frac{\partial \xi_j}{\partial t} + \omega_j^2 \xi_j = \omega_j^2 (w + \phi \bar{y}_{Mj}) + 2\eta_j \omega_j \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \bar{y}_{Mj} \right), \quad j = 1, 2, \dots, Nr$$

donde:

$$\alpha_j = M_j / (\rho A l_M), \quad \omega_{Mj} = \sqrt{K_j / M_j}, \quad \eta_j = C_j / (2M_j \omega_{Mj}) \quad (2)$$

En las expresiones previas, w corresponde al desplazamiento transversal del centro de corte en la dirección z , ϕ a la rotación torsional, ξ_j es el desplazamiento, en la dirección de z de la masa j -ésima ubicada en una sección genérica x , EI_y , EC_w y GJ son las rigideces de flexión, torsión por alabeo y torsión pura respectivamente, ρ es la densidad, A , I_s , y_s corresponden al área de la sección transversal, el momento de inercia con respecto al centro de corte y la coordenada del centro de corte con respecto al centroide respectivamente, CA es la constante de amortiguamiento de la estructura, K_j , C_j y M_j son la rigidez, el coeficiente de amortiguamiento y la masa, respectivamente, de cada resonador j -ésimo, \bar{y}_{Mj} es la coordenada del punto de anclaje del resonador j -ésimo con respecto al centro de corte, α_j es el cociente entre la masa total del resonador j -ésimo y la masa de la viga en la celda, ω_{Mj} y η_j corresponden a la frecuencia local y al amortiguamiento del resonador j -ésimo, respectivamente, \bar{q}_z , \bar{m}_x constituyen las amplitudes de las cargas distribuidas en la dirección z y el momento tursor distribuido con respecto al eje x , respectivamente, y ω es la frecuencia de excitación. El sistema se complementa con las correspondientes condiciones de borde. Observar que las ecuaciones previas pueden modelar de manera aproximada cualquiera de los esquemas de distribución de resonadores mostrados en la Figura 1d (la distribución no tiene que ser estrictamente periódica).

La solución del problema de vibraciones forzadas estacionarias se obtiene mediante las expresiones:

$$w = W_c(x) \cos(\omega t) + W_s(x) \text{sen}(\omega t)$$

$$\phi = \psi_c(x) \cos(\omega t) + \psi_s(x) \text{sen}(\omega t) \quad (3)$$

$$\xi_j = \bar{\xi}_{cj} \cos(\omega t) + \bar{\xi}_{sj} \text{sen}(\omega t)$$

Introduciendo (3) en (1) y eliminando $\bar{\xi}_{cj}$ y $\bar{\xi}_{sj}$ en términos de W_c, W_s, ψ_c, ψ_s se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} & \left(EI_y \frac{d^4}{dx^4} - \rho A \omega^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{1j} \right) \right) W_c + \rho A \omega^2 \left(y_s - \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{1j} \bar{y}_{Mj} \right) \psi_c + \\ & \left(CA \omega - \rho A \omega^2 \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{2j} \right) W_s - \left(CA \omega y_s + \rho A \omega^2 \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{2j} \bar{y}_{Mj} \right) \psi_s = \bar{q}_z \\ & \rho A \omega^2 \left(y_s - \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{1j} \bar{y}_{Mj} \right) W_c + \left(EC_w \frac{d^4}{dx^4} - GJ \frac{d^2}{dx^2} - \rho A \omega^2 \left(I_s / A + \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{1j} \bar{y}_{Mj}^2 \right) \right) \psi_c + \\ & - \left(CA \omega y_s + \rho A \omega^2 \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{2j} \bar{y}_{Mj} \right) W_s + \left(CA \omega I_s / A - \rho A \omega^2 \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{2j} \bar{y}_{Mj}^2 \right) \psi_s = \bar{m}_x \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \left(-CA \omega + \rho A \omega^2 \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{2j} \right) W_c + \left(CA \omega y_s + \rho A \omega^2 \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{2j} \bar{y}_{Mj} \right) \psi_c + \\ & \left(EI_y \frac{d^4}{dx^4} - \rho A \omega^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{1j} \right) \right) W_s + \rho A \omega^2 \left(y_s - \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{1j} \bar{y}_{Mj} \right) \psi_s = 0 \\ & \left(CA \omega y_s + \rho A \omega^2 \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{2j} \bar{y}_{Mj} \right) W_c + \left(-CA \omega I_s / A + \rho A \omega^2 \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{2j} \bar{y}_{Mj}^2 \right) \psi_c + \\ & + \rho A \omega^2 \left(y_s - \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{1j} \bar{y}_{Mj} \right) W_s + \left(EC_w \frac{d^4}{dx^4} - GJ \frac{d^2}{dx^2} - \rho A \omega^2 \left(I_s / A + \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \beta_{1j} \bar{y}_{Mj}^2 \right) \right) \psi_s = 0 \end{aligned}$$

