

## MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO EXPANDIDA PARA MEIOS BIDIMENSIONAIS: ABORDAGEM GEOMETRICAMENTE EXATA

### LUMPED DAMAGE MECHANICS EXPANDED FOR TWO-DIMENSIONAL DOMAINS: GEOMETRICALLY EXACT APPROACH

Daniel V. C. Teles<sup>a</sup>, David L. N. F. Amorim<sup>a,b,c</sup> e Edson D. Leonel<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Avenida Trabalhador São-Carlense, 400, São Carlos-SP, Brasil, danielvcteles@usp.br, <https://ppgset.eesc.usp.br/>*

<sup>b</sup>*Laboratório de Modelagem Matemática em Engenharia Civil, Universidade Federal de Sergipe, Avenida Marcelo Déda Chagas s/n, São Cristóvão-SE, Brasil, davidnf@academico.ufs.br, <http://www.ipd.ufs.br>*

<sup>c</sup>*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Campus A. C. Simões, Maceió-AL, Brasil, davidnf@academico.ufs.br, <https://ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgec/>*

**Palavras-chave:** Mecânica do dano concentrado, método dos elementos finitos, abordagem geometricamente exata.

**Resumo.** A descrição do comportamento não-linear das estruturas é de extrema importância na engenharia de estruturas. Neste trabalho, a não-linearidade física é abordada a partir da mecânica do dano concentrado, que já apresentou resultados objetivos e boa acurácia em aplicações anteriores. O método numérico utilizado é o método dos elementos finitos baseado em posições, cuja formulação é geometricamente exata e apresenta fácil implementação computacional, por considerar como variável cinemática a posição do corpo na configuração atual. Desta forma, o presente trabalho dá continuidade aos avanços anteriormente obtidos com a utilização da mecânica do dano concentrado em meios bidimensionais, expandindo agora a formulação para um método numérico geometricamente exato, em que os resultados mesmo em regime de pequenos deslocamentos podem ter sua acurácia aumentada.

**Keywords:** Lumped damage mechanics, finite element method, geometrically exact approach.

**Abstract.** The nonlinear behaviour description of structures has huge importance in structural engineering. In this work, the concentrated damage mechanics describes the material nonlinearity. This approach has already demonstrated objective results and good accuracy in previous applications. The numerical method utilised herein is the finite element method based on positions. This approach is geometrically exact and presents easy computational implementation once it considers the body positions at the current configuration as kinematic variable. Therefore, the present work continues the advances previously observed within the use of concentrated damage mechanics in two-dimensional domains. The present study extends the formulation to a geometrically exact framework, in which the results even in small displacements regime can have their accuracy improved.

## 1 INTRODUÇÃO

O comportamento mecânico de sólidos e estruturas é descrito por meio de formulações complexas, as quais demandam a aplicação de métodos numéricos para a obtenção de respostas. Essa necessidade surge devido à limitação das soluções analíticas a um conjunto de problemas, caracterizados por restritas condições de contorno e descrições do comportamento material.

Dentre os métodos numéricos, o método dos elementos finitos (MEF) está entre os mais utilizados. O MEF requer a subdivisão do domínio em partes menores denominadas elementos finitos. Nestes elementos, são empregadas funções de aproximação para a obtenção de respostas nodais, enquanto que respostas ao longo do elemento são obtidas de acordo com o grau das funções adotadas.

Recentemente, uma nova abordagem para o MEF foi proposta, baseando-se em posições e realizando o equilíbrio da estrutura em função das posições atuais dos elementos (Coda e Greco, 2004), dando início ao chamado Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP). É importante ressaltar que abordagens similares já haviam sido propostas anteriormente, como as apresentadas em Shabana (1997) e Bonet et al. (2000). Posteriormente, o método foi desenvolvido para análise de treliças espaciais (Greco et al., 2006), elementos de casca (Coda e Paccola, 2007, 2008), interação fluido-estrutura (Sanches e Coda, 2014), entre outros problemas.

