

CALCULO DE CARGAS DE PANDEO EN COLUMNAS DE EULER-BERNOULLI FISURADAS EMBEBIDAS EN UN MEDIO ELÁSTICO DE TIPO WINKLER

BUCKLING LOAD CALCULATION OF CRACKED EULER-BERNOULLI COLUMNS EMBEDDED IN A WINKLER ELASTIC MEDIUM

J.A. Loya, R. Zaera, J. Aranda y C. Santiuste

^a*Dpto. de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, Universidad Carlos III de Madrid,
Av. Universidad 30, 28911 Leganés, España, jloya@ing.uc3m.es, <http://www.uc3m.es/mmcyte>*

Palabras clave: Cargas críticas de pandeo, Columnas fisuradas de Euler-Bernoulli, Medio elástico tipo Winkler.

Resumen. Este trabajo analiza las cargas de pandeo de columnas fisuradas de Euler-Bernoulli inmersas en un medio elástico de tipo Winkler. La columna se modela como dos segmentos conectados en la sección fisurada mediante un muelle rotacional lineal, y que recoge la discontinuidad de giro en esta sección durante la flexión por pandeo. Las ecuaciones diferenciales de pandeo se resuelven para cada segmento aplicando las correspondientes condiciones de contorno, y las condiciones de compatibilidad y de salto en la sección fisurada. La resolución numérica del correspondiente problema de autovalores permite determinar las cargas de pandeo en función del tipo de apoyos, del parámetro que define la rigidez del suelo elástico, de la posición de la fisura y de su longitud. Los resultados obtenidos se comparan satisfactoriamente con los publicados por otros autores que tratan el problema de forma parcial, poniendo de manifiesto la interacción e importancia de los parámetros considerados en la determinación de la carga crítica de pandeo del sistema. Adicionalmente, se ha validado el modelo propuesto con los resultados proporcionados por el código comercial de elementos finitos ABAQUS.

Keywords: Buckling Loads, Cracked Euler-Bernoulli Columns; Winkler Elastic Medium.

Abstract. This paper analyzes the buckling loads of cracked Euler-Bernoulli columns embedded in a Winkler-type elastic medium. The column is modeled as two segments connected in the cracked section by means of a linear rotational spring, and which captures the rotation discontinuity in this section during buckling bending. The buckling differential equations are solved for each segment by applying the corresponding boundary conditions, and the compatibility and jump conditions in the cracked section. The numerical solution of the corresponding eigenvalue problem allows determining the buckling loads as a function of the type of supports, the parameter defining the stiffness of the elastic soil, the position of the crack and its length. The results obtained, are satisfactorily compared with those published by other authors who deal with the problem in a partial way, showing the interaction and importance of the parameters considered in the determination of the critical buckling load of the system. Additionally, the proposed model has been validated with the results provided by the commercial finite element code ABAQUS.

1. INTRODUCCIÓN

El análisis de estabilidad de elementos tipo viga sometidos a cargas de compresión es crucial para el diseño de estructuras en los campos de la ingeniería civil, mecánica, aeroespacial, nuclear y marítima. El pandeo es uno de los modos de inestabilidad más comunes en estructuras columnares, así como en elementos soportados por el suelo, como tuberías, pilotes, cimientos o vías férreas. Debido a sus características geométricas, estas estructuras a menudo se modelan como vigas en la ingeniería civil o en la ingeniería ferroviaria, siendo la teoría de Euler-Bernoulli o la teoría de Timoshenko las más comúnmente utilizadas. Además, al considerar el efecto ejercido por el suelo sobre la viga, el modelo de Winkler y el modelo de Pasternak (o una combinación de ambos) se emplean con frecuencia para medios elásticos, donde el suelo se trata como un conjunto de resortes lineales distribuidos uniformemente, con o sin interacción de corte entre ellos. Por lo tanto, un sistema viga-suelo puede ser analizado utilizando la teoría clásica de pandeo, incluyendo uno o dos términos adicionales en la ecuación de gobierno (Eisenberger y Clastornik, 1987; Stojanovic et al., 2012).

En la literatura científica de la última década, se pueden encontrar numerosos trabajos que tratan el problema del pandeo de vigas en medios elásticos mediante el desarrollo de técnicas matemáticas para resolver el problema, como son los trabajos de Aristizabal-Ochoa (2013), que utilizan un tratamiento de condiciones de contorno generalizadas, el de Hassan y Hadima (2015), que obtiene la solución utilizando el método de diferenciación recursiva, el trabajo de Anghel y Mares (2019), que propone una formulación integral para un medio elástico del tipo Winkler-Pasternak, y el de Ike (2023), que emplea el método iterativo de Stodola-Vianello.

