

ESTABILIZACIÓN DEL MEDIO DE CAPA PERFECTAMENTE ACOPLADA MEDIANTE FUNCIONES DE ESTIRAMIENTO MULTIAXIALES

STABILIZATION OF THE PERFECTLY MATCHED MEDIUM THROUGH MULTIAXIAL STRETCHING FUNCTIONS

Adriano Trono^{a,b}, Alejandro T. Brewer^b, Federico Pinto^{a,b} y Marcelo A. Ceballos^{a,b}

^aInstituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) – CONICET, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sársfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. idit@fcrfyn.edu.ar, <http://www.inv.idit.uncor.edu/>

^bFCEFYN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sársfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. depestructuras@fcefyn.unc.edu.ar, <http://www.efn.uncor.edu.ar>

Palabras clave: Capa perfectamente acoplada, Función de estiramiento multiaxial, Elementos Finitos Mixtos.

Resumen: En los últimos años se ha demostrado la efectividad de los bordes de capas perfectamente acopladas (PML) para absorber ondas elásticas salientes al dominio del modelo numérico. Bécache et al. (J. Comput. Phys., 188, 399-433, 2003) advierten que el medio PML es intrínsecamente inestable, es decir, inestable independientemente de la discretización que se realice. Una forma de estabilizar el medio PML es presentada por Meza-Fajardo y Papageorgiou (Bull. Seismol. Soc. Am., 98, 1811-1836, 2008), quienes proponen utilizar funciones de estiramiento multiaxiales. Sin embargo, su desarrollo es cuestionado por Fathi et al. (Int. J. Numer. Meth. Engng., DOI: 10.1002/nme.4780, 2014), quienes observan que se desestiman algunos términos del jacobiano de la transformación de coordenadas. Por este motivo la capa absorbente obtenida es denominada M-PML “no corregida”. En este trabajo se plantea la formulación fuerte de capa absorbente M-PML “corregida” mediante funciones de estiramiento multiaxiales utilizando todos los términos de la transformación de coordenadas. Se comparan los resultados del modelo híbrido estable con soluciones de referencia obtenidas a partir de modelos de dominio extendido.

Keywords: Perfect Matched Layer (PML), Multiaxial stretching function, Mixed Finite Elements.

Abstract. The effectiveness of perfectly matched layers (PML) for absorbing outgoing elastic waves in finite element models has been demonstrated in recent years. Bécache et al. (J. Comput. Phys., 188, 399-433, 2003) point out that the PML domain is inherently unstable, meaning it is unstable regardless of the discretization used. One way to stabilize the PML domain is presented by Meza-Fajardo and Papageorgiou (Bull. Seismol. Soc. Am., 98, 1811-1836, 2008), who propose using multiaxial stretching functions. However, their development is questioned by Fathi et al. (Int. J. Numer. Meth. Engng., DOI: 10.1002/nme.4780, 2014), who observe that some Jacobian terms of the coordinate transformation are not accounted for. For this reason, the resulting absorbing layer is referred to as "uncorrected M-PML". In this work, the strong formulation of the "corrected M-PML" absorbing layer is proposed using multiaxial stretching functions that incorporate all terms of the coordinate transformation. The results of the stable model are compared with reference solutions obtained from extended domain models.

1. INTRODUCCIÓN

Se ha demostrado la efectividad de los bordes de capas perfectamente acopladas (PML) para absorber ondas elásticas salientes al dominio del modelo numérico. Sin embargo, [Bécache et al. \(2003\)](#) establecen que el medio PML es intrínsecamente inestable. Se trata de una inestabilidad inherente a la formulación fuerte. Esto se manifiesta en la existencia de algunos polos del sistema con parte real positiva, lo que imposibilita la resolución mediante integración numérica en el dominio del tiempo. [Xie et al. \(2014\)](#) advierten sobre los inconvenientes de la formulación PML de [Kucukcoban y Kallivokas \(2013\)](#) relacionados con la estabilidad del elemento mixto. [Trono et al. \(2022\)](#) modifican dicho elemento mixto PML, cambiando las funciones de forma de tensión continua por funciones de forma de tensión discontinua. Este cambio mejora el rendimiento de absorción del borde, pero no soluciona los problemas de inestabilidad. [Zeng et al. \(2011\)](#) observan que las zonas de inestabilidad están confinadas en la superficie y además advierten que aparecen cuando el módulo de Poisson es elevado.

[Meza-Fajardo y Papageorgiou \(2008\)](#) proponen estabilizar el medio PML utilizando funciones de estiramiento multiaxiales, es decir, agregar funciones de estiramiento adicionales en la dirección paralela al borde, método conocido actualmente como M-PML. Sin embargo, su desarrollo es cuestionado por [Fathi et al. \(2015\)](#), quienes observan que [Meza-Fajardo y Papageorgiou \(2008\)](#) desestiman algunos términos del jacobiano de la transformación de coordenadas y por este motivo la capa absorbente obtenida es denominada M-PML “no corregida”. Incluso [Dmitriev y Lisitsa \(2011\)](#) afirman que dicha M-PML no es un medio PML en sentido estricto ya que no ajusta perfectamente el borde y la clasifican como borde de capa absorbente esponjoso. [Fathi et al. \(2015\)](#) mencionan la posibilidad de corregir el borde M-PML pero no presentan los detalles analíticos y numéricos de dicha propuesta alegando que los resultados de corregirla no son satisfactorios. Esto no concuerda con los resultados observados en este trabajo de investigación.