A representação de fenômenos fisicamente não lineares se dá a partir dos conceitos de 3 grandes teorias: teoria da plasticidade, mecânica da fratura e mecânica do dano. A primeira é largamente utilizada para representar o comportamento de materiais dúcteis, tendo surgido a partir da observação de fenômenos não lineares em metais, sendo as deformações permanentes e encruamento os principais. A mecânica da fratura caracteriza a deterioração material a partir da consideração de descontinuidades discretas, sendo então muito utilizada para representar o surgimento e a propagação de fissuras (Broek, 1974). A mecânica do dano, por sua vez, é uma teoria que se encontra entre as duas anteriores, sendo capaz de representar tanto o comportamento dúctil quanto o frágil, com a deterioração material sendo caracterizada a partir da consideração de uma variável interna escalar denominada dano (Lemaitre e Chaboche, 1985).

Outra abordagem utilizada para representar fenômenos fisicamente não lineares, desenvolvida inicialmente como uma alternativa simplificada para avaliar dano em pórticos (Flórez-López, 1993), é a mecânica do dano concentrado (MDC). Esta utiliza conceitos da mecânica da fratura e da mecânica do dano clássica em rótulas plásticas provenientes da teoria da plasticidade. Posteriormente, a teoria foi desenvolvida para analisar diversos outros problemas de engenharia, como vigas e túneis de concreto simples (Amorim et al., 2014), arcos de concreto armado (Amorim et al., 2013; Brito et al., 2020), pórticos metálicos (Bai et al., 2016, 2017), vigas de concreto armado sujeitas à cargas de impacto (Oliveira et al., 2020; Teles et al., 2020), análises sísmicas de pórticos (Cipollina et al., 1995; Perdomo et al., 1999; Teles et al., 2021), segmentos de túneis de concreto com fibras (Oliveira et al., 2023) e corrosão (Coelho et al., 2019). Ainda, a teoria teve seus conceitos expandidos para meios bidimensionais dando início a chamada Mecânica do Dano Concentrado Expandida (MDCX), sendo aplicada em problemas de chapas e placas (Amorim et al., 2018; Picón et al., 2021).

Diante do exposto, a MDCX e o MEFP se apresentam como poderosas ferramentas para análise não linear de estruturas. Neste sentido, o presente trabalho objetiva adaptar o elemento finito da MDCX para aplicação em um método numérico que apresenta formulação geometricamente exata (MEFP), permitindo assim a análise de problemas levando em consideração não-linearidades de diferentes natureza.

## 2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS BASEADO EM POSIÇÕES

O MEFP é um método numérico em que utiliza-se como variável cinemática a posição do corpo na configuração atual, sendo a formulação apresentada inicialmente em [Coda e Greco \(2004\)](#). Utiliza-se o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK), cuja energia específica de deformação é dada por:

$$u_e(\mathbb{E}) = \frac{1}{2} \mathbb{E} : \mathbf{C} : \mathbb{E} \quad (1)$$

Sendo  $\mathbf{C}$  o tensor constitutivo elástico de quarta ordem, que neste modelo constitutivo, é o mesmo utilizado na Lei de Hooke, e  $\mathbb{E}$  o tensor de deformações de Green-Lagrange, que é conjugado energético do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie  $\mathbf{S}$ . Assim, tem-se:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbb{E}} = \mathbf{C} : \mathbb{E} \quad (2)$$

A energia mecânica total, em uma formulação estática, é composta por duas parcelas:

$$\Pi = \mathbb{U} + \mathbb{P} \quad (3)$$

Sendo  $\mathbb{U}$  a energia de deformação e  $\mathbb{P}$  a energia potencial das forças externas.

Neste sentido, o equilíbrio realizado na configuração atual da estrutura, dado pelo princípio da estacionariedade, é:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_i} + \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i} = \int_{\Omega} \mathbf{S} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_i} d\Omega - F_i^{ext} = F_i^{int} - F_i^{ext} = 0_i \quad (4)$$

Em que foram consideradas forças externas conservativas no termo referente ao potencial das forças externas.

É possível notar que o equilíbrio dado na equação (4) é não-linear, e uma vez que as posições nodais atuais são desconhecidas, resolve-se o sistema a partir de um processo iterativo utilizando o método de Newton-Raphson. Neste sentido, a cada iteração tem-se o chamado vetor de desbalanceamento mecânico ou vetor resíduo, dado por:

$$r_i = F_i^{int} - F_i^{ext} \quad (5)$$

Arbitrando uma posição tentativa  $Y^0$ , retorna-se um valor não nulo para o vetor resíduo. Expandido-se este vetor em série de Taylor e desprezando termos de ordem superior, tem-se:

$$r_i(Y) = r_i(Y^0) + \left. \frac{\partial r_i}{\partial Y_k} \right|_{Y^0} \Delta Y_k = 0_i \Rightarrow \Delta Y_k = - \left( \left. \frac{\partial r_i}{\partial Y_k} \right|_{Y^0} \right)^{-1} r_i(Y^0) \quad (6)$$

Sendo  $Y$  a posição atual (solução procurada do problema) e  $\Delta Y_k$  a correção a ser aplicada na posição tentativa  $Y^0$ .