Por otro lado, la presencia de grietas en estos tipos de estructuras puede llevar a una disminución en la rigidez, cuya magnitud depende principalmente de la geometría del elemento, las condiciones de apoyo, el tamaño de la grieta y su posición. Esta disminución en la rigidez tiene un efecto significativo en la carga de pandeo de la viga. El tratamiento de la grieta implica representar la sección dañada con un resorte rotacional lineal, cuya rigidez está relacionada con el tamaño de la grieta y la geometría de la sección transversal. Se imponen la continuidad en el desplazamiento, el momento flector y la fuerza cortante en la sección agrietada, así como una discontinuidad en la rotación proporcional al momento flector transmitido. Utilizando esta metodología (así como otras alternativas equivalentes que consideran singularidades en la rigidez a flexión utilizando la función delta de Dirac), el problema del pandeo en vigas con grietas ha sido estudiado en otros trabajos (Wang et al., 2004; Biondi, 2005, 2007; Caddemi y Calìò, 2008; Loya et al., 2010).

En los trabajos citados anteriormente, o bien la viga embebida en el medio elástico no tiene defectos, o bien se tiene en cuenta la presencia de una grieta pero no el efecto del medio elástico circundante. En el primer caso, los modelos no permiten considerar el efecto flexibilizador de una eventual grieta en el elemento estructural, lo que lleva a sobreestimar la carga de pandeo. En el segundo caso, los modelos no incluyen el efecto estabilizador del medio elástico, lo que resulta en un dimensionamiento excesivo del elemento estructural agrietado. La consideración conjunta de la grieta y el medio elástico ha sido tenida en cuenta para el análisis vibratorio de vigas (Loya et al., 2022), pero no para el estudio de la inestabilidad por pandeo. Por lo tanto, el presente estudio analiza el caso de columnas esbeltas de Euler-Bernoulli con grietas inmersas en un medio elástico sometido a compresión, considerando la discontinuidad del movimiento de flexión en esa sección. Se examina el efecto de la longitud y posición de la grieta, la rigidez del medio circundante y el tipo de apoyos en la determinación de las cargas críticas de pandeo.

2. MODELO DE COLUMNA DE EULER-BERNOULLI EN UN MEDIO ELÁSTICO

2.1. Planteamiento teórico del problema de columna sin fisura

Considere una columna sin fisura, de longitud L , ancho B , canto W , momento de inercia de sección transversal I , módulo de Young E , inmersa en un medio elástico tipo Winkler, de rigidez k_w , y sometida a compresión, tal y como se muestra en la Fig. 1(Izqda.).

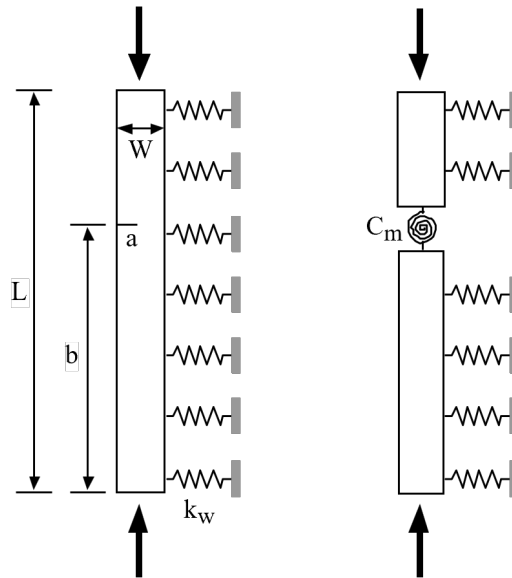


Figura 1: **(Izqda.)**: Columna fisurada de Euler-Bernoulli es un medio elástico tipo Winkler. **(Dcha.)**: Modelo equivalente con muelle elástico para la sección fisurada.

Siguiendo la teoría clásica de Euler, la ecuación que gobierna el comportamiento ante pandeo en una columna de sección transversal uniforme embebida en un medio elástico, se pueden presentar como:

$$EI \frac{d^4 \nu(x)}{dx^4} + P_c \frac{d^2 \nu(x)}{dx^2} + k_w \nu(x) = 0 \quad (1)$$

donde $\nu(x)$ es la deflexión transversal de la columna, siendo x la coordenada cartesiana de la columna en su dirección longitudinal con origen en el apoyo inferior, y P_c es la carga crítica de pandeo.

