

EMBUTIMENTO DE FIBRAS EM ELEMENTO DE SÓLIDO BIDIMENSIONAL DA MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO

FIBERS EMBEDDING IN SOLID ELEMENT OF LUMPED DAMAGE MECHANICS

Daniel V. C. Teles^a, David L. N. F. Amorim^{a,b,c} e Edson D. Leonel^a

^a*Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Avenida Trabalhador São-Carlense, 400, São Carlos, Brasil, danielvcteles@usp.br, <https://ppgset.eesc.usp.br/>*

^b*Laboratório de Modelagem Matemática em Engenharia Civil, Universidade Federal de Sergipe, Avenida Marcelo Déda Chagas s/n, São Cristóvão-SE, Brasil, davidnf@academico.ufs.br, <http://www.ipd.ufs.br>*

^c*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Campus A. C. Simões, Maceió, Brasil, davidnf@academico.ufs.br, <https://ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgec/>*

Palavras-chave: Mecânica do dano concentrado, método dos elementos finitos, embutimento de fibras, abordagem geometricamente exata.

Resumo. O embutimento de fibras em meios sólidos permite a representação e modelagem de diversos materiais compósitos utilizados na engenharia. Neste trabalho, estas fibras são descritas como elementos unidimensionais e utiliza-se uma técnica que não acrescenta graus de liberdade ao problema, permitindo a simulação de materiais compósitos sem grande aumento no custo computacional. A consideração de não-linearidade física no sólido é abordada neste trabalho a partir dos conceitos da Mecânica do Dano Concentrado aplicados em meios bidimensionais, que já apresentou resultados objetivos em trabalhos anteriores. Além disso, utiliza-se o método dos elementos finitos baseado em posições como método numérico para solução do problema, cuja formulação é geometricamente exata e apresenta fácil implementação computacional.

Keywords: Lumped damage mechanics, finite element method, fibbers embedding, geometrically exact approach.

Abstract. The fibbers embedding in solids enables the representation and modelling of several composite materials utilised in engineering field. In this work, the fibbers are described as one-dimensional elements. This approach does not increase the number of degrees of freedom and allows the modelling of composite materials without a large computational effort. The lumped damage mechanics concepts describe the material nonlinearity herein, which have already demonstrated objective results and accuracy in previous works. In addition, it is used the finite element method based on position as numerical method. Its formulation is geometrically exact and solves the problem within an easy computational implementation.

1 INTRODUÇÃO

A formulação de modelos matemáticos que descrevem o comportamento mecânico de sólidos e estruturas apresenta soluções analíticas limitadas a um pequeno conjunto de exemplos com restritas condições de contorno e considerações de comportamento material. Estas restrições, por vezes, não são suficientes para representar adequadamente o comportamento mecânico de materiais e estruturas reais, sendo necessário o desenvolvimento de métodos numéricos para solução destas formulações. Neste sentido, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma das técnicas mais utilizadas para análise de problemas de engenharia, em que a partir da discretização do domínio do problema em elementos finitos, conectados entre si através de nós, e a partir da aplicação de condições de contorno e equilíbrio, é possível obter a solução do problema.

Uma abordagem do MEF que apresenta formulação geometricamente exata é o Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP), que foi proposto por [Coda e Greco \(2004\)](#). Nesta formulação, o equilíbrio é realizado na configuração atual e calculado em função da posição dos nós. [Shabana \(1997\)](#) e [Bonet et al. \(2000\)](#) propuseram abordagens similares. Ainda, a abordagem foi desenvolvida para análise de trelicas espaciais ([Greco et al., 2006](#)), elementos de casca ([Coda e Paccola, 2007, 2008](#)), interação fluido-estrutura ([Sanches e Coda, 2014](#)), dentre outros problemas. A fim de representar materiais compósitos, [Vanalli et al. \(2007\)](#) apresentaram uma técnica que permite representar fibras elásticas com aderência perfeita sem acrescentar graus de liberdade ao problema utilizando MEF convencional. Posteriormente, [Sampaio et al. \(2013\)](#) estenderam o trabalho para o MEFP.