Como foram consideradas forças externas conservativas, o termo referente à derivada do resíduo, que é a matriz de rigidez tangente do problema, ou matriz hessiana, é dado por:

$$\left. \frac{\partial r_i}{\partial Y_k} \right|_{Y^0} = \left. \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_k \partial Y_i} \right|_{Y^0} \quad (7)$$

### 3 MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO

Presume-se na MDC que os efeitos inelásticos decorrentes de fenômenos fisicamente não lineares estão concentrados em regiões com espessura muito estreita (bandas de localização), enquanto que o restante do corpo se comporta de forma elástica. Além disso, a cinemática do problema é modificada, de modo que a deformação passa a ser calculada a partir do alongamento do elemento. Neste sentido, tem-se uma hipótese de equivalência em alongamentos em substituição à hipótese clássica de hipótese de equivalência em deformações (Lemaitre e Chaboche, 1985). Estas hipóteses contornam o problema de dependência de malha decorrente da localização de deformações, conforme apresentado em Picón et al. (2021).

#### 3.1 MDC em meios uniaxiais

A supracitada hipótese de equivalência em alongamentos pode ser facilmente entendida a partir da análise de um elemento uniaxial (Fig. 1.a), sendo definida como:

$$\delta = \delta^e + \delta^d \quad (8)$$

Em que  $\delta^e$  e  $\delta^d$  são o alongamento elástico e devido à danificação, respectivamente, e  $\delta$  o alongamento total, que pode ser calculado por:

$$\delta = [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [\mathbf{b}^0] \{U\} \quad (9)$$

Sendo  $u_i$  e  $u_j$  os deslocamentos dos nós  $i$  e  $j$ , respectivamente, e  $[\mathbf{b}^0]$  a matriz de transformação cinemática do elemento.

Para o mesmo problema, o vetor de forças internas é:

$$\{Q\} = A[\mathbf{b}^0]^T \sigma \quad (10)$$

Sendo  $A$  a área da seção transversal e  $\sigma$  a tensão normal no elemento.

O alongamento devido à danificação  $\delta^d$  é nulo inicialmente e atualizado no decorrer da análise de acordo com o critério adotado, sendo neste trabalho adotada a lei de dano apresentada na equação (11), com comportamento apresentado na Figura (1.b) e (1.c) (Teles, 2022).

$$g = \sigma - \sigma_{cr} \exp(q\delta^d) \quad (11)$$

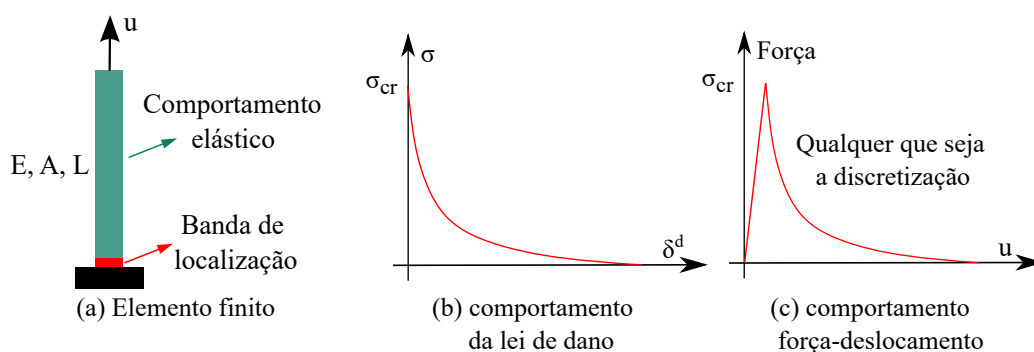


Figura 1: Elemento finito de barra da mecânica do dano concentrado.