Considerando las siguientes variables adimensionales,

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad V = \frac{\nu}{L}, \quad \lambda^2 = \frac{P_c L^2}{EI}, \quad K_w = \frac{k_w L^4}{EI} \quad (2)$$

la ecuación (1) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$V(\xi)^{iv} + \lambda^2 V(\xi)'' + K_w V(\xi) = 0 \quad (3)$$

donde $(\cdot)'$ representa la derivada respecto a ξ . La solución general para la ecuación de coeficientes constantes (3) puede expresarse por medio de funciones hiperbólicas. Sin embargo, teniendo en cuenta las definiciones de giro θ y esfuerzos (momento flector, M , y esfuerzo cortante, Q), las correspondientes variables adimensionales (giro, momento flector, \overline{M} , y esfuerzo cortante \overline{Q}) pueden definirse a partir de sus correspondientes definiciones dimensionales:

$$\theta = V', \quad \bar{M} = \frac{ML}{EI} = V'', \quad \bar{Q} = \frac{QL^2}{EI} = V''' + \lambda^2 V' \quad (4)$$

La solución puede expresarse convenientemente en la Ec. (5) en términos de magnitudes adimensionales en el apoyo inferior, $\xi = 0$ (desplazamiento transversal V_0 , giro θ_0 , momento flector \bar{M}_0 , y esfuerzo cortante \bar{Q}_0) y de las funciones de Krylov–Duncan, $g_i(\xi)$ (Karnovsky y Lebed, 2010):

$$V(\xi) = V_0 \cdot g_1(\xi) + \theta_0 \cdot g_2(\xi) + \bar{M}_0 \cdot g_3(\xi) + \bar{Q}_0 \cdot g_4(\xi) \quad (5)$$

donde se definen las correspondientes funciones y parámetros:

$$g_1(\xi) = \cosh(\Lambda_1 \xi) - \frac{\Lambda_1^2 \cosh(\Lambda_1 \xi)}{(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2)} - \frac{\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 \cosh(\Lambda_2 \xi)}{(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2)} \quad (6)$$

$$g_2(\xi) = \frac{\sinh(\Lambda_1 \xi)}{\Lambda_1} - \frac{(\lambda^2 + \Lambda_1^2) \sinh(\Lambda_1 \xi)}{\Lambda_1(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2)} + \frac{(\lambda^2 + \Lambda_1^2) \sinh(\Lambda_2 \xi)}{\Lambda_2(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2)} \quad (7)$$

$$g_3(\xi) = \frac{\cosh(\Lambda_1 \xi)}{(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2)} - \frac{\cosh(\Lambda_2 \xi)}{(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2)} \quad (8)$$

$$g_4(\xi) = -\frac{\sinh(\Lambda_1 \xi)}{\Lambda_1(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2)} + \frac{\sinh(\Lambda_2 \xi)}{\Lambda_2(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2)} \quad (9)$$

$$\Lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{-\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 4K_w}}{2}} \quad (10)$$

Para la resolución de la Ec. (5), se deben aplicar las correspondientes condiciones de contorno en cada extremo (Tabla 1).

Apoyo simple	Empotramiento	Extremo libre
$V = \bar{M} = 0$	$V = \theta = 0$	$\bar{M} = \bar{Q} = 0$

Tabla 1: Condiciones de contorno.

2.2. Planteamiento teórico del problema de columna fisurada

Consideremos una fisura abierta de longitud a ubicada a una distancia b , desde el soporte inferior, como se muestra en la Fig. 1 (Izqda). Siguiendo el método propuesto por Freund y Herrmann (1976) y seguido por muchos otros autores (Adams et al. (1978); Morassi (1993); Narkis (1994); Fernández-Sáez et al. (1999); Krawczuk et al. (2003); Loya et al. (2006)), la columna agrietada se considera como dos segmentos conectados por resortes rotacionales elásticos, como se muestra en la Fig. 1(Dcha.), cuya rigidez depende de la profundidad de la grieta y de la geometría de la sección fisurada.