En la siguiente sección se plantea la formulación de M-PML “corregida”, que se trata de una formulación mixta que considera todos los términos de la matriz jacobiana. Como se muestra en la sección posterior la ventaja principal de corregir analíticamente la formulación fuerte de la M-PML es que se arriba a un elemento mixto con matrices elementales simétricas. Esto permite que las matrices globales del sistema híbrido estabilizado sean simétricas.

2. FORMULACIÓN M-PML “CORREGIDA”

En los bordes PML, cuando el estiramiento del medio se produce exclusivamente en la dirección perpendicular al borde, se obtienen matrices de rigidez elementales con diagonal nula. Para eliminar dicha singularidad, se utilizan funciones de estiramiento multiaxiales. En este trabajo se plantea un estiramiento general del medio PML, en el que las funciones de estiramiento pueden variar en ambas direcciones:

$$\tilde{x} = x_0 + \int_{x_0}^x \lambda_x(s, y, \omega) ds \quad \tilde{y} = y_0 + \int_{y_0}^y \lambda_y(x, \eta, \omega) d\eta \quad (1)$$

donde \tilde{x} e \tilde{y} son las coordenadas estiradas, λ_x y λ_y son las funciones de estiramiento en la dirección x e y , respectivamente. Se proponen funciones de estiramiento de la siguiente forma:

$$\lambda_x = \alpha_x + \frac{1}{i\omega} \beta_x \quad \lambda_y = \alpha_y + \frac{1}{i\omega} \beta_y \quad (2)$$

A diferencia de lo que ocurre en un borde PML, α_x , β_x , α_y y β_y son funciones que pueden variar en la dirección perpendicular y paralela al borde. En la Figura 1 se muestra un caso de dominio estirado de forma multiaxial donde existe estiramiento transversal (paralelo al borde) de la parte imaginaria del medio ($\alpha_y = 1$, $\beta_y \neq 0$).

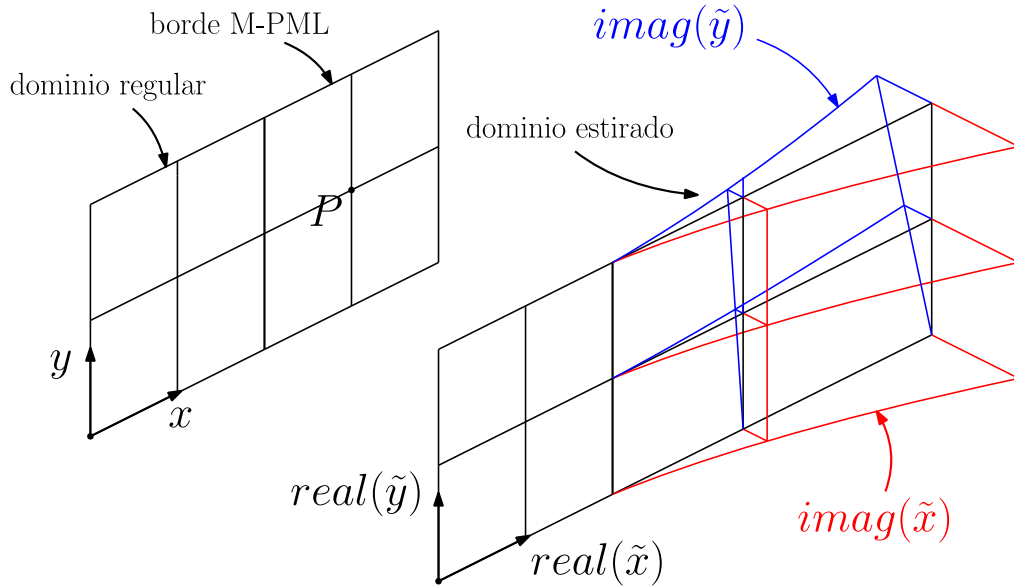


Figura 1: Mapeo entre coordenadas regulares y coordenadas estiradas multiaxiales.

Para expresar las ecuaciones del medio PML en términos de coordenadas regulares es necesario calcular la matriz Jacobiana de la transformación de coordenadas. A partir de la definición de las coordenadas estiradas puede escribirse lo siguiente:

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = \lambda_x, \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} = \lambda_y, \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} = \int_{y_0}^y \frac{\partial \lambda_y}{\partial x}(x, \eta, \omega) d\eta, \quad \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial \lambda_x}{\partial y}(s, y, \omega) ds \quad (3)$$

Por comodidad se utiliza la notación $\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} = \lambda_{yx}$ y $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} = \lambda_{xy}$. La inversa de la matriz Jacobiana y la matriz Jacobiana pueden expresarse de la siguiente manera:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_{yx} \\ \lambda_{xy} & \lambda_y \end{bmatrix}, \quad J = \frac{1}{\det(J^{-1})} \begin{bmatrix} \lambda_y & -\lambda_{yx} \\ -\lambda_{xy} & \lambda_x \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde $\det(J^{-1}) = \lambda_x \lambda_y - \lambda_{xy} \lambda_{yx}$. La matriz Jacobiana J debe existir en todo el dominio PML, y debe cumplir continuidad en la interfaz entre los subdominios M-PML y regular (es decir, $J = I$ siendo I la matriz identidad).