As equações anteriormente apresentadas são utilizadas para resolver o problema a partir do MEF convencional, que utiliza deslocamentos como variável cinemática. Para resolver o

problema utilizando MEFP, torna-se necessário reescrever os alongamentos em função das coordenadas final e inicial do elemento. Assim, a equação (9) é reescrita como:

$$\delta = \left( [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} \right) - \left( [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} \right) = [\mathbf{b}^Y] \{Y\} - [\mathbf{b}^X] \{X\} = L_Y - L_X \quad (12)$$

Sendo  $y_i$ ,  $y_j$ ,  $x_i$  e  $x_j$  as coordenadas finais e iniciais dos nós  $i$  e  $j$ , respectivamente,  $[\mathbf{b}^Y]$  e  $[\mathbf{b}^X]$  as matrizes de transformação cinemática do elemento para as coordenadas finais e iniciais, respectivamente, e  $L_X$  e  $L_Y$  o comprimento do elemento na configuração inicial e ao final da análise.

### 3.2 MDC em meios bidimensionais

A expansão dos conceitos da MDC para meios bidimensionais foi realizada inicialmente por Amorim et al. (2018), dando início a chamada MCDX. Utilizou-se como base o elemento finito quadrilateral com 4 nós e a medida de deformação linear. No presente trabalho, para utilizar o MEFP, a medida de deformação utilizada é a de Green-Lagrange, calculada em qualquer ponto interno do sólido em função das coordenadas absolutas como:

$$\{\mathbb{E}\} = [\mathbf{B}](\{Y\} - \{X\}) \quad (13)$$

Sendo  $\{Y\}$  e  $\{X\}$  os vetores que contém as coordenadas finais e iniciais do elemento, respectivamente, e  $[\mathbf{B}]$  a matriz de transformação do elemento, que contém relações entre as derivadas das funções de forma. Mais detalhes a respeito desta podem ser vistos em Vaz (2011).

Ao utilizar como base este elemento finito, Amorim et al. (2018) propôs que o campo de deformações pudesse ser calculado em função dos alongamentos de uma treliça equivalente composta por 5 barras denominadas *numexes* (Fig. 2.a).

O vetor que armazena os alongamentos dos *numexes* é definido como:

$$\{\delta\}^t = [\delta_{ij}, \delta_{ik}, \delta_{il}, \delta_{jk}, \delta_{lk}] \quad (14)$$

Similar ao apresentado na equação (12), os alongamentos dos 5 *numexes* podem ser calculados como:

$$\{\delta\} = [\mathbf{b}^Y] \{Y\} - [\mathbf{b}^X] \{X\} = \{\lambda^Y\} - \{\lambda^X\} \quad (15)$$

As matrizes de transformação cinemática da MDCX são definidas, de forma genérica, como:

$$[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} -c_{ij} & -s_{ij} & c_{ij} & s_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{ik} & -s_{ik} & 0 & 0 & c_{ik} & c_{ik} & 0 & 0 \\ -c_{il} & -s_{il} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{il} & s_{il} \\ 0 & 0 & -c_{jk} & -s_{jk} & c_{jk} & s_{jk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{lk} & s_{lk} & -c_{lk} & -s_{lk} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Sendo  $c_{ij}$  e  $s_{ij}$  os valores do cosseno e seno do ângulo formado pelo segmento  $ij$  com o eixo horizontal, e assim sucessivamente para os demais *numexes*. Para calcular a matriz de transformação cinemática  $[\mathbf{b}^X]$  utiliza-se os ângulos calculados na configuração inicial, e para  $[\mathbf{b}^Y]$  utiliza-se os valores na configuração atual.

Assim, as grandezas utilizadas para calcular os *numexes*, são também utilizadas para calcular o campo de deformações:

$$\{\mathbb{E}\} = [\mathbf{T}^Y] \{\lambda^Y\} - [\mathbf{T}^X] \{\lambda^X\} \quad (17)$$

Em que  $[\mathbf{T}^Y]$  e  $[\mathbf{T}^X]$  são as matrizes de transformação dos *numexes*, calculadas a partir da relação entre as equações (13) e (17), que resultam:

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}] &= [\mathbf{T}^Y][\mathbf{b}^Y] \\ [\mathbf{B}] &= [\mathbf{T}^X][\mathbf{b}^X] \end{aligned} \quad (18)$$