A teoria da plasticidade, a mecânica da fratura e a mecânica do dano formam a base das abordagens utilizadas para análise de fenômenos fisicamente não-lineares. A plasticidade é uma teoria que descreve o comportamento de materiais que apresentam deformações permanentes, tendo surgido justamente a partir da observação deste fenômeno e do encruamento em materiais dúcteis. A mecânica da fratura, por sua vez, descreve a deterioração material a partir da propagação de discontinuidades discretas, tendo surgido a partir da observação de falhas catastróficas em materiais frágeis ([Broek, 1974](#)). A mecânica do dano, por fim, descreve a degradação material a partir da introdução de uma variável interna de dano ([Lemaitre e Chaboche, 1985](#)), sendo utilizada para representar materiais que apresentam comportamento dúctil e frágil.

Outra abordagem para a consideração da não-linearidade material é a Mecânica do Dano Concentrado (MDC), que foi proposta por [Flórez-López \(1993\)](#) para análise de pórticos, aplicando conceitos da mecânica da fratura e do dano clássica em rótulas plásticas. A teoria foi desenvolvida posteriormente de modo a permitir a análise de outros problemas de engenharia, como a análise sísmicas de pórticos ([Cipollina et al., 1995](#); [Perdomo et al., 1999](#); [Teles et al., 2021](#)), vigas e túneis de concreto simples ([Amorim et al., 2014](#)), arcos de concreto armado ([Amorim et al., 2013](#); [Brito et al., 2020](#)), pórticos metálicos ([Bai et al., 2016, 2017](#)), vigas de concreto armado sujeitas à cargas de impacto ([Oliveira et al., 2020](#); [Teles et al., 2020](#)), corrosão ([Coelho et al., 2019](#)), segmentos de túneis de concreto com fibras ([Oliveira et al., 2023](#)), entre outros. Mais recentemente, a MDC foi expandida com resultados satisfatórios para meios bidimensionais em [Amorim et al. \(2018\)](#) e [Picón et al. \(2021\)](#), dando início à Mecânica do Dano Concentrado Expandida (MDCX).

Neste sentido, o objetivo deste trabalho é implementar a técnica de embutimento de fibras no elemento finito da MDCX adaptado para utilização do MEFP, permitindo a representação de fenômenos geometricamente e fisicamente não lineares em materiais compósitos, que são amplamente utilizados na engenharia, sem grande aumento no custo computacional.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS BASEADO EM POSIÇÕES

A formulação do método é apresentado inicialmente em [Coda e Greco \(2004\)](#), na qual o equilíbrio é realizado na configuração atual e calculado em função da posição dos nós:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_i} + \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i} = \int_{\Omega} \mathbf{S} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_i} d\Omega - F_i^{ext} = F_i^{int} - F_i^{ext} = r_i \quad (1)$$

Sendo Π a energia potencial total, \mathbb{U} a energia de deformação, \mathbb{P} a energia potencial das forças externas, \mathbf{S} o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie, \mathbb{E} o tensor de deformações de Green, F_i^{ext} as forças externas (conservativas) e F_i^{int} as forças internas. Ainda, utilizou-se na parcela de energia de deformação o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK):

$$u_e(\mathbb{E}) = \frac{1}{2} \mathbb{E} : \mathbf{C} : \mathbb{E} \Rightarrow \mathbf{S} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbb{E}} = \mathbf{C} : \mathbb{E} \quad (2)$$

Sendo \mathbf{C} o tensor constitutivo elástico de quarta ordem.

Uma vez que o equilíbrio dado pela equação (1) é não-linear e as posições nodais atuais são desconhecidas, o sistema é resolvido iterativamente pelo método de Newton-Raphson, e em cada iteração tem-se o vetor resíduo, que expandido em série de Taylor e desprezando os termos de ordem superior, resulta:

$$r_i(Y) = r_i(Y^0) + \left. \frac{\partial r_i}{\partial Y_k} \right|_{Y^0} \Delta Y_k = 0_i \Rightarrow \Delta Y_k = - \left(\left. \frac{\partial r_i}{\partial Y_k} \right|_{Y^0} \right)^{-1} r_i(Y^0) \quad (3)$$

Sendo Y a posição atual (solução do sistema), Y^0 a posição tentativa e ΔY_k a correção aplicada à posição tentativa.