Como en todo desarrollo de borde PML, la ecuación de la onda debe satisfacerse en el dominio estirado. En Trono (2023) se aplica la transformada de Fourier sobre la ecuación de la onda, se utiliza la matriz Jacobiana de la transformación de coordenadas, se multiplica a las ecuaciones obtenidas por $\det(J^{-1})$ y se arriba a la siguiente expresión:

$$(\hat{\sigma}\Lambda)\nabla - \hat{\sigma}(\Lambda\nabla) = \rho(i\omega)^2 \det(J^{-1}) \hat{u}, \quad \text{con} \quad \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde $\hat{\sigma}$ y \hat{u} son las transformadas de Fourier del tensor de tensiones y del vector desplazamiento, respectivamente, $\Lambda = \det(J^{-1})J$ es denominado tensor de estiramiento y ρ es

la densidad del material. A diferencia de lo propuesto por Kukcukoban y Kallivokas (2013), el tensor de estiramiento es un tensor no diagonal. El tensor de estiramiento puede escribirse como combinación lineal de los tensores de estiramiento de la parte real y de la parte imaginaria:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_y & -\lambda_{yx} \\ -\lambda_{xy} & \lambda_x \end{bmatrix} = \Lambda_e + \frac{1}{i\omega} \Lambda_p, \text{ con } \Lambda_e = \begin{bmatrix} \alpha_y & -\alpha_{yx} \\ -\alpha_{xy} & \alpha_x \end{bmatrix} \text{ y } \Lambda_p = \begin{bmatrix} \beta_y & -\beta_{yx} \\ -\beta_{xy} & \beta_x \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde $\alpha_{yx} = \int_{y_0}^y \frac{\partial \alpha_y(x, \eta, \omega)}{\partial x} d\eta$; $\alpha_{xy} = \int_{x_0}^x \frac{\partial \alpha_x(\xi, y, \omega)}{\partial y} d\xi$; $\beta_{yx} = \int_{y_0}^y \frac{\partial \beta_y(x, \eta, \omega)}{\partial x} d\eta$; $\beta_{xy} = \int_{x_0}^x \frac{\partial \beta_x(\xi, y, \omega)}{\partial y} d\xi$.

La divergencia del tensor de estiramiento es nula ($\Lambda \nabla = \mathbf{0}$). A partir de esto y de lo explicitado en Ec. (6), la Ec. (5) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\left(\hat{\sigma} \Lambda_e + \frac{\hat{\sigma}}{i\omega} \Lambda_p \right) \nabla = \rho \left((a - \check{a})(i\omega)^2 + (b - \check{b})i\omega + (c - \check{c}) \right) \hat{\mathbf{u}} \quad (7)$$

con

$$\begin{aligned} a &= \alpha_x \alpha_y, & b &= \beta_x \alpha_y + \alpha_x \beta_y, & c &= \beta_x \beta_y \\ \check{a} &= \alpha_{xy} \alpha_{yx}, & \check{b} &= \beta_{xy} \alpha_{yx} + \alpha_{xy} \beta_{yx}, & \check{c} &= \beta_{xy} \beta_{yx} \end{aligned} \quad (8)$$

Se utiliza la transformada inversa de Fourier $\mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\hat{\sigma}}{i\omega} \right)$ como variable auxiliar:

$$\mathbf{S} = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\hat{\sigma}}{i\omega} \right) = \int_0^t \boldsymbol{\sigma} dt \quad (9)$$

Al aplicar la anti transformada de Fourier de la Ec. (7) se obtiene el primer grupo de ecuaciones de la formulación fuerte M-PML en el dominio del tiempo:

$$(\dot{\mathbf{S}} \Lambda_e + \mathbf{S} \Lambda_p) \nabla = \rho \left((a - \check{a})\ddot{\mathbf{u}} + (b - \check{b})\dot{\mathbf{u}} + (c - \check{c}) \mathbf{u} \right) \quad (10)$$

Para obtener el segundo grupo de ecuaciones diferenciales vigentes en el medio PML según el enfoque mixto, se considera la transformada de Fourier de las ecuaciones cinemáticas:

$$\mathcal{C}^{-1} \hat{\sigma} = \frac{1}{2} (\tilde{\nabla} \hat{\mathbf{u}} + \tilde{\nabla}^T \hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} (\nabla \hat{\mathbf{u}} \mathbf{J}^T + \mathbf{J} \nabla^T \hat{\mathbf{u}}) \quad (11)$$

donde $\tilde{\nabla} \hat{\mathbf{u}}$ y $\nabla \hat{\mathbf{u}}$ son los gradientes del vector de desplazamientos efectuados en coordenadas estiradas y regulares, respectivamente, y \mathcal{C}^{-1} es la inversa del tensor constitutivo. Recordando que el tensor de estiramiento es $\Lambda = \det(\mathbf{J}^{-1}) \mathbf{J}$, se multiplica a la expresión anterior por $i\omega \det(\mathbf{J}^{-1})$ y se expresan las derivadas en términos de las coordenadas regulares:

$$\mathcal{C}^{-1} i\omega \det(\mathbf{J}^{-1}) \hat{\sigma} = \frac{i\omega}{2} (\nabla \hat{\mathbf{u}} \Lambda^T + \Lambda \nabla^T \hat{\mathbf{u}}) \quad (12)$$

