

SIMULACIÓN DE UN RODAMIENTO DE BOLAS EN UN MECANISMO CONSIDERANDO EFECTOS DE IMPACTO Y FRICCIÓN

SIMULATION OF A BALL BEARING IN A MECHANISM CONSIDERING IMPACT AND FRICTION EFFECTS

Eliana Sanchez^a, Alberto Cardona^a y Federico J. Cavalieri^a

^aCIMEC-CONICET-UNL, Colectora Ruta Nac 168 s/n - Paraje El Pozo, 3000 Santa Fe, Argentina
(esanchez,acardona,fcavalieri@cimec.unl.edu.ar <https://cimec.conicet.gov.ar>)

Palabras clave: Mecanismos, Fricción, Impactos, Tensiones.

Resumen. Este trabajo estudia los impactos que se producen en un rodamiento de bolas, el cual forma parte de un mecanismo. Debido al movimiento del sistema y a la existencia de huelgos entre componentes, se generan tensiones y deformaciones que varían en el tiempo. Las tensiones y deformaciones se calculan mediante la detección de los saltos de velocidad inducidos por los impactos entre las bolas y las pistas en el marco de la dinámica de impacto no suave. Con el fin de resolver las ecuaciones de movimiento, se utiliza el esquema de integración temporal α -generalizado no suave. Además, para regularizar el problema de contacto, se emplea una formulación dual mixta basada en un método tipo Lagrangiano aumentado. Con el objetivo de demostrar la eficiencia y la robustez de la metodología propuesta, se presenta un ejemplo numérico de un mecanismo biela manivela con un rodamiento en uno de sus extremos. Los resultados numéricos obtenidos evidencian que la metodología es efectiva y adecuada para ser empleada en otras aplicaciones prácticas, como cajas de engranajes, turbinas eólicas y motores, entre otras.

Keywords: Mechanisms, Friction, Impacts, Stresses.

Abstract. This work studies the impacts that occur in a ball bearing which is part of a mechanism. Due to the system's motion and the existence of clearances between components, varying stresses and deformations are generated over time. The stresses and deformations are calculated by detecting velocity jumps induced by impacts between the balls and the raceways within the context of nonsmooth impact dynamics. To solve the equations of motion, the α -generalized nonsmooth temporal integration scheme is used. Furthermore, to regularize the contact problem, a dual-mixed formulation based on an augmented Lagrangian method is employed. In order to demonstrate the efficiency and robustness of the proposed methodology, a numerical example of a crank-slider mechanism with a ball bearing is presented. The numerical results obtained show that the methodology is effective and suitable for various practical applications, such as gearboxes, wind turbines and engines, among others.

1. INTRODUCCIÓN

Los rodamientos de bolas son una parte importante de los mecanismos de alta velocidad y precisión. Desde un punto de vista de la durabilidad, varios autores señalan que casi la mitad de las fallas en motores eléctricos tienen su origen en estos tipos de elementos (Albrecht et al., 1986). Los impactos entre las bolas, las pistas y la jaula generan variaciones en las fuerzas de contacto interiores del rodamiento, afectando la precisión del movimiento, la eficiencia y la vida útil del sistema mecánico en el cual se encuentran inmersos (Shah y Patel, 2014).

A su vez, los métodos de mantenimiento tradicionales de los sistemas mecánicos a menudo implican la sustitución periódica de los rodamientos después de cierto tiempo de operación. Según Gismeros Moreno et al. (2021), estos métodos de mantenimiento presentan dos cuestiones importantes: en primer lugar, se basan en la experiencia y no tienen en cuenta factores como un montaje incorrecto o una lubricación deficiente; en segundo lugar, la ubicación de las máquinas, puede ser de difícil acceso, como en el caso de turbinas marinas. Debido a estas limitaciones, las técnicas de mantenimiento predictivo son sumamente valiosas para analizar estos componentes. El conocimiento y la comprensión de la dinámica del sistema en las etapas previas contribuyen a disminuir costos y tiempos de mantenimiento.