A matriz de rigidez tangente, dada pela derivada do resíduo e considerando forças externas conservativas, é:

$$\left. \frac{\partial r_i}{\partial Y_k} \right|_{Y^0} = \left. \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_k \partial Y_i} \right|_{Y^0} \quad (4)$$

2.1 Embutimento de fibras

A técnica utilizada neste trabalho para representar as fibras foi apresentada em [Vanalli et al. \(2007\)](#) utilizando o MEF e estendida para o MEFP por [Sampaio et al. \(2013\)](#). A técnica não acrescenta graus de liberdade ao problema e não necessita que os nós das fibras coincidam com os nós dos sólidos. A ideia é escrever as posições nodais das fibras em função das posições nodais do sólido, e assim computar as contribuições de força interna e matriz de rigidez tangente. Neste sentido, as posições nodais das fibras são escritas como:

$$X_i^p = \phi_l(\xi_1^p, \xi_2^p) X_{li} \quad (5)$$

Sendo ξ_1^p e ξ_2^p as coordenadas adimensionais do nó da fibra definidas no domínio do sólido (incógnitas da equação), ϕ_l as funções de forma do sólido, X_{li} as coordenadas dos nós do sólido no qual o nó p da fibra de coordenadas X_i^p está inserida e i e l os índices que denotam a direção e número do nó do sólido. A mesma equação é válida para determinar as posições atuais dos nós das fibras Y_i^p .

Reescrevendo a equação 5 em forma de série de Taylor e desprezando os termos de ordem superior, tem-se:

$$X_i^p = \phi_l(\xi_1^{pt}, \xi_2^{pt})X_{li} + \left. \frac{\partial \phi_l(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_j} \right|_{(\xi_1^{pt}, \xi_2^{pt})} \Delta \xi_j \Rightarrow X_i^p - X_i^{pt} = H_{ij} \Delta \xi_j \quad (6)$$

Em que o sobrescrito *pt* denota a posição tentativa para solução do sistema, $\Delta \xi_j$ é a correção aplicada à posição tentativa.

Para calcular as contribuições de força interna e matriz de rigidez tangente do MEFP, é necessário realizar a diferenciação da energia de deformação em relação ao vetor de posições atuais, que resulta:

$$\frac{Y_i^p}{Y_{\beta\alpha}} = \frac{Y_{li}}{Y_{\beta\alpha}} \phi_l(\xi_1^p, \xi_2^p) = \delta_{\alpha i} \delta_{\beta l} \phi_l(\xi_1^p, \xi_2^p) = \delta_{\alpha i} \phi_\beta(\xi_1^p, \xi_2^p) \quad (7)$$

Sendo a equação não-nula apenas quando a direção α do sólido é igual à direção i da fibra.

Neste trabalho, utilizou-se para representar as fibras o elemento finito de barra simples, que é o elemento de treliça. Assim, calcula-se o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente do elemento exatamente conforme apresentado em [Greco et al. \(2006\)](#), e com a técnica de embutimento ([Sampaio et al., 2013](#)) distribui as contribuições para o vetor de forças internas e matriz de rigidez tangente do sólido ao qual a fibra está inserida.

3 MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO

Uma vasta revisão a respeito dos trabalhos da MDC pode ser encontrada em [Flórez-López et al. \(2015\)](#). De maneira sucinta, presume-se que os efeitos inelásticos estão concentrados em regiões muito estreitas, chamadas bandas de localização, e o restante do corpo permanece elástico. Além disso, é adotada a chamada hipótese de equivalência em alongamentos, que substitui a hipótese de equivalência em deformações ([Lemaitre e Chaboche, 1985](#)), uma vez que as deformações passam a ser calculadas a partir do alongamento do elemento. Estas considerações permitem superar o problema de dependência de malha decorrente da localização de deformações ([Picón et al., 2021](#)).

Os conceitos da MDC foram expandidos para meios bidimensionais em [Amorim et al. \(2018\)](#), dando início à MDCX, utilizando o elemento finito quadrilateral com 4 nós como base. A fim de expandir os conceitos para o MEFP, utiliza-se neste trabalho a medida de deformação de Green-Lagrange, que é dada por:

$$\{\mathbb{E}\} = [\mathbf{B}](\{Y\} - \{X\}) \quad (8)$$

Sendo $\{X\}$ e $\{Y\}$ os vetores que contém as coordenadas dos nós do elemento na configuração inicial e atual, respectivamente, e $[\mathbf{B}]$ a matriz de transformação do elemento.