La discontinuidad en la pendiente de la deflexión de la columna en la sección agrietada, $\Delta\theta$, es proporcional al momento flector transmitido por esa sección, $M(b)$, de la siguiente manera:

$$\Delta\theta = C_m M(x)|_{x=b} \quad (11)$$

$$C_m = \frac{W}{EI} m(\alpha, \text{cross-section geometry}) \quad (12)$$

con $\alpha = (a/W)$ siendo la longitud de grieta adimensional y la función m evaluada por Tada et al. (1985) utilizando la teoría de la Mecánica de Fractura, que puede aplicarse al comportamiento elástico lineal del material. Para el caso específico de una viga con sección transversal rectangular, la función m toma la forma expresada en la Ec (13) (Tada et al., 1985):

$$m(\alpha) = 2 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 (5,93 - 19,69\alpha + 34,14\alpha^2 - 35,84\alpha^3 + 13,2\alpha^4) \quad (13)$$

A partir de la Ec. (3), la ecuación de gobierno para cada uno de los dos segmentos puede expresarse de la siguiente manera:

$$V_1(\xi)^{iv} + \lambda^2 V_1(\xi)'' + K_w V_1(\xi) = 0; \quad 0 < \xi < \beta \quad (14)$$

$$V_2(\xi)^{iv} + \lambda^2 V_2(\xi)'' + K_w V_2(\xi) = 0; \quad \beta < \xi < 1 \quad (15)$$

donde λ es un autovalor de la columna agrietada en el medio elástico, relacionado con la carga crítica de pandeo de la columna con una grieta a través de la Ec. (2). Estas ecuaciones deben resolverse aplicando las correspondientes condiciones de contorno, así como las siguientes condiciones de continuidad y salto en la sección agrietada, $\xi = \beta$:

- Continuidad en la deflexión:

$$\Delta V = V_2(\beta) - V_1(\beta) = 0 \quad (16)$$

- Continuidad en el momento flector:

$$V_2''(\beta) = V_1''(\beta) \quad (17)$$

- Continuidad en el esfuerzo cortante:

$$V_2'''(\beta) + \lambda^2 V_2'(\beta) = V_1'''(\beta) + \lambda^2 V_1'(\beta) \quad (18)$$

- Discontinuidad en la pendiente de la deflexión:

$$\Delta\theta = V_2'(\beta) - V_1'(\beta) = \eta V_2''(\beta) \quad (19)$$

siendo $\eta = \frac{W}{L} m(\alpha)$ el parámetro que controla la severidad de la fisura.

3. SOLUCIÓN DIRECTA PARA LA CARGA DE PANDEO

La solución directa para las fuerzas de pandeo se puede obtener analizando por separado los segmentos de la columna a cada lado de la fisura. La solución que satisface las condiciones de compatibilidad en la fisura para cada segmento, $V_i(\xi)$, $i = 1, 2$, se puede expresar en términos de desplazamientos, rotaciones y fuerzas en el soporte inferior, $\xi = 0$, ($V_0, \theta_0, \overline{M}_0, \overline{Q}_0$, respectivamente), así como del salto en la pendiente de la deformada de la columna, $\Delta\theta$, en la sección agrietada, $\xi = \beta$:

$$V_1(\xi) = V_0 \cdot g_1(\xi) + \theta_0 \cdot g_2(\xi) + \overline{M}_0 \cdot g_3(\xi) + \overline{Q}_0 \cdot g_4(\xi) \quad (20)$$

$$V_2(\xi) = V_1(\xi) + \Delta\theta \cdot g_2(\xi - \beta) \quad (21)$$

Aplicando las correspondientes condiciones de contorno en los apoyos, las funciones de desplazamiento $V_{1,2}(\xi)$ conducen al correspondiente problema de autovalores. Anulando el determinante de la matriz de coeficientes de dicho sistema algebraico homogéneo, se obtiene la ecuación característica del sistema. Las raíces de esta ecuación, obtenidas mediante métodos numéricos, proporcionan la carga crítica de pandeo de la columna fisurada embebida en un medio elástico.

3.1. Influencia de la fisura

En primer lugar, se ha analizado la influencia de la longitud de fisura y de la posición de la sección fisurada en ausencia de un medio elástico en columnas con distintas condiciones de contorno (simplemente apoyadas, empotradas-empotradas, empotradas-libres, empotradas-apoyadas). Los autovalores obtenidos y las correspondientes cargas críticas de pandeo, P_c , muestran una concordancia perfecta con los casos descritos por Loya et al. (2010) para fisuras con longitud adimensional (a/W) entre 0 y 0,9, en una sección ubicada a distancia $\beta = 0,25$ y $\beta = 0,5$ desde el soporte inferior. Estos resultados se normalizan con el valor correspondiente al caso sin fisura y se representan en la Fig. 2.