A largo de las últimas décadas, ha habido un progreso significativo en la investigación y desarrollo de modelos que consideran los efectos de las holguras en los rodamientos. Harris y Kotzalas (2006) contribuyeron a la creación de modelos dinámicos que consideran una variedad de aspectos en los rodamientos de bolas, como la geometría, la elasticidad, la estática y la dinámica. Jones (1960), por su parte, propuso un modelo de equilibrio cuasiestático que incorpora los efectos de la fuerza centrífuga y el momento giroscópico de las bolas basándose en la teoría de contacto de Hertz. A diferencia de los modelos cuasiestáticos, los modelos dinámicos brindan la capacidad de realizar simulaciones en tiempo real del movimiento de los componentes del rodamiento bajo diversas condiciones de trabajo. Por ejemplo, Tiwari et al. (2000) presentaron un modelo dinámico multicuerpo y llevaron a cabo un análisis del rendimiento dinámico de los rodamientos. Asimismo, Flores et al. (2007) estudiaron un sistema dinámico multicuerpo con holgura. En este caso, presentan un modelo de fuerza continua no lineal que depende de la penetración local entre los cuerpos en contacto y de la velocidad relativa de penetración. A pesar de que existen numerosos trabajos que abordan el estudio de los rodamientos muy pocos los consideran dentro de sistemas mecánicos complejos, como ser un sistema biela-manivela. Basándose en la teoría del contacto de Hertz y en sistemas dinámicos planos multicuerpo, Xu (2014) propuso una metodología general para modelos dinámicos y análisis de sistemas multicuerpo planos. Recientemente, Yao et al. (2017), considerando los estudios de Xu (2014), propuso un modelo que permite considerar el efecto que se produce entre las bolas y la jaula del rodamiento.

En este trabajo se presenta una nueva metodología para la simulación de rodamientos de bolas, en el marco de la dinámica de contacto no suave a partir de los elementos de contacto esfera-plano y esfera-esfera presentados por Cavalieri et al. (2021). Para la regularización del problema variacional de contacto se utiliza un enfoque dual mixto basado en un Lagrangiano aumentado propuesto por Alart y Curnier (1991) para problemas cuasi-estáticos y aplicado por Galvez et al. (2020) a problemas dinámicos. Luego, para la descripción cinemática de los cuerpos se sigue la metodología de elementos finitos propuesta por Géradin y Cardona (2001). Finalmente, las ecuaciones de movimiento se integran utilizando un esquema de integración temporal α -generalizado no suave versión desacoplada (Cosimo et al., 2020). Considerando los

impulsos producidos entre los elementos del rodamiento, se propone un proceso de filtrado para determinar de manera más efectiva el momento del impacto, la velocidad previa al impacto y el valor máximo del impulso. Todos estos datos son necesarios para posteriormente obtener, mediante una determinada ley constitutiva, las fuerzas de contacto que se producen entre los elementos.

2. ELEMENTO RODAMIENTO

En esta sección se introduce un nuevo elemento tridimensional diseñado para abordar el contacto entre las esferas que componen un rodamiento de bolas y sus pistas, ver Fig. 1-a. El contacto entre las esferas B y la pista interior del rodamiento A se aborda utilizando el enfoque de contacto entre esferas, tal como se propone en los trabajos de Cavalieri et al. (2021) y Sanchez et al. (2023). Para el contacto entre las esferas B y la pista exterior, se emplea el elemento esfera-esfera presentado en el trabajo de Sanchez et al. (2023), considerando nuevas restricciones de contacto. En este sentido, la principal diferencia radica en la inversión de la dirección del vector normal $\mathbf{n} = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C) / \|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C\|$ debido a que la esfera B está dentro de la esfera C , Fig. 1-b. Para este nuevo elemento, las condiciones de contacto son las que se muestran en la Ec.(1).