donde:

$$\beta_{1j} = \frac{1 - (\omega / \omega_{Mj})^2 + 4\eta_j^2 (\omega / \omega_{Mj})^2}{\left(1 - (\omega / \omega_{Mj})^2 \right)^2 + 4\eta_j^2 (\omega / \omega_{Mj})^2}; \quad \beta_{2j} = -\frac{2\eta_j (\omega / \omega_{Mj})^3}{\left(1 - (\omega / \omega_{Mj})^2 \right)^2 + 4\eta_j^2 (\omega / \omega_{Mj})^2} \quad (5)$$

3 FORMACIÓN DE BANDGAPS: RESONADORES GRADUADOS

3.1 Determinación de bandgaps

El problema de vibraciones libres se formula como un caso particular del sistema (4) (con $\bar{q}_z = \bar{m}_x = \eta_j = CA = W_s = \psi_s = 0, W_c \rightarrow W_n, \psi_c \rightarrow \psi_n, \omega \rightarrow \omega_n$), mediante un sistema de 2 ecuaciones con incógnitas W_n y ψ_n (formas modales) asociadas a la frecuencia natural ω_n . En las referencias (Dominguez et al. 2022, Cortínez y Dominguez, 2022) se ha mostrado que estas ecuaciones admiten la existencia de frecuencias naturales, si y solo si $\gamma_{\max} > 0$ y $\gamma_{\min} > 0$, siendo:

$$\gamma(\omega)_{\max, \min} = \left(\overline{\rho A} + \overline{\rho I_s} \pm \sqrt{(\overline{\rho A} + \overline{\rho I_s})^2 - 4(\overline{\rho A} \overline{\rho I_s} - (\overline{\rho A y_s})^2)} \right) / 2 \quad (6)$$

donde $\overline{\rho A}$, $\overline{\rho A y_s}$ y $\overline{\rho I_s}$ son propiedades inerciales seccionales generalizadas definidas como:

$$\overline{\rho A} = \rho A \left(1 + \sum_{j=1}^{Nr} \frac{\alpha_j}{1 - (\omega / \omega_{Mj})^2} \right), \quad \overline{\rho I_s} = \rho I_s \left(1 + \frac{A}{I_s} \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \frac{\bar{y}_{Mj}^2}{1 - (\omega / \omega_{Mj})^2} \right) \quad (7)$$

$$\overline{\rho A y_s} = \rho A y_s - \rho A \sum_{j=1}^{Nr} \frac{\alpha_j \bar{y}_{Mj}}{1 - (\omega / \omega_{Mj})^2}$$

Por el contrario en los rangos de frecuencia ω donde $\gamma_{\max, \min}$ dados por (6) son negativos, no pueden existir frecuencias naturales de la estructura localmente resonante y por lo tanto no pueden presentar respuesta forzada resonante. Por tal razón, en dichos rangos, denominados “bandgaps”, las amplitudes de vibración forzada serán moderadas. Se puede demostrar que existen tantos bandgaps como frecuencias locales de resonadores existan y que el bandgap j -ésimo se encuentra a la derecha de la frecuencia $\omega = \omega_{Mj}$ y se extiende hasta un valor $\omega_{sj} < \omega_{Mj+1}$. Es decir:

$$BG_j = \left\{ \omega : \omega_{\inf j} < \omega < \omega_{\sup j} \right\}, \quad \omega_{\inf j} = \omega_{Mj} \text{ y } \gamma_{\min}(\omega_{\sup j}) = 0 \quad (8)$$

donde $\omega_{\inf j}$ y $\omega_{\sup j}$ son los límites inferior y superior del bandgap.