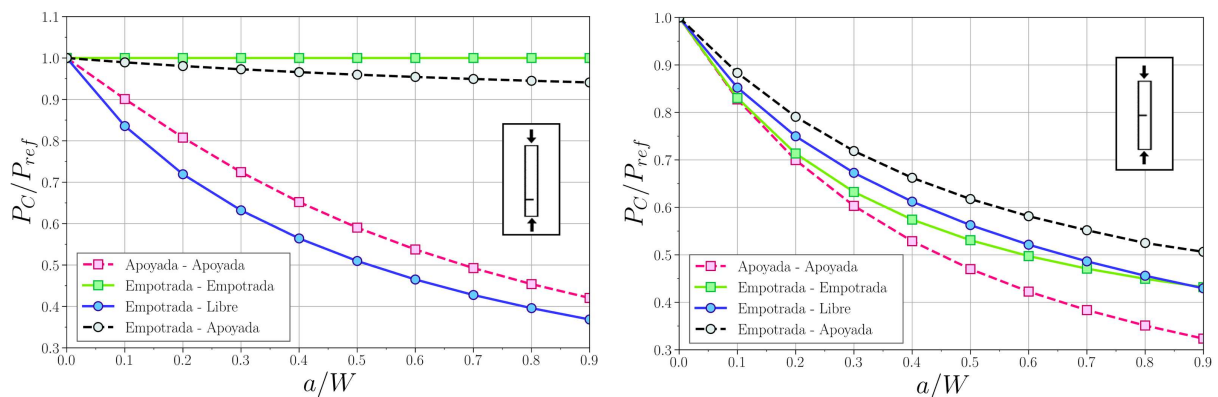


Figura 2: Variación de la primera carga crítica normalizada con (a/W) para diferentes condiciones de contorno. (Izqda.): $\beta = 0,25$. (Dcha.): $\beta = 0,50$.

Como se esperaba, la carga de pandeo disminuye con la longitud de fisura, mientras que la posición de la sección fisurada, tiene un efecto significativo en el valor de la carga de pandeo. Como caso representativo, se puede observar el caso empotrada-empotrada: cuando la sección de la grieta está ubicada en $\beta = 0,25$ (Fig. 2 Izqda.), la fisura no tiene efecto en la primera carga crítica debido al momento flector nulo en la sección agrietada, en concordancia con Loya et al. (2010). En el caso de columna empotrada-apoyada, el momento flector en la sección fisurada en $\beta = 0,25$ es pequeño aunque no nulo, por lo que el efecto de la fisura en la primera carga crítica es mucho más limitado. Estos comportamientos difieren considerablemente en el caso de $\beta = 0,50$ (Fig. 2 Dcha.).

3.2. Influencia de la rigidez del medio elástico

Para analizar la aplicabilidad del modelo cuando la columna está embebida en un medio elástico, se considera el caso de una columna intacta simplemente apoyada analizada por Jančo (2013), de longitud $L = 1$ m, momento de inercia $I = 833,333$ mm⁴ y módulo de Young $E = 200$ GPa, sobre la que propuso la siguiente solución teórica para la carga crítica de pandeo en función de la rigidez del medio elástico tipo Winkler circundante, K_w :

$$P_c = \frac{(K_w + \pi^4)EI}{\pi^2 L^2} \quad (22)$$

En la Tabla 2 se comparan los valores teóricos de P_c (vía Ec. (22)) en el rango $K_w=[0, 5, 10, 50, 100]$ con los calculados mediante el modelo propuesto. Los resultados muestran una buena correlación en el rango de estudio, con una diferencia máxima inferior al 0,04 %.

P_c	K_w				
	0	5	10	50	100
Teórico (Jančo, 2013)	1644,94	1729,36	1814,82	2489,28	3334,65
Propuesto	1644,94	1729,44	1813,94	2489,95	3334,97
Diferencia [%]	0	0	0,01	0,03	0,04

Tabla 2: Comparación de resultados para columna simplemente apoyada sin fisura en un medio elástico.

La influencia de las condiciones de contorno en la carga crítica de una columna intacta respecto a la rigidez del medio se muestran en la Fig. 3. Para todas las condiciones de contorno, la carga crítica aumenta con K_w , siendo más pronunciada su influencia cuanto menos rígidas son las condiciones de contorno, como ocurre con las vigas simplemente apoyadas y en voladizo.