Para computar os efeitos da danificação do material, são inseridas quatro bandas de localização, nas arestas do elemento quadrilateral (Fig. 2.b e 2.c), conforme proposto por Amorim et al. (2018), sendo  $e_i^{ij}$  a espessura da banda  $ij$  no nó  $i$ . Estas espessuras de banda são utilizadas para calcular o alongamento devido à danificação:

$$\{\delta^d\} = [\mathbf{b}^Y] \begin{Bmatrix} s_{ij}e_i^{ij} - s_{il}e_i^{il} \\ -c_{ij}e_i^{ij} + c_{il}e_i^{il} \\ s_{ij}e_j^{ij} + s_{jk}e_j^{jk} \\ -c_{ij}e_j^{ij} - c_{jk}e_j^{jk} \\ s_{jk}e_k^{jk} - s_{lk}e_k^{lk} \\ -c_{jk}e_k^{jk} + c_{lk}e_k^{lk} \\ -s_{il}e_l^{il} - s_{lk}e_l^{lk} \\ c_{il}e_l^{il} + c_{lk}e_l^{lk} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

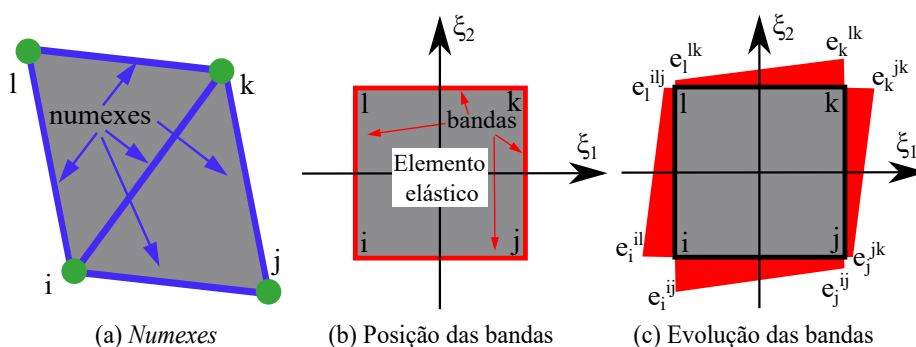


Figura 2: Elemento finito da MDCX (a), representação das bandas de localização (b) e (c) (adaptado de Amorim et al. (2018)).

Assim, a lei constitutiva apresentada na equação (2), considerando a deformação de Green calculada a partir da equação (17) e o alongamento devido à danificação (19), pode ser reescrita como:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : ([\mathbf{T}^Y] \{\lambda^Y\} - [\mathbf{T}^X] \{\lambda^X\} - [\mathbf{T}^Y] \{\delta^d\}) \quad (20)$$

Para controlar o crescimento de cada banda de localização em cada nó, é utilizada a mesma lei de dano apresentada na equação (11):

$$g_i^{ij} = \sigma_i^{ij} - \sigma_{cr_i}^{ij} \exp(qe_i^{ij}) \leq 0; \quad g_j^{ij} = \sigma_j^{ij} - \sigma_{cr_j}^{ij} \exp(qe_j^{ij}) \leq 0 \quad (21)$$

Sendo  $\sigma_i^{ij}$  e  $\sigma_j^{ij}$  as tensões de Cauchy na direção perpendicular à banda  $ij$  nos nós  $i$  e  $j$ , respectivamente,  $\sigma_{cr_i}^{ij}$  e  $\sigma_{cr_j}^{ij}$  as tensões críticas nos nós  $i$  e  $j$  da banda  $ij$ , respectivamente, e  $q$  um parâmetro do material. A mesma equação é utilizada para as demais bandas de localização.

## 4 RESULTADOS

### 4.1 Pilar com carga excêntrica

Avalia-se um clássico problema da análise não-linear geométrica de estruturas, conhecido como linha elástica de Euler, em que um pilar esbelto é submetido a uma carga excêntrica. O problema é originalmente apresentado em Fujii (1983) e posteriormente em Simo et al. (1984).

A geometria e as condições de contorno do problema são apresentadas na Figura 3.a. O módulo de elasticidade adotado foi de 210 GPa, enquanto que o coeficiente de Poisson foi adotado como nulo. O pilar está submetido a um carregamento de 37100 kN, aplicado em 300 passos de carga em uma malha que contém 300 elementos. Além disso, é considerado estado plano de tensões com espessura unitária (1 m).