$$\begin{bmatrix} g_N \\ g_{T1} \\ g_{T2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_C - r_B - \|\mathbf{x}_{B,n+1} - \mathbf{x}_{C,n+1}\| \\ -\mathbf{t}_{2,n} \cdot (\Psi_{B,incr} r_B + \Psi_{C,incr} r_C) - \mathbf{t}_{1,n} \cdot [(\mathbf{x}_{B,n+1} - \mathbf{x}_{C,n+1}) - (\mathbf{x}_{B,n} - \mathbf{x}_{C,n})] \\ \mathbf{t}_{1,n} \cdot (\Psi_{B,incr} r_B + \Psi_{C,incr} r_C) - \mathbf{t}_{2,n} \cdot [(\mathbf{x}_{B,n+1} - \mathbf{x}_{C,n+1}) + (\mathbf{x}_{B,n} - \mathbf{x}_{C,n})] \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde la primera componente corresponde al huelgo normal g_N mientras que las dos componentes restantes representan el movimiento tangencial incremental g_{T1} y g_{T2} .

La estrategia adoptada para describir el movimiento general de los cuerpos es el Método de Elementos Finitos no lineal, donde las coordenadas globales de los cuerpos se refieren a un marco inercial único (Gérardin y Cardona, 2001). Finalmente, la configuración del rodamiento se ilustra en la Fig. 1-a, donde el rodamiento está formado por ocho esferas pequeñas B , una esfera central A que representa la pista interior, y una esfera exterior C que simboliza la pista exterior del rodamiento. Por simplicidad, ignoramos aquí la doble curvatura de las pistas, asumiendo un comportamiento plano del rodamiento. Además, el componente jaula es representado por ocho elementos del tipo resorte que permiten la conexión entre las bolas B .

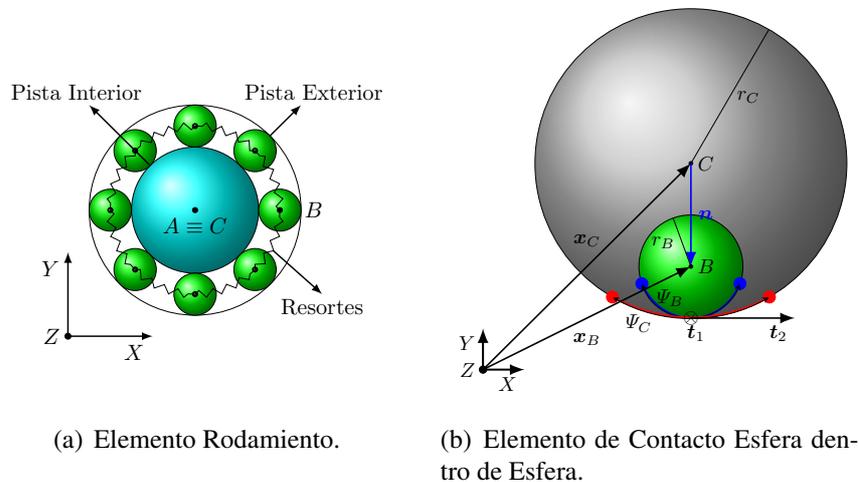


Figura 1: Elementos de Contacto.

3. PROCESO DE FILTRADO

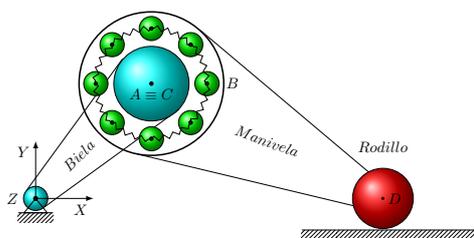
Uno de los principales desafíos en el estudio de la dinámica del contacto en mecanismos radica en la cantidad de impactos producidos entre sus componentes cuando los cuerpos del sistema comienzan a moverse. Una ventaja significativa de la metodología propuesta es su capacidad para calcular estos impactos en cada elemento de contacto. En la Fig. 2-a, se puede observar que las esferas B de un rodamiento pueden experimentar impactos tanto con la pista exterior como con la pista interior debido al huelgo. La cantidad de impactos que se producen entre una bola B y su pista exterior C puede ser muy elevada una vez que el mecanismo entra en régimen, ver Fig. 2-b.