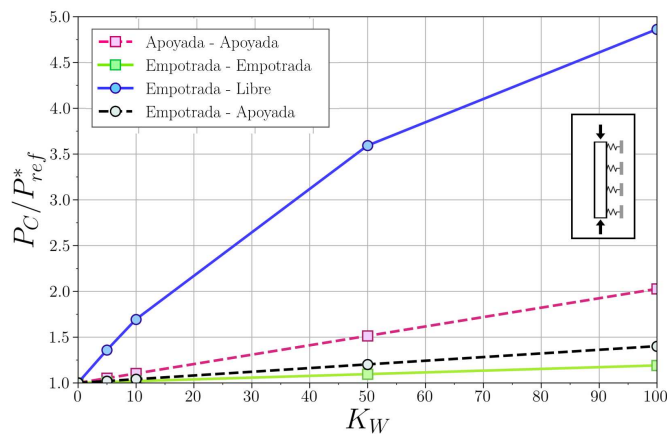


Figura 3: Carga crítica respecto a K_w en una columna intacta según las condiciones de contorno.

3.3. Influencia combinada de la fisura y de la rigidez del medio elástico

A continuación se analiza el efecto acoplado de la sección fisurada en las posiciones $\beta = 0,25$ y $\beta = 0,50$, y de la rigidez del medio elástico en el caso de columna biapoyada. Para ello, se presentan en la Fig. 4 la variación de la carga crítica de pandeo con respecto a (a/W) y K_w . Dicha carga se presenta normalizada con la correspondiente a una columna intacta en un medio elástico circundante con rigidez nula.

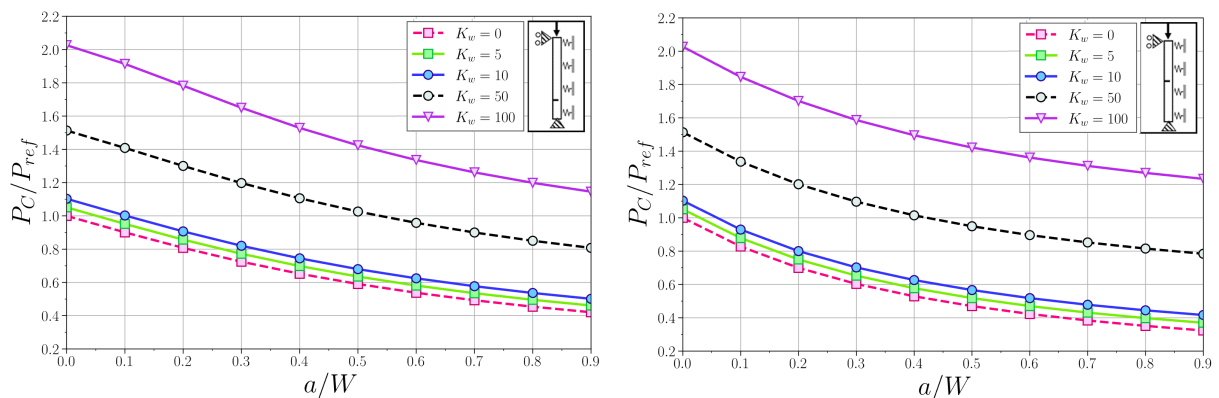


Figura 4: Variación de P_c con (a/W) y K_w en columna viapoyada. (Izqda.): $\beta = 0,25$. (Dcha.): $\beta = 0,50$.

4. VALIDACIÓN DE LA CARGA DE PANDEO MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Para validar el modelo presentado, se ha desarrollado un modelo tridimensional de elementos finitos en el código comercial ABAQUS empleando elementos hexaédricos lineales de ocho nodos con integración reducida (tipo C3D8R), sometido a pandeo. Las condiciones de contorno en los extremos de la columna se aplican restringiendo los correspondientes grados de libertad según el tipo de apoyo considerado. En el caso de empotramiento, éstos se restringen en toda la sección, mientras que para modelizar un apoyo, se aplican en la línea central de la sección correspondiente. La fisura se modela mediante una reducción brusca del espesor de la columna en la sección fisurada en función de la longitud de la misma. Adicionalmente, se considera el modelo de fisura abierta que, acorde al modelo analítico simplificado propuesto previamente, no detecta contacto entre los labios de fisura cuando ésta se cierra (tensión de compresión).