Reemplazando Ec. (6) en Ec. (12) se obtiene:

$$\mathcal{C}^{-1} \left(i\omega(a - \check{a}) + (b - \check{b}) + \frac{c - \check{c}}{i\omega} \right) \hat{\sigma} = \frac{i\omega}{2} (\nabla \hat{\mathbf{u}} \Lambda_e^T + \Lambda_e \nabla^T \hat{\mathbf{u}}) + \frac{1}{2} (\nabla \hat{\mathbf{u}} \Lambda_p^T + \Lambda_p \nabla^T \hat{\mathbf{u}}) \quad (13)$$

Se aplica la anti transformada de Fourier de la expresión anterior:

$$\mathcal{C}^{-1} \left((a - \check{a})\dot{\mathbf{S}} + (b - \check{b})\dot{\mathbf{S}} + (c - \check{c})\mathbf{S} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} \Lambda_e^T + \Lambda_e \nabla^T \dot{\mathbf{u}}) + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} \Lambda_p^T + \Lambda_p \nabla^T \mathbf{u}) \quad (14)$$

La Ec. (10) y la Ec. (14) son las expresiones de la formulación fuerte en el dominio estirado Ω_{PML} (ver Figura 2). Se utiliza el enfoque híbrido, que en el dominio regular Ω_{RD} utiliza la formulación fuerte en su forma reducida:

$$div\{\mu[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T] + \lambda(div(\mathbf{u}))\mathbf{I}\} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad \text{en } \Omega_{RD} \times J \quad (15)$$

El sistema se encuentra inicialmente en reposo y sujeto a las siguientes condiciones de borde y de interfase:

$$\{\mu[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T] + \lambda(div(\mathbf{u}))\mathbf{I}\}\mathbf{n}^+ = \mathbf{g}_n \quad \text{en } \Gamma_N^{RD} \times J \quad (16)$$

$$(\dot{\mathbf{S}}\Lambda_e + \mathbf{S}\Lambda_p)\mathbf{n}^- = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_N^{PML} \times J \quad (17)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_D^{PML} \times J \quad (18)$$

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^- \quad \text{en } \Gamma^I \times J \quad (19)$$

$$\{\mu[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T] + \lambda(div(\mathbf{u}))\mathbf{I}\}\mathbf{n}^+ + (\dot{\mathbf{S}}^T\Lambda_e + \mathbf{S}\Lambda_p)\mathbf{n}^- = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma^I \times J \quad (20)$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé, $J = [0, T]$ es el intervalo de tiempo de interés, \mathbf{g}_n es la tensión en el borde del dominio regular, Γ^I es la interfase entre los dominios regular y M-PML, Γ_N^{PML} y Γ_N^{RD} los bordes libres y Γ_D^{PML} el borde donde se restringe los desplazamientos horizontal y vertical.

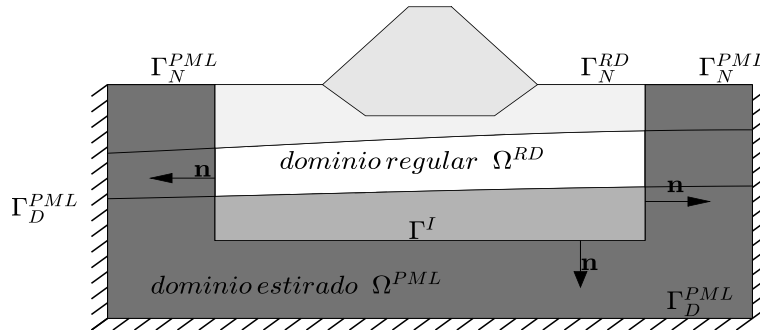


Figura 2: Esquema del modelo híbrido.

Para obtener la formulación débil se suma el residuo ponderado de la Ec. (10) y de la Ec. (15) por funciones de peso \mathbf{W} . Se aplica el teorema de la divergencia y se utilizan las condiciones de borde y de continuidad previamente expuestas para obtener el primer grupo de ecuaciones de la formulación híbrida:

$$\int_{\Omega_{RD}} (\mathbf{W}\nabla^T): \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega_{PML}} (\mathbf{W}\nabla^T): (\dot{\mathbf{S}}\Lambda_e + \mathbf{S}\Lambda_p) d\Omega + \int_{\Omega_{PML}} \mathbf{W}^T \rho ((a - \check{a})\ddot{\mathbf{u}} + (b - \check{b})\dot{\mathbf{u}} + (c - \check{c})\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega_{RD}} \mathbf{W}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\Gamma_N^{RD}} \mathbf{W}^T \mathbf{g}_n d\Gamma \quad (21)$$

Para obtener el segundo grupo de ecuaciones de la formulación híbrida se integra el residuo ponderado de la Ec. (14) por una matriz de peso \mathbf{T} :

$$\int_{\Omega_{PML}} \mathbf{T}: \mathbf{c}^{-1} ((a - \check{a})\dot{\mathbf{S}} + (b - \check{b})\dot{\mathbf{S}} + (c - \check{c})\mathbf{S}) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{PML}} \mathbf{T}: (\nabla\dot{\mathbf{u}} \Lambda_e^T + \Lambda_e \nabla^T \dot{\mathbf{u}}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{PML}} \mathbf{T}: (\nabla\mathbf{u} \Lambda_p^T + \Lambda_p \nabla^T \mathbf{u}) d\Omega \quad (22)$$