Ressalta-se que este é um exemplo elástico, utilizado para validar a mudança na cinemática da formulação, na qual as deformações passam a ser calculadas a partir do alongamento dos *numexes*. Para realizar tal validação, o mesmo exemplo foi analisado no *software Ansys (2022)*, utilizando-se o elemento finito PLANE182, que corresponde ao elemento quadrilateral com 4 nós, uma malha com 291 elementos e o mesmo número de passos de carga.

A comparação entre a resposta numérica e a configuração deformada do pilar obtidas pelo presente trabalho e pelo *software Ansys (2022)* são observadas nas figuras 3.b-d. Estes resultados validam a mudança na cinemática da formulação e a implementação realizada, de modo a representar com boa acurácia a não linearidade geométrica de sólidos homogêneos.

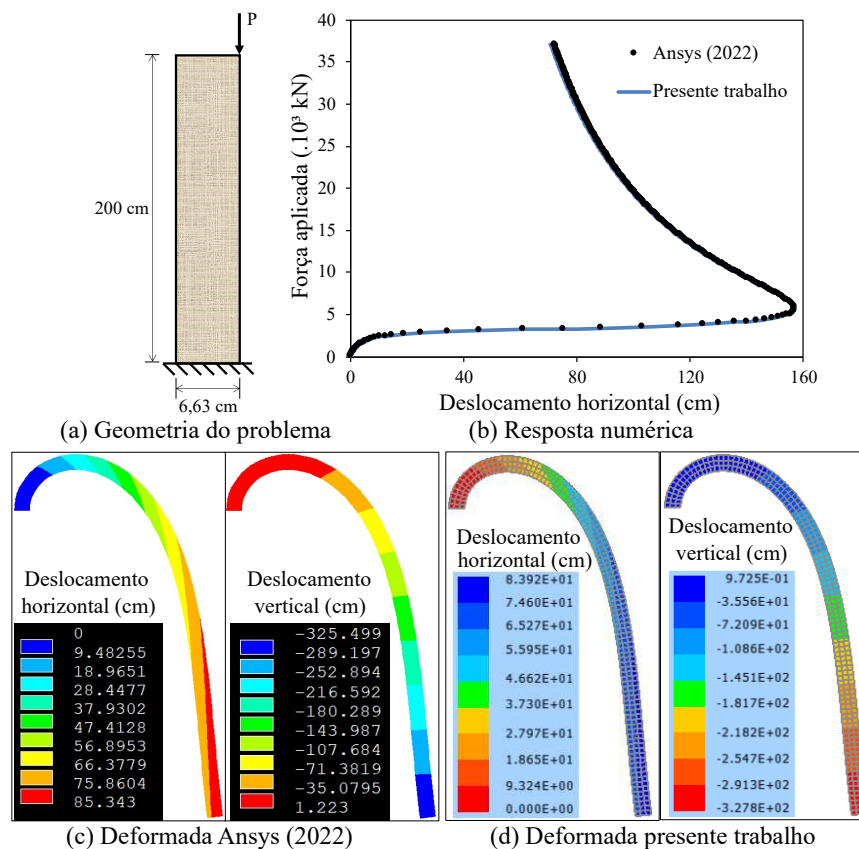


Figura 3: Problema linha elástica de Euler.

## 4.2 Chapa em L

Neste exemplo é avaliada uma chapa em L submetida a um deslocamento imposto aplicado à 30 mm da extremidade (Fig. 4). Este problema foi avaliado experimentalmente em [Winkler et al. \(2001\)](#), em que o material utilizado era concreto com resistência à compressão de 31 N/mm<sup>2</sup>, resistência à tração de 2,7 N/mm<sup>2</sup>, módulo de elasticidade de 25850 N/mm<sup>2</sup> e coeficiente de Poisson de 0,18.

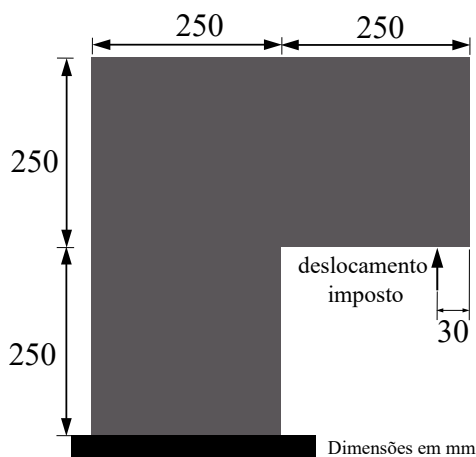


Figura 4: Chapa em L (adaptado de [Winkler et al. \(2001\)](#)).