A modo demostrativo, la Fig. 5a muestra la deformada de una viga biapoyada intacta en el primer modo de pandeo, apreciándose una deformada suave. Al considerar la presencia de una fisura (Fig. 5b), se aprecia un salto en la pendiente de la deformada en la sección fisurada. El medio elástico circundante se modeliza mediante una serie de muelles lineales que unen la directriz de la viga a una superficie rígida paralela a dicha directriz. Los casos sin y con fisura en medio elástico se esquematizan en las Figs. 5c y 5d.

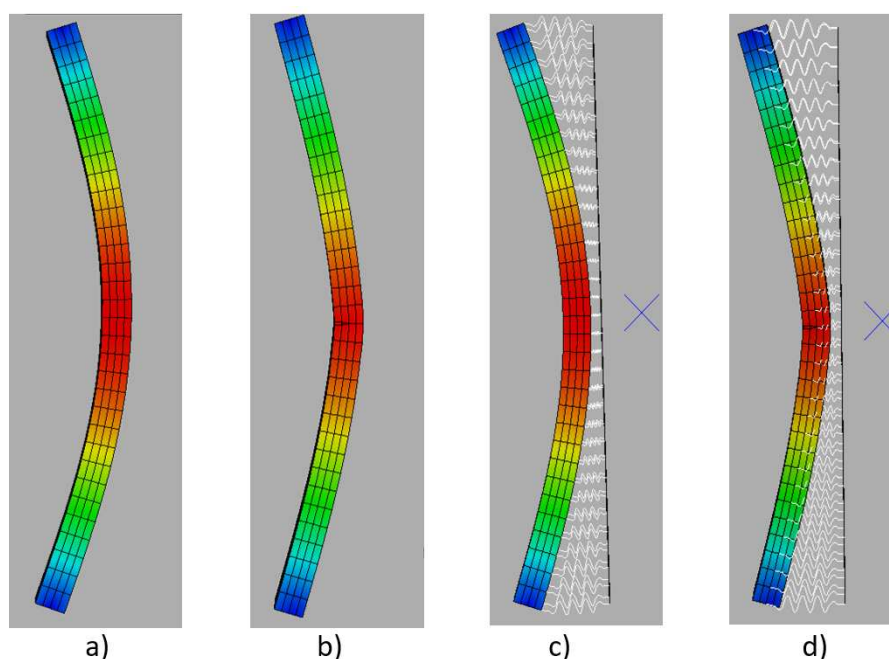


Figura 5: Modelización MEF de columna biapoyada a pandeo. **a)**: intacta, **b)**: fisurada, **c)**: intacta en medio elástico, **d)**: fisurada en medio elástico.

En la Tabla 3 se comparan las cargas de pandeo obtenidas mediante el modelo propuesto y con ABAQUS en una columna simplemente apoyada de longitud $L = 0,4$ m, momento de inercia $I = 1333,33$ mm⁴, módulo de Young $E = 210$ GPa y fisura de longitud $a/w = 0,5$ en $\beta = 0,5$ para distintos valores de rigidez del medio circundante, K_w . Los resultados muestran una buena correlación en el rango de estudio, con una diferencia máxima inferior al 5 %, lo que se considera muy adecuado teniendo en cuenta que se comparan resultados de un modelo numérico tridimensional con los de un modelo analítico simplificado de carácter unidimensional.

K_w				
P_c/P_{ref}	0	10	50	100
Propuesto	0,6856	0,7525	0,9743	1,1924
ABAQUS	0,7073	0,7612	0,9767	1,2456
Diferencia [%]	3,07	1,15	0,24	4,27

Tabla 3: Comparación de resultados en columna simplemente apoyada fisurada en un medio elástico.

5. CONCLUSIONES

Es conocido que la presencia de fisuras en una columna sometida a compresión, reduce las fuerzas de pandeo de la estructura al hacerla más flexible. En este trabajo se propone un modelo teórico para determinar dichas cargas críticas en columnas de Euler-Bernoulli fisuradas e inmersas en un medio elástico tipo Winkler, para distintas condiciones de contorno. El método descrito divide la columna en dos segmentos conectados mediante un muelle elástico rotacional sin masa, cuya rigidez está relacionada con el momento flector transmitido en la sección fisurada, y que satisface las correspondientes condiciones de continuidad y salto en la sección fisurada.