Al igual que en el trabajo de [Trono et al. \(2022\)](#), se utilizan funciones de peso que coinciden con las funciones de interpolación, y se agrupan las incógnitas de desplazamientos e historia de tensiones en el vector de incógnitas $\mathbf{d}_e^T = [\mathbf{u}_a^T \boldsymbol{\eta}^T]$ y se obtienen las siguientes matrices del elemento mixto M-PML:

$$k_{MPML} = \int_{\Omega_e^{PML}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u^T \rho (c - \check{c}) \mathbf{N}_u & (\mathbf{B}_\beta^T - \mathbf{H}_\beta^T) \mathbf{N}_s \\ \mathbf{N}_s^T (\mathbf{B}_\beta - \mathbf{H}_\beta) & -\mathbf{N}_s^T \mathbf{D}^{-1} (c - \check{c}) \mathbf{N}_s \end{bmatrix} d\Omega_e^{PML} \quad (23)$$

$$c_{MPML} = \int_{\Omega_e^{PML}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u^T \rho (b - \check{b}) \mathbf{N}_u & (\mathbf{B}_\alpha^T - \mathbf{H}_\alpha^T) \mathbf{N}_s \\ \mathbf{N}_s^T (\mathbf{B}_\alpha - \mathbf{H}_\alpha) & -\mathbf{N}_s^T \mathbf{D}^{-1} (b - \check{b}) \mathbf{N}_s \end{bmatrix} d\Omega_e^{PML} \quad (24)$$

$$m_{MPML} = \int_{\Omega_e^{PML}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u^T \rho (a - \check{a}) \mathbf{N}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{N}_s^T \mathbf{D}^{-1} (a - \check{a}) \mathbf{N}_s \end{bmatrix} d\Omega_e^{PML} \quad (25)$$

con

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \beta_y & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \beta_y & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \beta_y & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \beta_y & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \beta_x & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \beta_x & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \beta_x & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \beta_x \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \beta_x & \frac{\partial N_1}{\partial x} \beta_y & \frac{\partial N_2}{\partial y} \beta_x & \frac{\partial N_2}{\partial x} \beta_y & \frac{\partial N_3}{\partial y} \beta_x & \frac{\partial N_3}{\partial x} \beta_y & \frac{\partial N_4}{\partial y} \beta_x & \frac{\partial N_4}{\partial x} \beta_y \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{H}_\beta = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \beta_{yx} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \beta_{yx} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \beta_{yx} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \beta_{yx} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} \beta_{xy} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \beta_{xy} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \beta_{xy} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \beta_{xy} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} \beta_{xy} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \beta_{yx} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \beta_{xy} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \beta_{yx} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \beta_{xy} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \beta_{yx} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \beta_{xy} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \beta_{yx} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \alpha_y & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \alpha_y & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \alpha_y & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \alpha_y & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \alpha_x & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \alpha_x & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \alpha_x & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \alpha_x \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \alpha_x & \frac{\partial N_1}{\partial x} \alpha_y & \frac{\partial N_2}{\partial y} \alpha_x & \frac{\partial N_2}{\partial x} \alpha_y & \frac{\partial N_3}{\partial y} \alpha_x & \frac{\partial N_3}{\partial x} \alpha_y & \frac{\partial N_4}{\partial y} \alpha_x & \frac{\partial N_4}{\partial x} \alpha_y \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\mathbf{H}_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \alpha_{yx} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \alpha_{yx} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \alpha_{yx} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \alpha_{yx} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} \alpha_{xy} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \alpha_{xy} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \alpha_{xy} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \alpha_{xy} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} \alpha_{xy} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \alpha_{yx} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \alpha_{xy} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \alpha_{yx} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \alpha_{xy} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \alpha_{yx} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \alpha_{xy} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \alpha_{yx} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$N_1 = \left(1 - \frac{x_e}{a_e}\right) \frac{y_e}{b_e}, N_2 = \left(1 - \frac{x_e}{a_e}\right) \left(1 - \frac{y_e}{b_e}\right), N_3 = \frac{x_e}{a_e} \left(1 - \frac{y_e}{b_e}\right), N_4 = \frac{x_e}{a_e} \frac{y_e}{b_e} \quad (31)$$

donde x_e y y_e son las coordenadas locales del elemento y a_e y b_e son el ancho y la altura (véase [Figura 3 a](#)). k_{MPML} , c_{MPML} y m_{MPML} son las matrices de rigidez, amortiguamiento y masa de un elemento mixto de la región PML estabilizada con funciones de estiramiento multiaxiales. Lo positivo de la forma “corregida” de M-PML es que se obtienen matrices del sistema simétricas. La esquematización del ensamble del sistema de ecuaciones puede consultarse en [Trono et al. \(2021\)](#).