El diseño del sistema de resonadores consiste en determinar M_j, K_j, C_j y la cantidad y posición de los mismos, de manera tal de producir bandgaps, lo más anchos posibles, alrededor de ciertas frecuencias preseleccionadas ω_T . De esta manera, se busca asegurar que la respuesta forzada de la estructura localmente resonante en dicho rango será adecuadamente atenuada. Como restricción de diseño en general se acota la masa total de los resonadores con respecto a la masa total de la estructura huésped.

3.2 Amplificación de bandgaps mediante resonadores graduados

Una estrategia para ensanchar, desde el punto de vista práctico, la zona de atenuación conteniendo una frecuencia preseleccionada ω_T , consiste en utilizar resonadores graduados en cada celda con frecuencias locales de valores cercanos (efecto “rainbow”). De esta manera, se busca dividir el bandgap generado por resonadores sintonizados en la misma frecuencia (que aquí se denomina bandgap original *BGO*) en varios cercanamente espaciados que cubran un rango de frecuencias mayor. Es decir, si se usaran R tipos de resonadores con frecuencias locales cercanas, la estructura de bandgaps será dada por R bandgaps separados por $R-1$ zonas de propagación P (en las cuales pueden existir respuestas resonantes) como se muestra en la **Figura 2b** para $R=5$. Debe observarse que esta estructura de bangaps es independiente de las condiciones de borde de la estructura huésped como así también de la carga actuando sobre la misma. Asimismo, se puede observar en las expresiones (6) a (8) que los bandgaps dependen de los cocientes ω / ω_{Mj} y, en consecuencia, de $(\omega / \omega_T) / (\omega_{Mj} / \omega_T)$. Esto quiere decir que, fijando las relaciones ω_{Mj} / ω_T , el bandgap j -ésimo se puede expresar de manera adimensional como:

$$\overline{BG}_j = \left\{ \frac{\omega}{\omega_T} : \frac{\omega_{\inf j}}{\omega_T} < \frac{\omega}{\omega_T} < \frac{\omega_{\sup j}}{\omega_T} \right\}, \quad \frac{\omega_{\inf j}}{\omega_T} = \frac{\omega_{Mj}}{\omega_T} \text{ y } \gamma_{\min} \left(\frac{\omega_{\sup j}}{\omega_T} \right) = 0 \quad (9)$$

donde $\omega_{\sup j}$ es la raíz de γ_{\min} inmediatamente superior a ω_{Mj} . Esta expresión indica que la

estructura de bandgaps adimensional en términos de ω/ω_T es independiente de ω_T .

Se pretende lograr que el rango de frecuencias existente entre el límite inferior del primer bandgap $\omega_{\text{inf}1}$ y el superior del último $\omega_{\text{sup}R}$ se comporte de manera efectiva como una sola zona de atenuación que aquí se denomina bandgap efectivo BG_{ef} . Para ello hay que analizar si las amplitudes de la vibración forzada en las zonas de propagación intermedias están adecuadamente atenuadas, lo que dependerá especialmente del amortiguamiento interno de los resonadores.