Em seu trabalho, [Amorim et al. \(2018\)](#) propôs que o campo de deformações pudesse ser calculado em função dos alongamentos de cada um das 5 barras (denominadas *numexes*) de uma trelição equivalente (Fig. 1.a). O vetor que armazena estes *numexes* é:

$$\{\delta\}^t = [\delta_{ij}, \delta_{ik}, \delta_{il}, \delta_{jk}, \delta_{lk}] \quad (9)$$

Em [Amorim et al. \(2018\)](#) o vetor de *numexes* é calculado a partir dos deslocamentos, enquanto que neste trabalho para tornar possível a utilização do MEFP, calcula-se de forma exata em função das coordenadas inicial e final do elemento:

$$\{\delta\} = [\mathbf{b}^Y] \{Y\} - [\mathbf{b}^X] \{X\} = \{\lambda^Y\} - \{\lambda^X\} \quad (10)$$

Sendo $[\mathbf{b}^Y]$ e $[\mathbf{b}^X]$ as matrizes de transformação cinemática do elemento na configuração atual e inicial, respectivamente.

Assim, o campo de deformações pode ser calculado a partir das mesmas grandezas utilizadas no cálculo dos *numexes* como:

$$\{\mathbb{E}\} = [\mathbf{T}^Y] \{\lambda^Y\} - [\mathbf{T}^X] \{\lambda^X\} \tag{11}$$

Em que $[\mathbf{T}^Y]$ e $[\mathbf{T}^X]$ são as matrizes de transformação dos *numexes*, calculadas relacionando as equações (8) e (11), resultando:

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}] &= [\mathbf{T}^Y][\mathbf{b}^Y] \\ [\mathbf{B}] &= [\mathbf{T}^X][\mathbf{b}^X] \end{aligned} \tag{12}$$

Conforme proposto em Amorim et al. (2018), a fim de quantificar os efeitos da danificação, insere-se nas arestas do elemento 4 bandas de localização (Fig. 1.b). A espessura em cada um dos dois nós destas bandas é utilizada para calcular o alongamento dos *numexes* devido à danificação:

$$\{\delta^d\} = [\mathbf{b}^Y] \begin{Bmatrix} s_{ij}e_i^{ij} - s_{il}e_i^{il} \\ -c_{ij}e_i^{ij} + c_{il}e_i^{il} \\ s_{ij}e_j^{ij} + s_{jk}e_j^{jk} \\ -c_{ij}e_j^{ij} - c_{jk}e_j^{jk} \\ s_{jk}e_k^{jk} - s_{lk}e_k^{lk} \\ -c_{jk}e_k^{jk} + c_{lk}e_k^{lk} \\ -s_{il}e_l^{il} - s_{lk}e_l^{lk} \\ c_{il}e_l^{il} + c_{lk}e_l^{lk} \end{Bmatrix} \tag{13}$$

Em que e_i^{ij} é a espessura da banda ij no nó i , s_{ij} e c_{ij} são os valores do cosseno e seno do ângulo formado pelo segmento ij com o eixo horizontal, e assim sucessivamente para as demais bandas.

Adota-se para controlar o crescimento das bandas de localização a lei de dano apresentada na equação (14), com comportamento conforme a Figura 1.c (Teles, 2022).

$$g_i^{ij} = \sigma_i^{ij} - \sigma_{cr_i}^{ij} \exp(qe_i^{ij}) \leq 0; \quad g_j^{ij} = \sigma_j^{ij} - \sigma_{cr_j}^{ij} \exp(qe_j^{ij}) \leq 0 \tag{14}$$

Sendo σ_i^{ij} e σ_j^{ij} as tensões de Cauchy na direção perpendicular à banda ij nos nós i e j , respectivamente, $\sigma_{cr_i}^{ij}$ e $\sigma_{cr_j}^{ij}$ as tensões críticas nos nós i e j da banda ij , respectivamente, e q um parâmetro do material analisado. O mesmo critério é adotado para as demais bandas de localização.