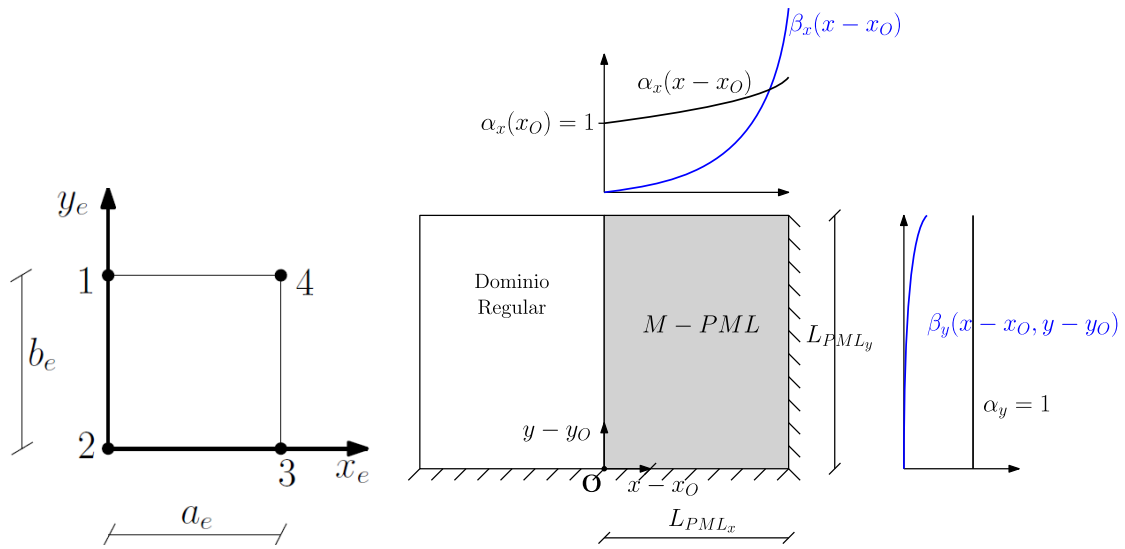


Figura 3: a) Geometría del elemento rectangular b) Funciones de estiramiento en borde M-PML.

Debido a que las inestabilidades de la PML se concentran cerca de la superficie libre, los elementos M-PML se utilizan en los bordes laterales del modelo del sitio. El origen del sistema local del borde se ubica en la parte inferior del mismo (ver Figura 3 b). Se proponen funciones de estiramiento polinómicas de segundo grado;

$$\begin{aligned} \alpha_x &= 1 + \alpha_{0x} \left(\frac{x-x_0}{L_{PMLx}} \right)^2, & \beta_x &= \beta_{0x} \left(\frac{x-x_0}{L_{PMLx}} \right)^2 \\ \alpha_y &= 1, & \beta_y &= \beta_{0y} \left(\frac{x-x_0}{L_{PMLx}} \right)^2 \left(\frac{y-y_0}{L_{PMLy}} \right)^q \end{aligned} \quad (32)$$

con los parámetros uniaxiales recomendados por Basu y Chopra (2003),

$$\alpha_{0x} = \frac{3r_0}{2 L_{PML}} \ln(R^{-1}), \quad \beta_{0x} = \frac{3 V_c}{2 L_{PML}} \ln(R^{-1}) \quad (33)$$

donde r_0 es una longitud característica asociada al problema físico, R es el coeficiente de reflexión y V_c es una velocidad característica del problema. El coeficiente de estiramiento transversal se propone proporcional al estiramiento perpendicular al borde;

$$\beta_{0y} = \frac{\beta_{0x}}{N_p}, \text{ con } N_p > 0 \quad (34)$$

Se evalúan distintas opciones para el exponente q ($q = 0, 1$ y 2) de la Ec. (32). En este trabajo se muestran los resultados de utilizar $q = 0$ debido a que dicha opción presenta mejor desempeño en cuanto a estabilidad y precisión del borde absorbente M-PML.

3. MODELOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS

Para evaluar la precisión del elemento finito absorbente se aplica la misma carga vertical sobre diferentes modelos en deformación plana; modelos con bordes absorbentes PML y M-PML, y un modelo de dominio extendido que sirve como solución de referencia. En todos los casos se mantiene el tamaño del elemento finito de $0.25 \text{ m} \times 0.25 \text{ m}$ y se utiliza el mismo integrador numérico (de diferencias centrales) con un paso de tiempo constante de $dt = 2.71 \times 10^{-5}$. Las propiedades del suelo son $V_s = 300 \text{ m/s}$, $\nu = 0.4$ y $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$. Se

utiliza un modelo plano con dimensiones $L = 4\text{ m}$, $b = 2\text{ m}$, $L_{PML} = 3\text{ m}$ y $h = 4\text{ m}$ (véase Figura 4). Los elementos PML y M-PML utilizados se implementan con funciones de interpolación de 5 incógnitas de tensión discontinua presentadas por Trono et al. (2022). La zapata rígida se modela mediante una restricción de cuerpo rígido. Los coeficientes de las funciones de estiramiento se calculan usando $r_0 = 11\text{ m}$, $V_c = V_S$ y $R = 0.001$.

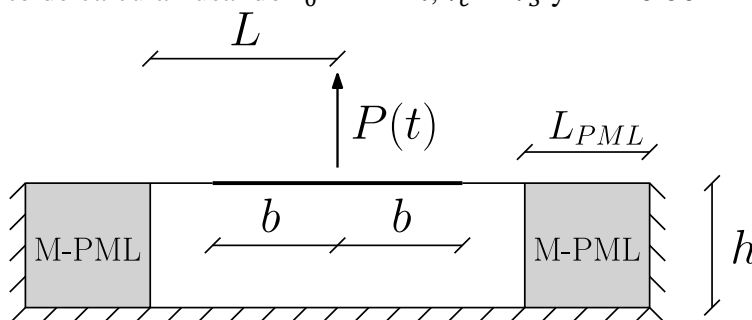


Figura 4: Esquema del modelo numérico del estrato de suelo apoyado rigidamente en la base.