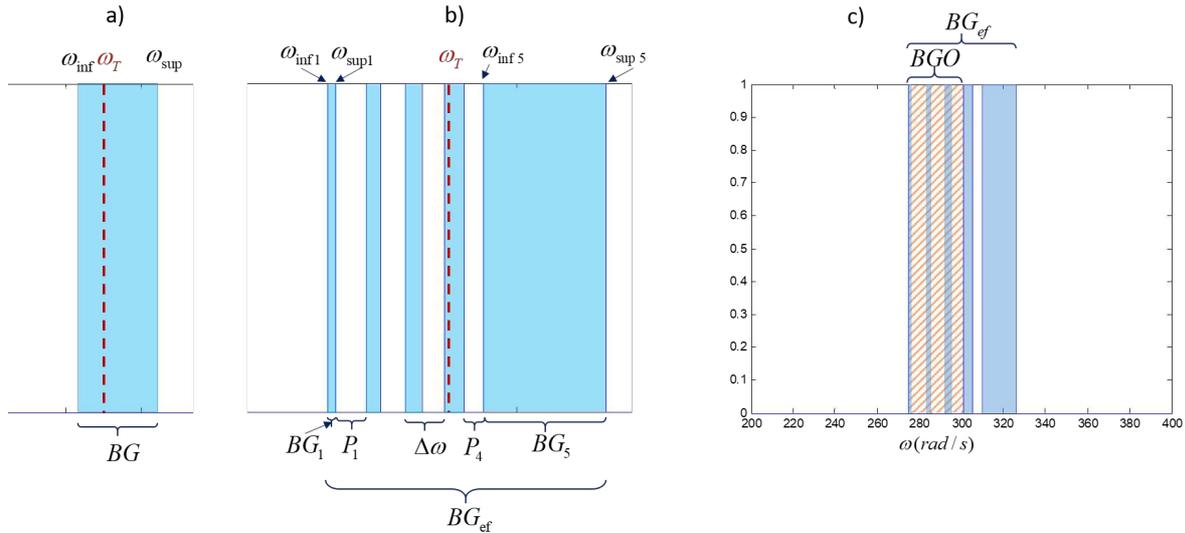


Figura 2: Estructura de bandgaps, a) BGO para ω_T , b) BG_{ef} para ω_T , c) comparación de BG

4 SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA LAS VIBRACIONES FORZADAS DE VIGAS LOCALMENTE RESONANTES

La solución del sistema (4) para una viga simplemente apoyada ($W_C = W_S = \psi_C = \psi_S = W_C'' = W_S'' = \psi_C'' = \psi_S'' = 0$ en $x=0, L$) puede obtenerse por medio de las siguientes expansiones de Fourier para los desplazamientos generalizados y las cargas:

$$\begin{aligned} W_C &= \sum_n B_{1n} \text{sen}(\lambda_n x), \psi_C = \sum_n B_{2n} \text{sen}(\lambda_n x), W_S = \sum_n B_{3n} \text{sen}(\lambda_n x), \psi_S = \sum_n B_{4n} \text{sen}(\lambda_n x) \\ \bar{q}_z &= \sum_n q_n \text{sen}(\lambda_n x), \bar{m}_x = \sum_n q_n r_n \text{sen}(\lambda_n x), \lambda_n = n\pi/L \end{aligned} \quad (10)$$

Tales expresiones verifican las condiciones de borde. Para obtener las constantes $B_{1n}, B_{2n}, B_{3n}, B_{4n}$ se sustituye (10) en (4) lo que conduce, luego de eliminar las funciones trigonométricas, al siguiente sistema de 4 ecuaciones algebraicas simultáneas para cada n :

$$\mathbf{A}_n \mathbf{B}_n = \mathbf{q}_n; \quad \mathbf{B}_n = [B_{1n}, B_{2n}, B_{3n}, B_{4n}]^T; \quad \mathbf{q}_n = [q_n, q_n e_n, 0, 0]^T \quad (11)$$

donde las componentes de la matriz \mathbf{A}_n vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
 A_{11}^n &= EI_y \lambda_n^4 - \rho A \omega^2 \left(1 + \sum_j \alpha_j \beta_{1j} \right); & A_{12}^n &= \rho A \omega^2 \left(y_s - \sum_j \alpha_j \beta_{1j} \bar{y}_{Mj} \right) \\
 A_{13}^n &= CA \omega - \rho A \omega^2 \sum_j \alpha_j \beta_{2j}; & A_{14}^n &= -CA \omega y_s - \rho A \omega^2 \sum_j \alpha_j \beta_{2j} \bar{y}_{Mj} \\
 A_{21}^n &= A_{12}^n; & A_{22}^n &= EC_w \lambda_n^4 + GJ \lambda_n^2 - \rho A \omega^2 \left(I_s / A + \sum_j \alpha_j \beta_{1j} \bar{y}_{Mj}^2 \right); & A_{23}^n &= A_{14}^n; \\
 A_{24}^n &= CA \omega I_s / A - \rho A \omega^2 \sum_j \alpha_j \beta_{2j} \bar{y}_{Mj}^2; & A_{31}^n &= -A_{13}^n; & A_{32}^n &= -A_{23}^n; & A_{33}^n &= A_{11}^n; \\
 A_{34}^n &= A_{12}^n; & A_{41}^n &= -A_{13}^n; & A_{42}^n &= -A_{23}^n; & A_{43}^n &= A_{34}^n; & A_{44}^n &= A_{22}^n
 \end{aligned} \tag{12}$$