El impulso discreto Λ calculado en el instante t_{n+1} por el algoritmo α -generalizado no suave (Brüls et al., 2014), puede expresarse como,

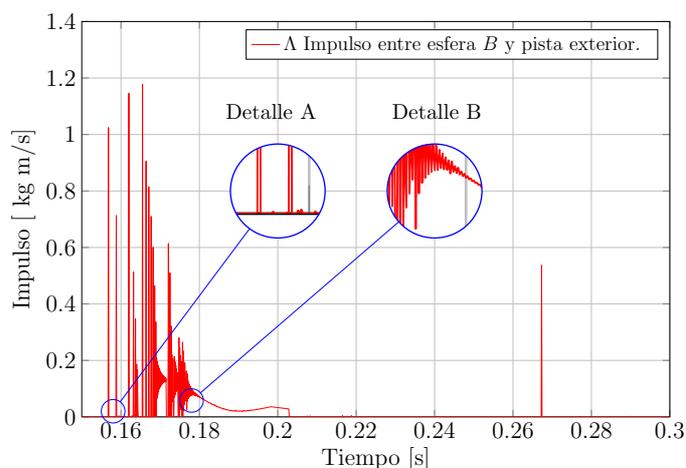
$$\Lambda_{n+1} \approx \int_{(t_n, t_{n+1}]} (di - \tilde{\lambda}(\tau) d\tau) \quad (2)$$

donde di es la medida del impacto de las reacciones de contacto y $\tilde{\lambda}$ es la fuerza de contacto cuando el contacto está “cerrado”. En consecuencia, Λ tiene dos componentes: la primera que proviene de la integral de los impulsos que se produzcan en el paso de tiempo, y la segunda que es aproximadamente igual a la fuerza de contacto (a contacto cerrado) por el tamaño del paso de tiempo.

A manera de ejemplo, en la Fig. 2-b se ilustra la variación del impulso discreto Λ respecto del tiempo para el contacto entre una bola y la pista externa del rodamiento. Por un lado, los impactos del sistema pueden ser *simples* como se muestra en el Detalle A de la Fig. 2-b. Para este caso particular, el impulso discreto Λ es nulo antes y después del impacto, es decir, los cuerpos antes y después del impacto están separados. Por otro lado, se observa que también existen otros tipos de impactos donde Λ comienza desde un valor distinto de cero, tal como se observa en el Detalle B de la Fig. 2-b. Estos casos corresponden a impactos que se producen en otra parte del rodamiento y generan un impulso en contactos que se encuentran cerrados. Finalmente, se puede ver también que hay sectores donde Λ es continuo y distinto de cero. Ello corresponde a partes donde el contacto está cerrado. En dichos casos, el valor de Λ es igual a la fuerza de contacto multiplicada por el paso de tiempo $t_{n+1} - t_n$.



(a) Mecanismo con Rodamiento de Bolas.



(b) Impulso vs Tiempo.

Figura 2: Dinámica del Contacto en Mecanismos

Cuando se utiliza una representación continua de la fuerza de contacto, al producirse el impacto entre dos cuerpos esféricos la fuerza de contacto puede ser calculada a partir de una ley constitutiva tal como la que propone Flores et al. (2011) :

$$F = K\delta^{3/2} + D\delta^{3/2}\dot{\delta} \quad \text{con} \quad D = \frac{8}{5} \frac{K}{v_{pre}} \frac{1 - e_N}{e_N} \quad (3)$$

donde K se calcula como :

$$K = \frac{4}{3(\sigma_1 + \sigma_2)} \left[\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right]^{1/2} \quad \sigma_r = \frac{1 - \nu_r^2}{E_r} \quad r = 1, 2 \quad (4)$$

Aquí, R_r es el radio de las esferas, y ν_r y E_r son el coeficiente de Poisson y el módulo de Young del material de cada esfera. Luego, δ es la penetración relativa local entre las superficies en contacto y D es el factor de amortiguamiento por histéresis. A su vez e_N es el coeficiente restitución normal y v_{pre} es la velocidad relativa previa de los componentes a impactar.