Por fim, a lei constitutiva (Eq. 2) considerando a deformação de Green (Eq. 11) e a danificação (Eq. 13) é dada por:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : ([\mathbf{T}^Y] \{\lambda^Y\} - [\mathbf{T}^X] \{\lambda^X\} - [\mathbf{T}^Y] \{\delta^d\}) \tag{15}$$

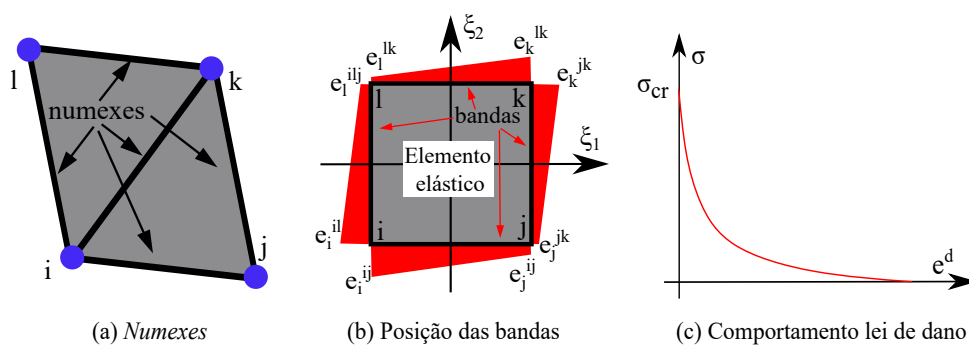


Figura 1: Elemento finito da MDCX.

4 RESULTADOS

4.1 Exemplo 1: validação fibras

Este exemplo trata de uma chapa quadrada com apoios deslizantes em duas das faces e submetida à deslocamento imposto uniformemente em 10 passos nas outras duas (Fig 2). Para o sólido, foi adotado um material com módulo de elasticidade de 2500 kN/cm² e coeficiente de Poisson nulo em regime elástico. Neste trabalho utilizou-se para o sólido uma malha com 400 elementos quadrados com aproximação linear e 441 nós, enquanto que Ramos (2020) utilizou uma malha com 200 elementos triangulares com aproximação cúbica e 961 nós.

Com relação às fibras embutidas, foram testadas três configurações: apenas fibras horizontais, fibras ortogonais e fibras aleatórias. Em todos os testes, foi mantida a mesma proporção volumétrica de 25,905 %. Neste sentido, em ambos os trabalhos, a primeira configuração contém 33 fibras longas discretizadas em 1320 elementos com área de seção transversal de 0,785 cm² e a segunda contém 66 fibras longas discretizadas em 2640 elementos com área de 0,3925 cm². A última contém 1320 fibras com comprimento de 5 cm e área de seção transversal 0,3925 cm² em Ramos (2020), e 660 fibras com comprimento de 5 cm e área de seção transversal 0,785 cm² neste trabalho. O material adotado para as fibras possui módulo de elasticidade de 21000 kN/cm².

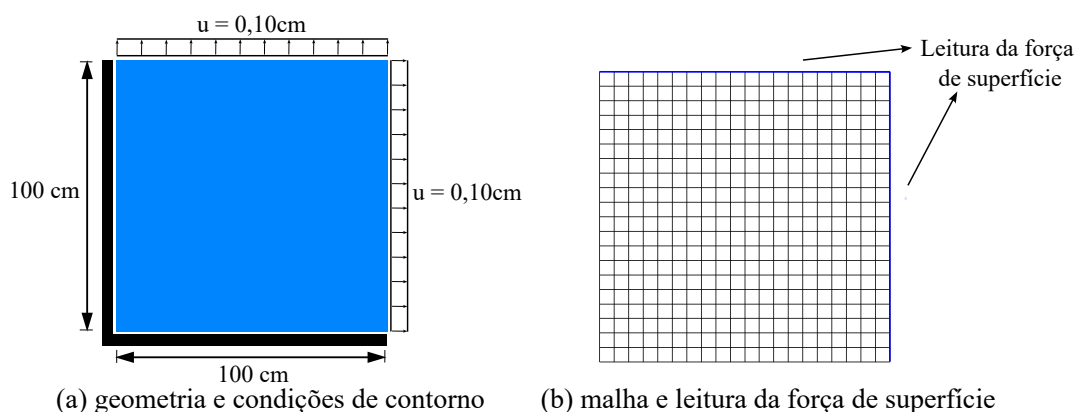


Figura 2: Exemplo quadrado com fibras (adaptado de Ramos (2020)).