5 ESTUDIOS NUMÉRICOS

Se consideran las vibraciones flexo-torsionales (W, ψ) de una viga monosimétrica acoplada a resonadores tipo voladizo (Figura 3). Las propiedades de esta estructura sin resonadores (estructura base o huésped) son las siguientes: $L=2\text{ m}$, $h=0.1\text{ m}$, $b=0.04\text{ m}$, $t=0.006\text{ m}$, $y_s = -0.020816\text{ m}$, $E = 4.5E10\text{ Pa}$, $\rho = 2650\text{ kg/m}^3$, $G = 1.8E10\text{ Pa}$. En los ejemplos que siguen, se pretende atenuar la respuesta forzada en cercanías de alguna frecuencia natural del sistema base para lo cual se colocan 5 tipos de resonadores (I, II, III, IV y V), distribuidos periódicamente a lo largo de la viga ($Nr=10, R=5$). Las correspondientes frecuencias locales de los tipos de resonadores se expresan como $\omega_r = \omega_l + (r-1)\Delta\omega$ ($r=I, \dots, V$). En todos los casos se mantienen constantes la relación de masa de los resonadores $(\alpha_1)_j = (\alpha_2)_j = 0.05$, el amortiguamiento $\eta_j = 0.01$ de cada uno de ellos y las ubicaciones con respecto al centro de corte, $(\bar{y}_1)_j = 0.03\text{ m}$ y $(\bar{y}_2)_j = -0.03\text{ m}$, donde los subíndices 1 y 2 corresponden a la ubicación de los resonadores a derecha (a_1) e izquierda (a_2) del mismo.

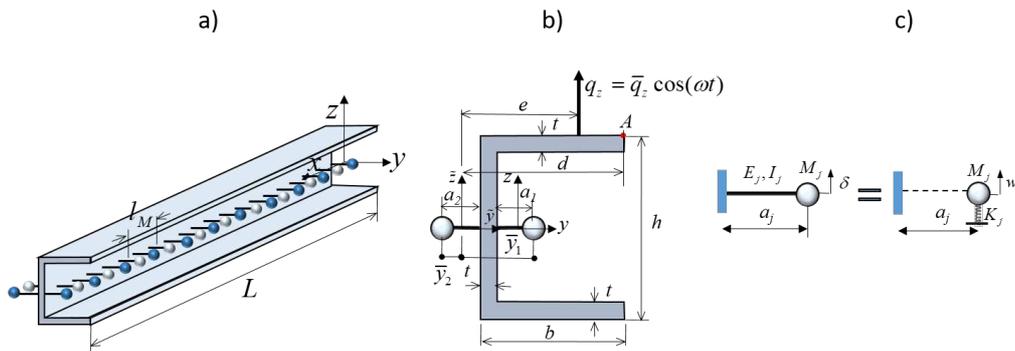


Figura 3: Viga localmente resonante analizada. a) viga con resonadores distribuidos longitudinalmente, b) sección transversal de la estructura considerada, c) resonador masa-resorte equivalente.

En primer lugar, se considera como objetivo la atenuación de la respuesta dinámica en cercanías de la frecuencia natural de la viga simplemente apoyada sin resonadores $\omega_r = \omega_{n1} = 292.3\text{ rad/s}$ (Dominguez et al. 2022). Para dicha viga se obtienen: a) la estructura de bandgaps mediante (6-8), b) la respuesta forzada para una carga distribuida uniforme $q_z = 1000\text{ cos}(\omega t)(N/m)$, $m_x = q_z d(Nm/m)$ aplicada en la posición A de la sección transversal (Figura 3), para diferentes valores de ω_l y $\Delta\omega$, utilizando la formulación analítica (10-12). Como caso particular de esta formulación se obtiene la respuesta estática (misma carga con

$\omega = 0$).