Se propone una estrategia de filtrado de Λ con el objetivo de identificar el momento en que se producen los impactos entre componentes. De esta manera, estimaremos fuerzas de contacto, como así también velocidades previas al impacto para el cálculo de la fuerzas durante el impacto. Para una mejor comprensión del proceso de filtrado, se asume una variación de Λ en función del tiempo como se muestra en la Fig. 3. Se pueden identificar dos tipos de impactos: el impacto *simple*, que ocurre en el instante t_A , y el impacto *a contacto cerrado* como se evidencia en el instante t_B .

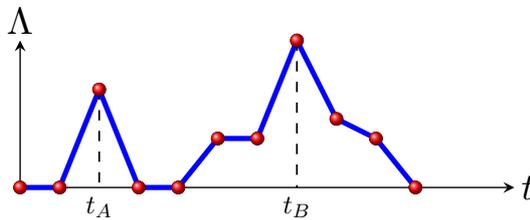


Figura 3: Evolución de Λ en el tiempo.

Teniendo en cuenta la variación temporal propuesta para el impulso Λ , se definen tres funciones con el objetivo de identificar los picos del impulso y así determinar el momento en el que ocurren los impactos. Estas tres funciones son:

- **Función de Impacto Simple ($\Lambda_{FI,n}$).** Se corresponde con aquellos picos de Λ donde en un paso de tiempo anterior (t_{n-1}) y posterior al pico (t_{n+1}), los valores de Λ son iguales a cero, ver Fig. 4-a. Definimos:

$$\Lambda_{FI,n}(t) = \begin{cases} \Lambda_n, & \text{si } t = t_n \\ 0, & \forall t \neq t_n \end{cases} \quad (5)$$

Restando los impactos simples de la función de impulso discreto Λ , se crea una función auxiliar $\Lambda_{AUX} = \Lambda - \Lambda_{FI}$. Como se observa en la Fig. 4-b la función auxiliar no presenta impactos simples.

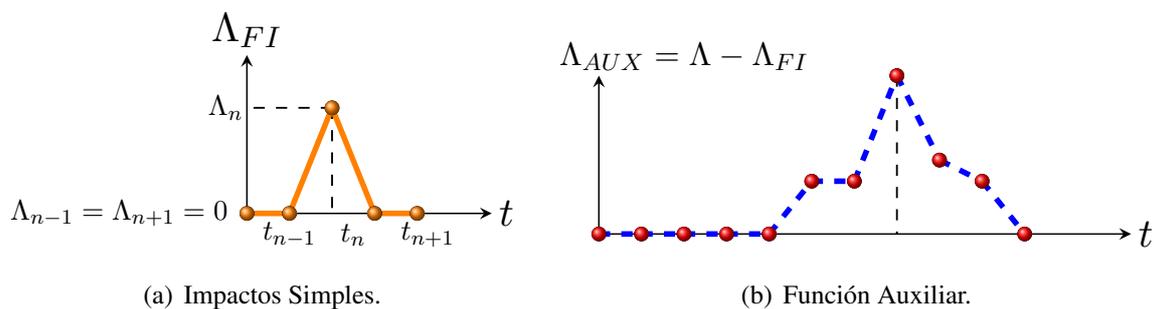


Figura 4: Funciones de impacto simple y auxiliar.