Na figura 3.a é apresentada a situação deformada (com escala de 100x) da chapa sem fibras ao final da análise. Os deslocamentos horizontais do sólido sem fibras, das fibras horizontais, ortogonais e aleatórias podem ser vistos nas figuras 3.a-d. Os deslocamentos verticais apresentam a mesma distribuição e valores, mas evidentemente, na outra direção.

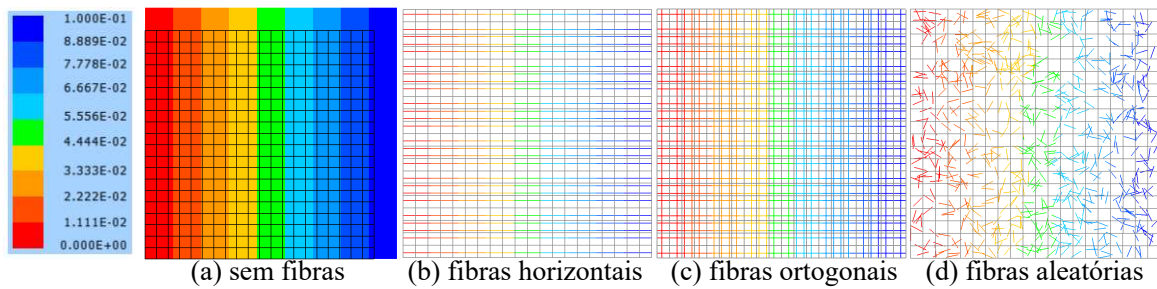


Figura 3: Deslocamento horizontal.

A tabela 1 apresenta a comparação entre os valores de força de superfície nas faces superior (vertical) e direita (horizontal). Observa-se que os resultados obtidos neste trabalho são muito próximos aos resultados obtidos por Ramos (2020), validando a implementação das fibras.

Disposição das fibras	Ramos (2020)		Este trabalho		Diferença %	
	Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical
Sem fibras	2,52	2,52	2,50	2,50	-0.48%	-0.48%
Fibras horizontais	7,96	2,52	7,95	2,50	-0.15%	-0.49%
Fibras 2 direções	5,24	5,24	5,23	5,23	-0.21%	-0.21%
Fibras aleatórias	4,64	4,58	4,55	4,55	-1.96%	-0.61%

Tabela 1: Comparação com o trabalho de Ramos (2020) da força de superfície obtida.

4.2 Exemplo 2: viga sob flexão de 4 pontos

Neste exemplo é avaliada a falha de uma viga de concreto armado biapoiada submetida à flexão de 4 pontos (Fig. 4.a), experimentalmente testada em Álvares (1993), com três configurações de armação longitudinal (Fig. 4.b-d). O módulo de elasticidade do concreto é 29,20 GPa, a resistência à tração é 2,04 MPa, o coeficiente de Poisson é 0,2, e o módulo de elasticidade do aço é 196 GPa. Para realizar as simulações, adotou-se o parâmetro q com valor de $-35,0 \text{ mm}^{-1}$.

Para o sólido bidimensional utilizou-se uma malha com 1248 elementos e a análise foi realizada em 500 passos. Para representar os estribos foram utilizados 256 elementos de fibra, enquanto que para as armaduras longitudinais foram utilizados 802, 1058 e 1314 elementos, respectivamente, para as vigas subarmada (Fig. 4.b), normalmente armada (Fig. 4.c) e superarmada (Fig. 4.d).

A figura 5a-c apresenta os resultados obtidos. É possível notar que a resposta numérica para as três configurações de armação estão contidas nos intervalos experimentais dados na referência. Além disso, é possível notar que as bandas estão localizadas em regiões esperadas para um problema desta natureza, validando assim a implementação da MDCX no MEF com fibras embutidas.