Para describir la respuesta en frecuencia se han utilizado los valores del cociente entre la amplitud del desplazamiento dinámico del punto A para el centro de la viga y el correspondiente desplazamiento estático: $F(\omega) = |W_A(\omega, L/2) / W_{Aest}(L/2)|$. Se han definido dos indicadores $Ind\ 1$ e $Ind\ 2$ como el valor máximo y medio, respectivamente, de $F(\omega)$ en el intervalo del BG_{ef} . En la **Tabla 1** se muestran tales indicadores, así como el ancho del bandgap efectivo BG_{ef} y la suma de los bandgaps $\sum_{j=1}^5 BG_j$, para diferentes valores de ω_l y $\Delta\omega$.

Caso	$\frac{\omega_l}{\omega_T}$	$\frac{\Delta\omega}{\omega_T}$	$Ind\ 1$	$Ind\ 2$	BG_{ef}	$\sum_{j=1}^5 BG_j$
1.a	0.90	0.05	1.78	0.44	71.80	27.92
1.b	0.92	0.04	1.17	0.31	60.75	27.87
1.c	0.94	0.03	0.95	0.22	51.05	27.88
1.d	0.95	0.025	0.95	0.18	46.50	27.87
1.e	0.97	0.015	0.94	0.13	38.14	27.87

Tabla 1: Indicadores y bandgap efectivo para distintas configuraciones de resonadores

En las **Figuras 4** y **5** se muestran la estructura de bandgaps y las respuestas en frecuencia de $|W_A(\omega, L/2)|$ y del cociente $F(\omega)$ para dos de los casos mencionados en la **Tabla 1**.

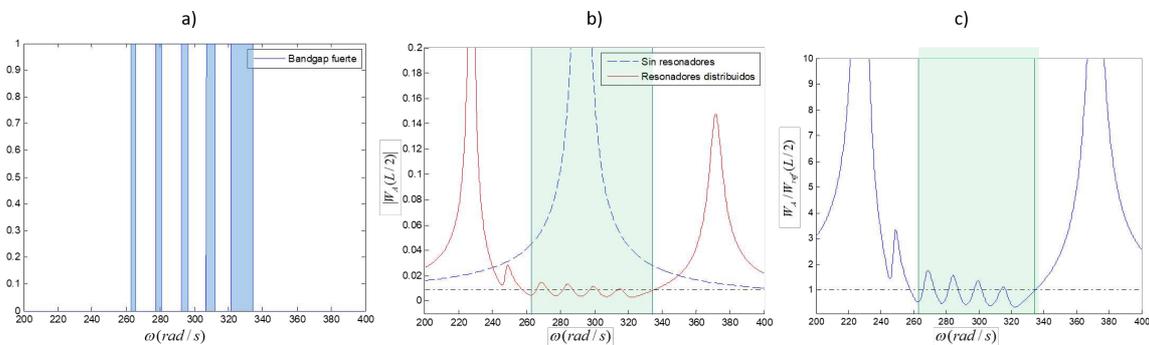


Figura 4: Caso 1.a, a) Estructura de bandgaps, b) $|W_A(L/2)|$, c) $W_A / W_{ref}(L/2)$

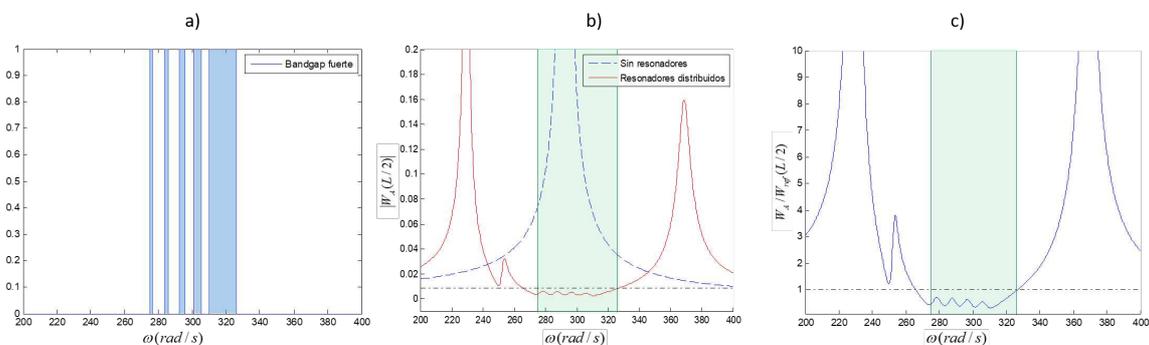


Figura 5: Caso 1.c, a) Estructura de bandgaps, b) $|W_A(L/2)|$, c) $W_A / W_{ref}(L/2)$