- Función Suave de Impulso (Λ_S).** Luego, para poder identificar los impactos que se producen cuando los cuerpos están en contacto, se procede a suavizar la función auxiliar. Para esto se estudian diferentes escenarios como los propuestos en la Fig. 5. Por un lado se presenta el caso en el que hay un pico hacia arriba como se observa en la Fig. 5-a. En este caso, el valor de la función suave de impulso tomará el promedio de los valores adyacentes. Es decir, si en el instante de tiempo t_n se tiene $\Lambda_{AUXn+1} < \Lambda_{AUXn}$ y $\Lambda_{AUXn-1} < \Lambda_{AUXn}$ entonces a la función suave de impulsos Λ_S se le asigna el valor de $(\Lambda_{AUXn+1} + \Lambda_{AUXn-1})/2$ en t_n .

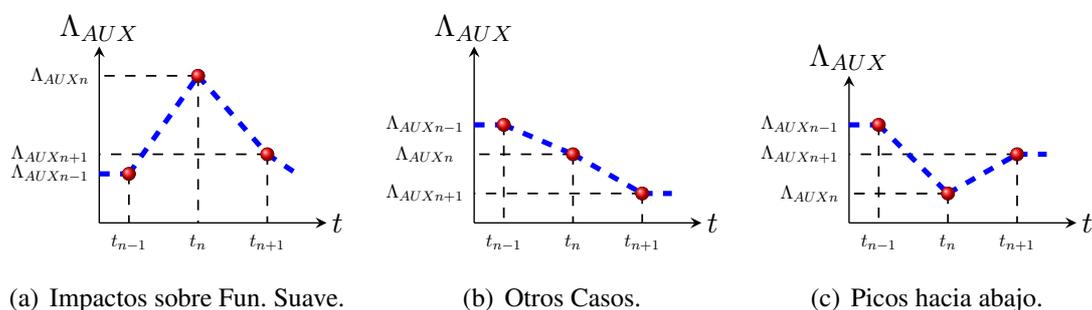


Figura 5: Filtrado de Función Suave.

Para todos los demás escenarios posibles, donde no hay picos hacia arriba, como las variaciones del impulso representadas en las Figuras 5-b y 5-c, la función suavizada del impulso Λ_S toma el valor de Λ_{AUXn} . El resultado de todos estos procesos se traduce en una función suavizada de impulsos Λ_S en función del tiempo, como se muestra en la Fig. 6-a.

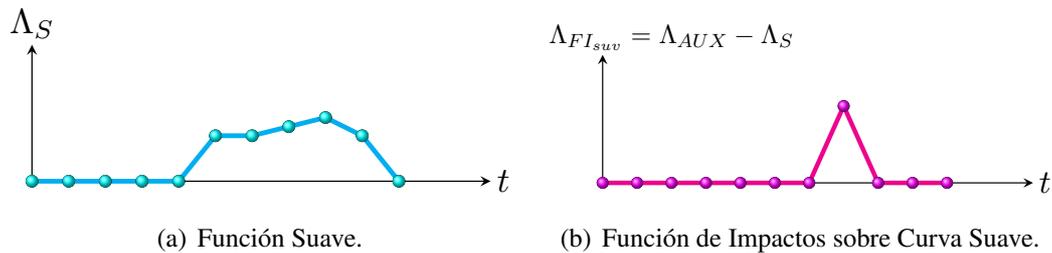


Figura 6: Funciones de filtrado.

- Función de Impactos sobre Curva Suave ($\Lambda_{FI_{suv}}$).** Para concluir el filtrado y obtener los impactos o picos generados sobre la función suave de impulsos, a la función auxiliar se le resta la función suave, esto es $\Lambda_{FI_{suv}} = \Lambda_{AUX} - \Lambda_S$. A partir de la Fig. 6-b, se concluye que $\Lambda_{FI_{suv}}$ solo presenta los valores de los impactos producidos sobre la curva suave.