Para realizar as simulações, adotou-se módulo de elasticidade de 20000 N/mm<sup>2</sup>, tensão crítica igual à resistência à tração experimental, coeficiente de Poisson também igual ao experimental, e parâmetro  $q$  de  $-25 \text{ mm}^{-1}$ . Foi aplicado deslocamento de 1 mm em 500 passos, em duas malhas com 568 e 732 elementos.

A comparação entre a resposta experimental e numérica é apresentada na Figura 5.a. Nota-se que o modelo numérico apresenta boa acurácia na predição do comportamento do material, inclusive na fase de amolecimento. Na Figura 5.b são apresentadas as bandas de localização com valores não-nulos ao final da análise com a malha de 768 elementos, explicitando uma região de falha do problema em concordância com a apresentada em [Winkler et al. \(2001\)](#).

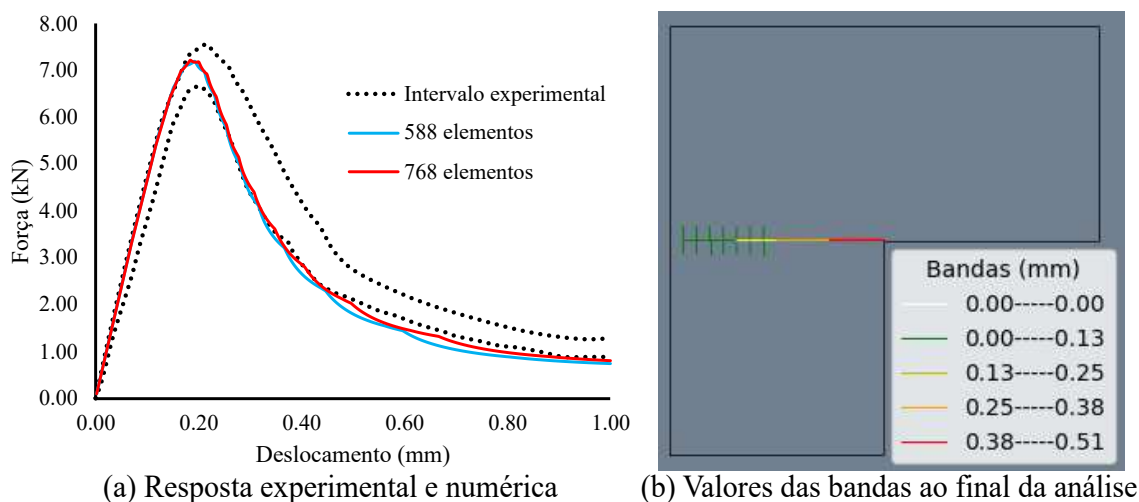


Figura 5: Resultados chapa em L.



## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentadas as adaptações necessárias para utilizar a MDCX em um método numérico que apresenta formulação geometricamente exata, o MEFP. A formulação foi aplicada, sem dano, inicialmente em um problema elástico com forte não linearidade geométrica, validando as adaptações na cinemática da formulação.

Além disso, foi analisado um problema que apresenta não-linearidade física com resultados experimentais. Neste, foi possível avaliar o comportamento do modelo na fase de amolecimento, em que os resultados mostram a boa acurácia na predição do comportamento do material utilizando uma lei de dano exponencial.

## AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro durante seu curso de doutorado. O terceiro autor agradece à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, projeto numero 2022/03377-7, pelo apoio.