En estas figuras puede observarse que, en ambos casos, 1.a y 1.c se ha podido suprimir la respuesta resonante de la viga huésped y ampliar el bandgap efectivo con respecto al bandgap original (todos los resonadores con frecuencia local $\omega_M = 274.8 \text{ rad/s}$). Sin embargo, los valores máximos del desplazamiento son menores para el caso 1.c donde la estructura de bandgaps presenta zonas de propagación más pequeñas. De hecho, para ese caso, se muestra que las amplitudes del desplazamiento dentro del bandgap efectivo se mantienen menores que el valor estático ($F(\omega) < 1$) mientras que para el caso 1.a, éste se supera ligeramente.

En la [Tabla 1](#) se pueden ver los casos (1.c, 1.d y 1.e) en los cuales no se supera el valor estático del desplazamiento en el punto considerado. Si ésta se adoptara como condición de diseño, los parámetros ω_l / ω_T y $\Delta\omega / \omega_T$ del sistema de resonadores deberían elegirse de acuerdo al caso 1.c que es el que produce mayor bandgap efectivo (51.05 rad/s). Este último es el doble de ancho que el *BGO* (25.24 rad/s para $\omega_M = 274.8 \text{ rad/s}$) como puede verse en la [Figura 2c](#). Debe observarse que la suma de los bandgaps se mantiene prácticamente constante e igual a la correspondiente al *BGO*. Esto quiere decir que el ensanchamiento de la banda efectiva se cumple gracias al aprovechamiento de la atenuación en las zonas de propagación intermedias brindadas por los resonadores amortiguados.

Se ha verificado numéricamente la validez del bandgap efectivo obtenido correspondiente al caso 1.c para otros estados de carga. Como ejemplo, en la [Figura 6a](#) se muestra la respuesta en frecuencia de $|W_A(L/2)|$ para la carga: $q_z = 1000 \cos(\omega t)(N/m)$ y $m_x = 3q_z d(Nm/m)$.

Como se ha mencionado en la sección 3, la estructura de bandgaps expresada de manera adimensional (9) resulta independiente de la frecuencia objetivo ω_T . Esto quiere decir que una vez determinada la estructura de bandgaps adimensional, se la puede obtener en forma dimensional multiplicando directamente por el ω_T adecuado. Tiene sentido comprobar si tal independencia se verifica, al menos aproximadamente, para el bandgap efectivo, es decir, si con los parámetros adimensionales seleccionados para los resonadores, la respuesta forzada se atenúa adecuadamente en las zonas de propagación intermedias. Para tal fin se considera la misma estructura, pero ahora se pretende atenuar la respuesta en cercanías de la octava frecuencia natural de la viga huésped: $\omega_T = \omega_{n8} = 3942.3 \text{ rad/s}$. Los parámetros adimensionales de los resonadores se eligen de igual manera que en el caso 1.c, es decir, adoptando los mismos valores de ω_{Mj} / ω_T . En la [Figura 6b](#) se muestran las respuestas en frecuencia de $|W_A(L/2)|$ para la estructura con y sin resonadores considerando una carga $q_z = 1000 \sin(3\pi x/L)(N/m)$, $m_x = q_z d(Nm/m)$. Como se aprecia, los resonadores así diseñados producen el bandgap esperado anulando la respuesta resonante.

Finalmente se estudió la independencia aproximada del bandgap efectivo con respecto a las condiciones de borde. Como ejemplo, en la [Figura 6c](#) se muestra la respuesta de la misma estructura considerada anteriormente, pero ahora empotrada en el extremo izquierdo y articulada en el derecho (*EA*) con una carga $q_z = 1000 \cos(\omega t)(N/m)$, $m_x = q_z d(Nm/m)$. En este caso, la frecuencia objetivo es $\omega_T = 355.36 \text{ rad/s}$ que coincide con la primera frecuencia de la estructura huésped, adoptándose los mismos parámetros adimensionales de resonadores del caso 1.c. El análisis de la respuesta forzada se realizó numéricamente, utilizando el método de Elementos Finitos.