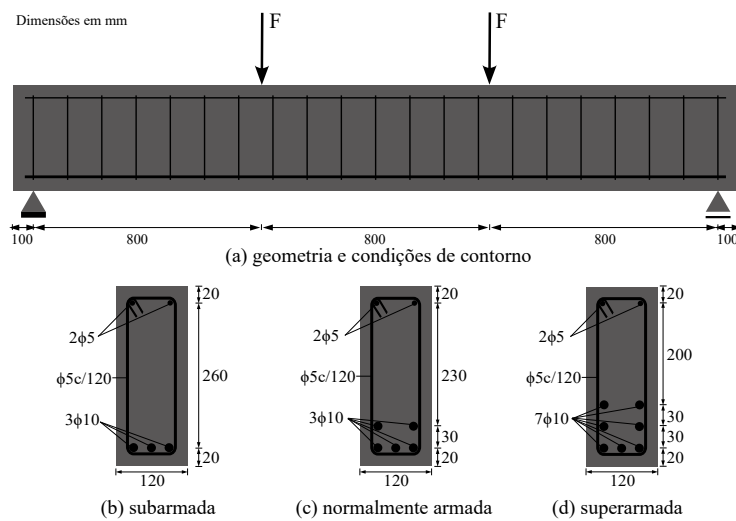


Figura 4: Esquema experimental (adaptado de Álvares (1993)).

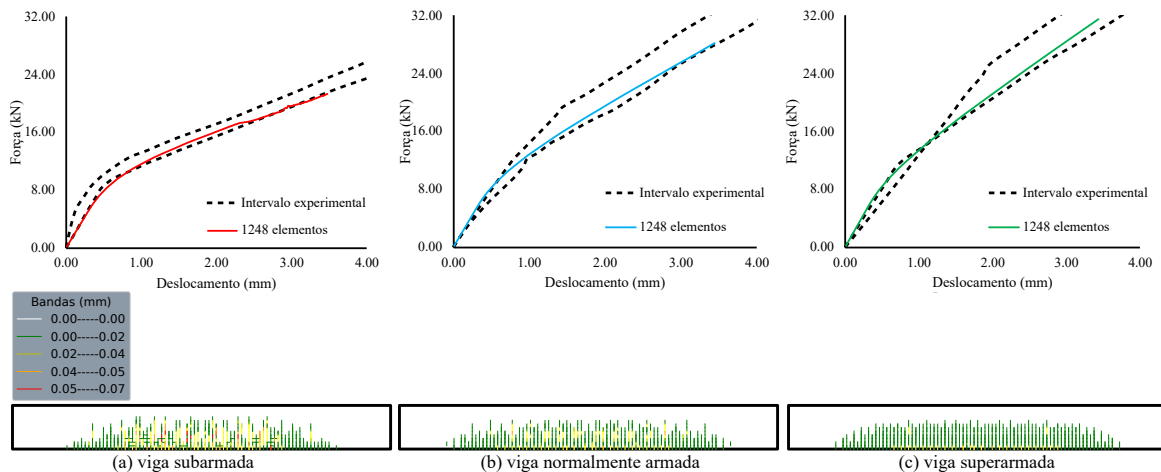


Figura 5: Valores de banda de localização e resposta numérica.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi implementada a técnica de embutimento de fibras no elemento finito da MDCX adaptado para utilização do MEF, permitindo a representação de fenômenos geometricamente e fisicamente não lineares em materiais compósitos, que são amplamente utilizados na engenharia. A técnica utilizada permite representar fibras elásticas com aderência perfeita e não apresenta acréscimo relevante no custo computacional, uma vez que não acrescenta graus de liberdade ao problema.

A implementação da técnica de embutimento foi validada a partir da comparação com um exemplo da literatura técnica, em que tanto o sólido quanto as fibras apresentam comportamento elástico. Além disso, para validar a implementação da MDCX no MEF com fibras embutidas, foi simulada uma viga de concreto armado biapoiada submetida à flexão de 4 pontos, cujos resultados numéricos obtidos estão contidos nos intervalos experimentais e a região mais danificada também reflete o comportamento experimental.

AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro durante seu curso de doutorado. O terceiro autor agradece à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, projeto numero 2022/03377-7, pelo apoio.