## REFERÊNCIAS

- Amorim D.L., Piedade Neto D., Proença S.P., e Flórez-López J. The extended lumped damage mechanics: A new formulation for the analysis of softening with fe size-independence. *Mechanics Research Communications*, 2018.
- Amorim D.L.d.F., Proença S.P., e Flórez-López J. A model of fracture in reinforced concrete arches based on lumped damage mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 50:4070–4079, 2013.
- Amorim D.L.d.F., Proença S.P., e Flórez-López J. Simplified modeling of cracking in concrete: Application in tunnel linings. *Engineering Structures*, 70, 2014.
- Ansys. Ansys® mechanical enterprise academic student. *Release 2022 R2*, 2022.
- Bai Y., Guan S., e Flórez-López J. Development of a damage model for assessing fracture failure of steel beam-to-column connections subjected to extremely low-cycle fatigue. *Engineering Failure Analysis*, 82:823–834, 2017.
- Bai Y., Kurata M., Flórez-López J., e Nakashima M. Macromodeling of crack damage in steel beams subjected to nonstationary low cycle fatigue. *Journal of Structural Engineering*, 142:04016076, 2016.
- Bonet J., Wood R.D., Mahaney J., e Heywood P. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:579–595, 2000.
- Brito T.I.d.J., Santos D.M., Santos F.A.S., Cunha R.N., e Amorim D.L.N.d.F. On the lumped damage modelling of reinforced concrete beams and arches. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 14:1–20, 2020.
- Broek D. *Elementary engineering fracture mechanics*. Martinus Nijhoff, 1 edição, 1974.
- Cipollina A., López-Inojosa A., e Flórez-López J. A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. *Computers & Structures*, 54, 1995.
- Coda H.B. e Greco M. A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:3541–3557, 2004.
- Coda H.B. e Paccola R.R. An alternative positional fem formulation for geometrically nonlinear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. *Computational Mecha-*

- nics*, 40:185–200, 2007.
- Coda H.B. e Paccola R.R. A positional fem formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 5:205–223, 2008.
- Coelho K.O., Leonel E.D., e Flórez-López J. An efficient mechanical-probabilistic approach for the collapse modelling of rc structures. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, 12:386–397, 2019.
- Flórez-López J. Modelos de daño concentrados para la simulación numérica del colapso de pórticos planos. *Revista Internacional de Metodos Numericos para Calculo y Diseno en Ingenieria*, 9:123–139, 1993.
- Fujii F. A simple mixed formulation for elastica problems. *Computers & Structures*, 17:79–88, 1983.
- Greco M., Gesualdo F.A., Venturini W.S., e Coda H.B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42:1079–1086, 2006.
- Lemaitre J. e Chaboche J.L. *Mécaniques des matériaux solides*. 1985.
- Oliveira J.M.J., Vieira C.S., Silva M.F.A., e Amorim D.L.N.F. Fracture modelling of steel fibre reinforced concrete structures by the lumped damage mechanics: Application in precast tunnel segments. *Engineering Structures*, 278:115487, 2023.
- Oliveira M.C., Teles D.V.d.C., e Amorim D.L.N.d.F. Shear behaviour of reinforced concrete beams under impact loads by the lumped damage framework. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 14:13–25, 2020.
- Perdomo M.E., Ramírez A., e Flórez-López J. Simulation of damage in rc frames with variable axial forces. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 28:311–328, 1999.
- Picón R.A., Santos D.M., Teles D.V., Amorim D.L., Zhou X., Bai Y., Proença S.P., e Flórez-López J. Modeling of localization using nash variational formulations: The extended damage mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 258:108083, 2021.
- Sanches R.A.K. e Coda H.B. On fluid–shell coupling using an arbitrary lagrangian–eulerian fluid solver coupled to a positional lagrangian shell solver. *Applied Mathematical Modelling*, 38:3401–3418, 2014.
- Shabana A. Definition of the slopes and the finite element absolute nodal coordinate formulation. *Multibody System Dynamics*, 1:339–348, 1997.
- Simo J.C., Hjelmstad K.D., e Taylor R.L. Numerical formulations of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 42:301–330, 1984.
- Teles D.V., Oliveira M.C., e Amorim D.L. A simplified lumped damage model for reinforced concrete beams under impact loads. *Engineering Structures*, 205, 2020.
- Teles D.V.C. Mecânica do dano concentrado para meios bidimensionais: formulação para modo I com lei de dano não linear. 107 p. *Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Sergipe*, 2022.
- Teles D.V.d.C., Cunha R.N., Amorim D.L.N.d.F., Picón R., e Flórez-López J. Parametric study of dynamic behaviour of rc dual system design with the brazilian standard code using the lumped damage model. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 43:246, 2021.
- Vaz L.E. *Método dos elementos finitos em análise de estruturas*. Elsevier, 2011.
- Winkler B., Hofstetter G., e Niederwanger G. Experimental verification of a constitutive model for concrete cracking. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, 215:75–86, 2001.