De acuerdo a los estudios numéricos realizados, se ha encontrado una independencia aproximada del bandgap efectivo con respecto a las cargas, condiciones de borde y frecuencia objetivo (cuando se expresa de manera adimensional). De acuerdo a lo mencionado, para

evaluar un diseño específico de resonadores distribuidos, puede utilizarse la expresión (9) para encontrar la estructura de bandgaps distribuidos, especialmente sus límites $\omega_{\text{inf},BGef}$, $\omega_{\text{sup},BGef}$, y la solución analítica para la vibración forzada (10-12) para evaluar el grado de atenuación en las zonas de propagación intermedias.

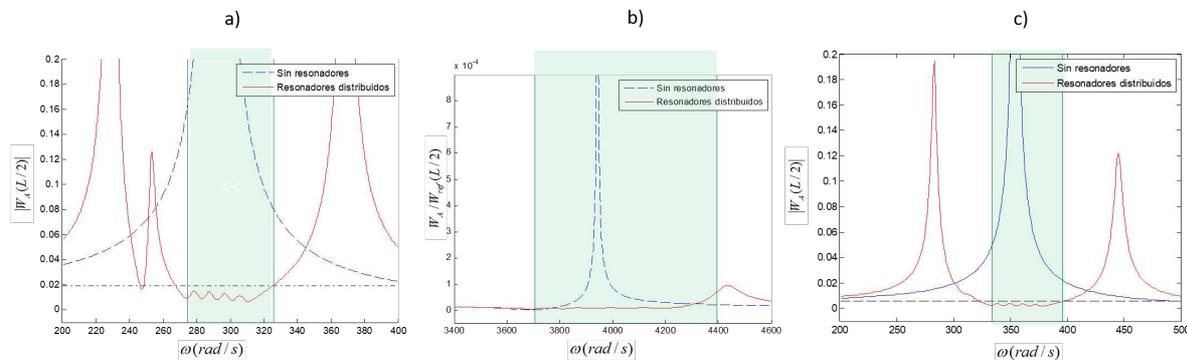


Figura 6: $|W_A(L/2)|$ para los parámetros adimensionales del caso 1.c, a) viga SA segundo caso de carga, $\omega_T = 292.3 \text{ rad/s}$ b) viga SA carga original, $\omega_T = 3942.3 \text{ rad/s}$, c) viga EA, $\omega_T = 355.36 \text{ rad/s}$

6 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un enfoque general para la determinación del bandgap efectivo para las vibraciones flexo-torsionales de vigas Vlasov localmente resonantes sometidas a cargas armónicas utilizando resonadores graduados. Tal enfoque se basa en una fórmula que permite obtener la estructura de bandgaps tipo “rainbow” y en una formulación analítica para determinar el grado de atenuación de la respuesta forzada en las zonas de propagación intermedias. Tal enfoque se considera de importancia para el diseño de las características de los resonadores. Se ha demostrado que la estrategia del uso de resonadores graduados para la atenuación de vibraciones puede ser muy efectiva, pudiendo ensanchar notablemente las zonas de atenuación con respecto al uso de resonadores sintonizados de manera idéntica.

REFERENCIAS

- Cortínez, V. H. y Dominguez, P. N. Una teoría general para la estimación de bandgaps en la vibración flexo-torsional de vigas Vlasov, *Mecánica Computacional* 39, 531-540, 2022.
- Dominguez, P. N., Cortínez, V. H. y Piovan, M. T. Attenuation bands for flexural-torsional vibrations of locally resonant Vlasov beams. *Thin-Walled Structures* 181 110115, 2022.
- Hu, G., Austin, A. C., Sorokin, V. y Tang, L. Metamaterial beam with graded local resonators for broadband vibration suppression. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 146, 106982, 2021.
- Sugino, C., Xia, Y., Leadenham, S., Ruzzene, M. y Erturk, A., A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures, *Journal of Sound and Vibration* 406, 104-123, 2017.
- Sun, H., Du, X. y Frank Pai, P. Theory of Metamaterial beams for Broadband Vibration Absorption, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 21, 1086-1101, 2010.
- Vlasov, V. Z. Thin-walled elastic beams, *Israel program for scientific translations*, 2nd Revised edition, 1961.