El modelo propuesto ha sido validado, de manera independiente, con resultados de la literatura, tanto para el caso de columnas fisuradas en ausencia de medio elástico como para el de columnas intactas inmersas en un medio elástico tipo Winkler.

Posteriormente se ha analizado el efecto acoplado de la existencia de fisura y del medio elástico, observándose que la presencia de cada uno de ellos produce un efecto opuesto en la fuerza crítica de pandeo. Los resultados del modelo teórico han sido validados con los proporcionados por un modelo tridimensional de elementos finitos.

El presente modelo ha demostrado su capacidad para reproducir el comportamiento ante pandeo de columnas fisuradas inmersas en un medio elástico.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Agencia Estatal de Investigación de España el apoyo recibido para el desarrollo de este trabajo a través del Proyecto PID2020-118946RB-I00.

REFERENCIAS

- Adams R., Cawley P., Pye C., y Stone B. A vibration technique for non-destructive assessing the integrity of structures. *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.*, 20:93–100, 1978.
- Anghel V. y Mares C. Integral formulation for stability and vibration analysis of beams on elastic foundation. *Proc. Rom. Acad. Ser. A*, 20:285–293, 2019.
- Aristizabal-Ochoa J. Stability of slender columns on an elastic foundation with generalised end conditions. *Ing. e Investig.*, 33:34–40, 2013.
- Biondi B. and Cademi S. Closed form solutions of Euler–Bernoulli beams with singularities. *Int. J. Solids Struct.*, 42:3027–3044, 2005.
- Biondi B. and Cademi S. Euler–Bernoulli beams with multiple singularities in the flexural stiffness. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 26:789–809, 2007.
- Caddemi S. y Calì I. Exact solution of the multi-cracked Euler–Bernoulli column. *Int. J. Solids Struct.*, 45:1332–1351, 2008.
- Eisenberger M. y Clastornik J. Vibrations and buckling of a beam on Winkler elastic foundation. *J. Sound Vib.*, 2:233–241, 1987.

- Fernández-Sáez J., Rubio L., y Navarro C. Approximate calculation of the fundamental frequency for bending vibrations of cracked beams. *J. Sound Vib.*, 225:345—352, 1999.
- Freund L. y Herrmann G. Dynamic fracture of a beam or plate in plane bending. *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, 43:112—116, 1976.
- Hassan M. y Hadima S. Analysis of nonuniform beams on elastic foundations using recursive differentiation method. *Eng. Mech.*, 22:83—94, 2015.
- Ike C. Stodola-Vianello method for the buckling load analysis of Euler–Bernoulli beam on Winkler foundation. *UNIZIK J. Eng. Appl. Sci.*, 23:250—259, 2023.
- Jančo R. Numerical and exact solution of buckling load for beam on elastic foundation. *Trans. VŠB Tech. Univ. Ostrav. Mech. Ser.*, 59:21—26, 2013.
- Karnovsky I. y Lebed O. *Advanced Methods of Structural Analysis*. Springer, 2010.
- Krawczuk M., Palacz M., y Ostachowicz W. The dynamic analysis of cracked Timoshenko beams by spectral element. *J. Sound Vib.*, 264:1139—1153, 2003.
- Loya J., Aranda-Ruiz J., y Zaera R. Natural frequencies of vibration in cracked Timoshenko beams within an elastic medium. *Theor. Appl. Frac. Mech.*, 118:103257, 2022.
- Loya J., Rubio L., y Fernández-Sáez J. Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams. *J. Sound Vib.*, 290:640—653, 2006.
- Loya J., Vadillo G., y Fernández-Sáez J. First-order solutions for the buckling loads of Euler–Bernoulli weakened columns. *J. Eng. Mech.*, 136:674—679, 2010.
- Morassi A. Crack-induced changes in eigenfrequencies of beam structures. *J. Eng. Mech.*, 119:1798—1803, 1993.
- Narkis Y. Identification of crack location in vibrating simply supported beams. *J. Sound Vib.*, 172:549—558, 1994.
- Stojanovic V., Kozic P., y Janevski G. Buckling instabilities of elastically connected Timoshenko beams on an elastic layer subjected to axial forces. *J. Mech. Mat. Struc.*, 7:363—374, 2012.
- Tada H., Paris P., y Irwin G. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Paris Productions: St. Louis, MI, USA, 1985.
- Wang C., Wang C., y Aung T. Buckling of a weakened column. *J. Eng. Mech.*, 130:1373—1376, 2004.