Se aprovecha la condición de simetría en el modelo de dominio extendido, usando $L_{ED} = 150\text{ m}$ (véase Figura 5). Este modelo se utiliza para calcular la solución de referencia del desplazamiento vertical de la zapata hasta el primer arribo del rebote de onda P producido en el borde lateral. Esto permite tener una solución de referencia en el intervalo de tiempo de $[0, 0.43\text{ s}]$. La carga vertical aplicada sobre la zapata consiste en un pulso de Ricker modificado:

$$P(t) = -A \frac{(0.25(\omega_r t - 3\sqrt{6})^2 - 0.5) e^{-0.25(\omega_r t - 3\sqrt{6})^2} - 13e^{-13.5}}{0.5 + 13e^{-13.5}}, \quad (35)$$

$$\omega_r = \frac{6\sqrt{6}}{t_f - t_i} \text{ para } t_0 \leq t \leq t_f$$

donde A es la amplitud ($857,32\text{ kN}$ en este caso) y t_0 y t_f son el tiempo inicial y final del pulso ($t_0 = 0$ y $t_f = 0.1\text{ s}$). La función de carga se muestra en la Figura 5.

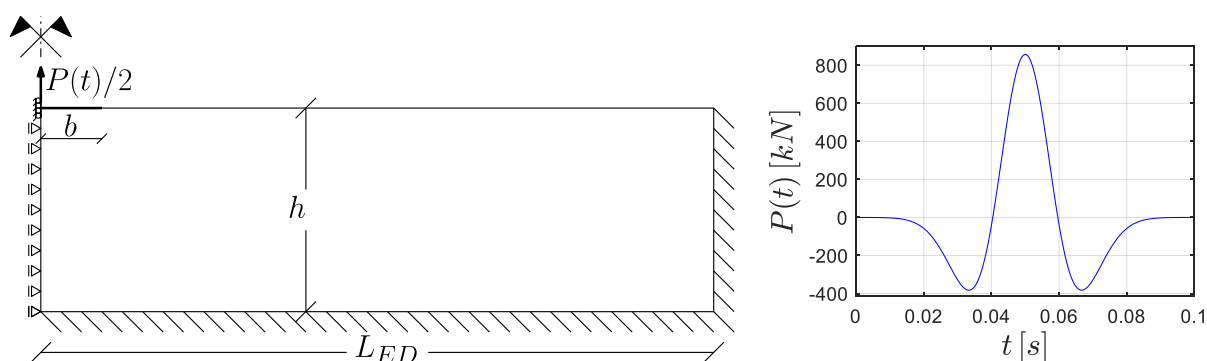


Figura 5: Izquierda; modelo de dominio extendido utilizado para obtener la solución de referencia. Derecha; función de carga puntual aplicada sobre la zapata rígida.

El modelo numérico con bordes absorbentes (mostrado en la Figura 4) es inestable cuando se utilizan bordes PML, ya que presenta tres pares de polos inestables. En la Tabla 1 se muestra la relación de amortiguamiento y la frecuencia de los polos asociados a modos inestables. Se observa que las relaciones de amortiguamiento de los modos inestables tienen valores absolutos bajos y que todos los polos inestables tienen frecuencias naturales similares (alrededor de 45 Hz).

$\xi_i (\times 10^{-3})$	-0.1472	-0.5987	-0.8598
f_i [Hz]	45.7582	45.2897	43.8281

Tabla 1: Relación de amortiguamiento y frecuencias naturales de modos inestables.

El medio PML se estabiliza con un coeficiente $N_P = 3700$ (ver Ec. (34)). Sin embargo, para disminuir las vibraciones espurias que permanecen luego de finalizada la carga, se utiliza $N_P = 250$.

En la Figura 6 se muestra el desplazamiento vertical de la zapata en diferentes escalas de tiempo. En el gráfico superior se muestra la respuesta entre $0 \leq t \leq 0.43$ s, que es el intervalo de tiempo en el que el modelo de dominio extendido sirve como solución de referencia. Se observa que el modelo PML y M-PML tienen un desempeño satisfactorio. No se observa diferencia a simple vista entre los casos PML y M-PML en esta escala de tiempo. Sin embargo, cuando se extiende la escala de tiempo, en el gráfico inferior, se aprecia la diferencia entre usar PML y M-PML. Las amplitudes del modelo con bordes PML se incrementan exponencialmente debido a la presencia de modos inestables, mientras que en el caso M-PML dichas amplitudes decaen exponencialmente debido a que dichos modos han sido estabilizados.