REFERÊNCIAS

- Amorim D.L., Piedade Neto D., Proença S.P., e Flórez-López J. The extended lumped damage mechanics: A new formulation for the analysis of softening with fe size-independence. *Mechanics Research Communications*, 2018.
- Amorim D.L.d.F., Proença S.P., e Flórez-López J. A model of fracture in reinforced concrete arches based on lumped damage mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 50:4070–4079, 2013.
- Amorim D.L.d.F., Proença S.P., e Flórez-López J. Simplified modeling of cracking in concrete: Application in tunnel linings. *Engineering Structures*, 70, 2014.
- Bai Y., Guan S., e Flórez-López J. Development of a damage model for assessing fracture failure of steel beam-to-column connections subjected to extremely low-cycle fatigue. *Engineering Failure Analysis*, 82:823–834, 2017.
- Bai Y., Kurata M., Flórez-López J., e Nakashima M. Macromodeling of crack damage in steel beams subjected to nonstationary low cycle fatigue. *Journal of Structural Engineering*, 142:04016076, 2016.
- Bonet J., Wood R.D., Mahaney J., e Heywood P. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:579–595, 2000.
- Brito T.I.d.J., Santos D.M., Santos F.A.S., Cunha R.N., e Amorim D.L.N.d.F. On the lumped damage modelling of reinforced concrete beams and arches. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 14:1–20, 2020.
- Broek D. *Elementary engineering fracture mechanics*. Martinus Nijhoff, 1 edição, 1974.
- Cipollina A., López-Inojosa A., e Flórez-López J. A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. *Computers & Structures*, 54, 1995.
- Coda H.B. e Greco M. A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:3541–3557, 2004.
- Coda H.B. e Paccola R.R. An alternative positional fem formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, 40:185–200, 2007.
- Coda H.B. e Paccola R.R. A positional fem formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 5:205–223, 2008.
- Coelho K.O., Leonel E.D., e Flórez-López J. An efficient mechanical-probabilistic approach for the collapse modelling of rc structures. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, 12:386–397, 2019.
- Flórez-López J. Modelos de daño concentrados para la simulación numérica del colapso de pórticos planos. *Revista Internacional de Metodos Numericos para Calculo y Diseno en Ingenieria*, 9:123–139, 1993.
- Flórez-López J., Marante M.E., e Picón R. *Fracture and Damage Mechanics for Structural Engineering of Frames: State-of-the-Art Industrial Application*. IGI Global, Hershey, 2015.

- Greco M., Gesualdo F.A., Venturini W.S., e Coda H.B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42:1079–1086, 2006.
- Lemaitre J. e Chaboche J.L. *Mécaniques des matériaux solides*. 1985.
- Oliveira J.M.J., Vieira C.S., Silva M.F.A., e Amorim D.L.N.F. Fracture modelling of steel fibre reinforced concrete structures by the lumped damage mechanics: Application in precast tunnel segments. *Engineering Structures*, 278:115487, 2023.
- Oliveira M.C., Teles D.V.d.C., e Amorim D.L.N.d.F. Shear behaviour of reinforced concrete beams under impact loads by the lumped damage framework. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 14:13–25, 2020.
- Perdomo M.E., Ramírez A., e Flórez-López J. Simulation of damage in rc frames with variable axial forces. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 28:311–328, 1999.
- Picón R.A., Santos D.M., Teles D.V., Amorim D.L., Zhou X., Bai Y., Proença S.P., e Flórez-López J. Modeling of localization using nash variational formulations: The extended damage mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 258:108083, 2021.
- Ramos E.S. Modelagem numérica da propagação da corrosão por cloretos em estruturas de concreto armado. 245 p. *Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo*, 2020.
- Sampaio M.S., Paccola R.R., e Coda H.B. Fully adherent fiber–matrix fem formulation for geometrically nonlinear 2d solid analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 66:12–25, 2013.
- Sanches R.A.K. e Coda H.B. On fluid–shell coupling using an arbitrary lagrangian–eulerian fluid solver coupled to a positional lagrangian shell solver. *Applied Mathematical Modelling*, 38:3401–3418, 2014.
- Shabana A. Definition of the slopes and the finite element absolute nodal coordinate formulation. *Multibody System Dynamics*, 1:339–348, 1997.
- Teles D.V., Oliveira M.C., e Amorim D.L. A simplified lumped damage model for reinforced concrete beams under impact loads. *Engineering Structures*, 205, 2020.
- Teles D.V.C. Mecânica do dano concentrado para meios bidimensionais: formulação para modo I com lei de dano não linear. 107 p. *Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Sergipe*, 2022.
- Teles D.V.d.C., Cunha R.N., Amorim D.L.N.d.F., Picón R., e Flórez-López J. Parametric study of dynamic behaviour of rc dual system design with the brazilian standard code using the lumped damage model. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 43:246, 2021.
- Vanalli L., Paccola R.R., e Coda H.B. A simple way to introduce fibers into fem models. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24:585–603, 2007.
- Álvares M.S. Estudo de um modelo de dano para o concreto. 150 p. *Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo*, 1993.