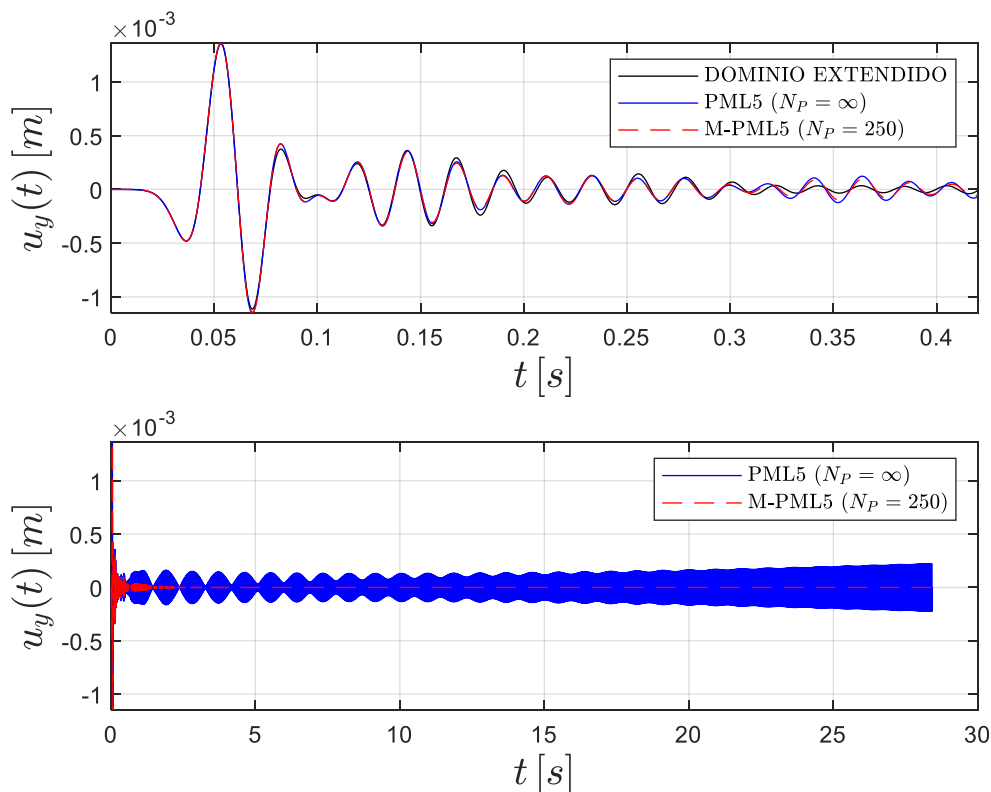


Figura 6: Esquema del modelo de dominio extendido utilizado para obtener la solución de referencia.

4. CONCLUSIONES

Los bordes absorbentes PML pueden ser inestables si el material del suelo tiene módulo de Poisson elevado o si se produce un cambio de impedancias abrupto entre estratos. Esto obstruye la posibilidad de integrar las ecuaciones de movimiento en el dominio del tiempo cuando la modelación requiere períodos de tiempo considerables (por ejemplo, en problemas sísmicos).

En este trabajo se estabiliza el medio PML utilizando funciones de estiramiento multiaxiales (M-PML). Se consideran todos los términos de la transformación de coordenadas, por lo que se obtiene una opción M-PML “corregida”. Esta corrección presenta la ventaja principal de que las matrices del elemento M-PML son simétricas. Este elemento mixto puede ensamblarse a las matrices del sistema de una formulación clásica en términos de desplazamientos, lo que permite incorporar este tipo de elementos a los códigos existentes, e integrar las ecuaciones de movimiento en el dominio del tiempo.

La función de estiramiento transversal propuesta funciona como un amortiguamiento adicional en la capa de borde que permite atenuar las vibraciones adicionales que se producen por las inestabilidades en la PML.

REFERENCIAS

- Basu, U. y Chopra, A.K., Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains: theory and finite-element implementation, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192, 1337-1375 (2003).
- Bécache E., Fauqueux, S., Joly, P.: Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *Journal of Computational Physics*. 188, 399–433 (2003).
- Dmitriev M.N. y Lisitsa V.V. Application of M/PML absorbing boundary conditions to the numerical simulation of wave propagation in anisotropic media. Part II: Stability. *Numerical Analysis and Applications*, 5(1):36-44, 2012.
- Fathi, A., Poursartip, B. Kallivokas, L. F.: Time domain hybrid formulations for wave simulation in three-dimensional PML-truncated heterogeneous media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. DOI:10.1002/nme.4780, 2015.
- Kucukcoban S. y Kallivokas, L.F. A symmetric hybrid formulation for transient wave simulations in PML-truncated heterogeneous media. *Wave Motion*, 50, 57-79 (2013).
- Meza-Fajardo, K. C., Papageorgiou, A. S.: A non-convolutional, Split-field, perfectly matched layer for wave propagation in isotropic and anisotropic elastic media: stability analysis. *Bulletin of the Seismological Society of America* 98(4), 1811-1836 (2008).
- Trono A. Interacción dinámica suelo-estructura considerando ondas sísmicas inclinadas y superficiales (Tesis doctoral). FCEfYn-UNC. 2023.
- Trono A., Brewer A.T., Pinto F., Ceballos M. A.: Bordes absorbentes de capas perfectamente acopladas mediante elementos finitos mixtos. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, Vol XXXIX, 2022.
- Trono A., Lorenzón D., Pinto F., Ceballos M. A.: Absorción de ondas elásticas mediante capas perfectamente acopladas. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, Vol XXXVIII, págs 685-694, 2021.
- Xie Z., Komatish D., Martin R., Matzen R. Improved forward wave propagation and adjoint-based sensitivity kernel calculations using a numerically stable finite-element PML. *Geophysical Journal International*. 198, 1714-1747 (2014).
- Zeng C., Xia J., Miller R.D., Tsoflias G. P. Application of the multiaxial perfectly matched layer (M-PML) to near-surface seismic modeling with Rayleigh waves. *Geophysics*. Vol 76. No. 3. págs 43-52 (2011).