Se verifica fácilmente mediante la observación de las gráficas que la suma de las tres funciones $\Lambda_{FI_{suv}}$, Λ_S , y Λ_{FI} resulta en la función Λ original. Finalmente, se presentan dos escenarios distintos para el cálculo de la fuerza de contacto. En el primero, se consideran los impactos simples. Utilizando la función Λ_{FI} , se obtienen los tiempos de impacto t_n y las velocidades relativas previas v_{pre} de los cuerpos involucrados. Luego, al aplicar el modelo propuesto por Flores et al. (2011) y teniendo en cuenta los valores de los picos de Λ_{FI} , se calcula la fuerza de contacto. En el segundo escenario, se aborda el cálculo de la fuerza de contacto entre cuerpos que ya están en contacto y que reciben un impacto. En este caso, se sigue un procedimiento similar al descrito anteriormente, pero utilizando la función $\Lambda_{FI_{suv}}$ y considerando la carga estática correspondiente al impulso Λ_S en el momento del impacto.

4. EJEMPLO NUMÉRICO

El ejemplo numérico presentado en este estudio se basa en el caso propuesto por Yao et al. (2017). El mismo consiste en un mecanismo compuesto por un sistema biela-manivela, en el cual se incluye un rodamiento de bolas en la unión entre estos dos componentes, tal como se observa en la Fig. 2-a. La biela inicialmente posee una velocidad angular de $\omega_z = 50$ rad/s, y en la configuración inicial se encuentra completamente alineada con la manivela. Los parámetros específicos del mecanismo y los correspondientes al rodamiento SKF-6012 se presentan en la Tabla 1. La fricción entre las bolas del rodamiento y las pistas se establece en $\mu = 0,01$, y los coeficientes de restitución entre las bolas y la pistas son $e_N = 0,9$ y $e_T = 0$. El huelgo radial entre las esferas y las pistas es de $g = 0,0004$ m. Los resortes que representan la jaula del rodamiento tienen una rigidez $k = 1 \times 10^5$ N/m y un amortiguamiento $c = 1 \times 10^3$ Ns/m. El tiempo total de simulación fue de 0,3 s con un paso de tiempo de 1×10^{-4} s. El radio espectral del integrador fue $\rho_\infty = 0$. El valor de la tolerancia para la convergencia fue $tol_r = 1 \times 10^{-5}$. Los resultados obtenidos de los impactos producidos entre un esfera B y su pista exterior C son los observados anteriormente en la Sec. 3, Fig. 2-b. El número máximo de iteraciones a nivel smooth posición y velocidad fue de 3, 23 y 5, mientras que el número promedio de iteraciones fue de 2, 5 y 2. Como podemos ver en la Fig. 7, el proceso de filtrado se llevó de manera correcta tanto para la detección de los impactos simples como para aquellos que se generan sobre la curva suave de impulso. Considerando la fuerza de contacto dado por las Ecs.(3,4) con

Cuerpo	Largo [m]	Masa [kg]	Momento de Inercia [kg m ²]	Radio[m]
Biela	0,11	1	$I_{xx} = 0,0028, I_{yy} = 0,0006, I_{zz} = 0,0033$	-
Manivela	0,225	4	$I_{xx} = 0,0086, I_{yy} = 0,0251, I_{zz} = 0,0334$	-
Rodillo	-	2	$I_{xx} = 0,0013, I_{yy} = 0,0013, I_{zz} = 0,0021$	0,04
Esferas B	-	$2,7 \times 10^{-3}$	$I = 3,267 \times 10^{-8}$	0,0055
Pista In. A	-	8×10^{-3}	$I = 3,643 \times 10^{-6}$	0,033745
Pista Ex. C	-	8×10^{-3}	$I = 6,523 \times 10^{-6}$	0,04515

Tabla 1: Propiedades geométricas e inerciales del Rodamiento y del Mecanismo Biela-Manivela.

$E_r = 2,1 \times 10^9$ Pa y $\nu_r = 0,3$, con $r = 1, 2$, las fuerzas de contacto para los tres impulsos más elevados fueron de 3,66 kN, 5,22 kN y 4,69 kN, ver Fig. 7-d.

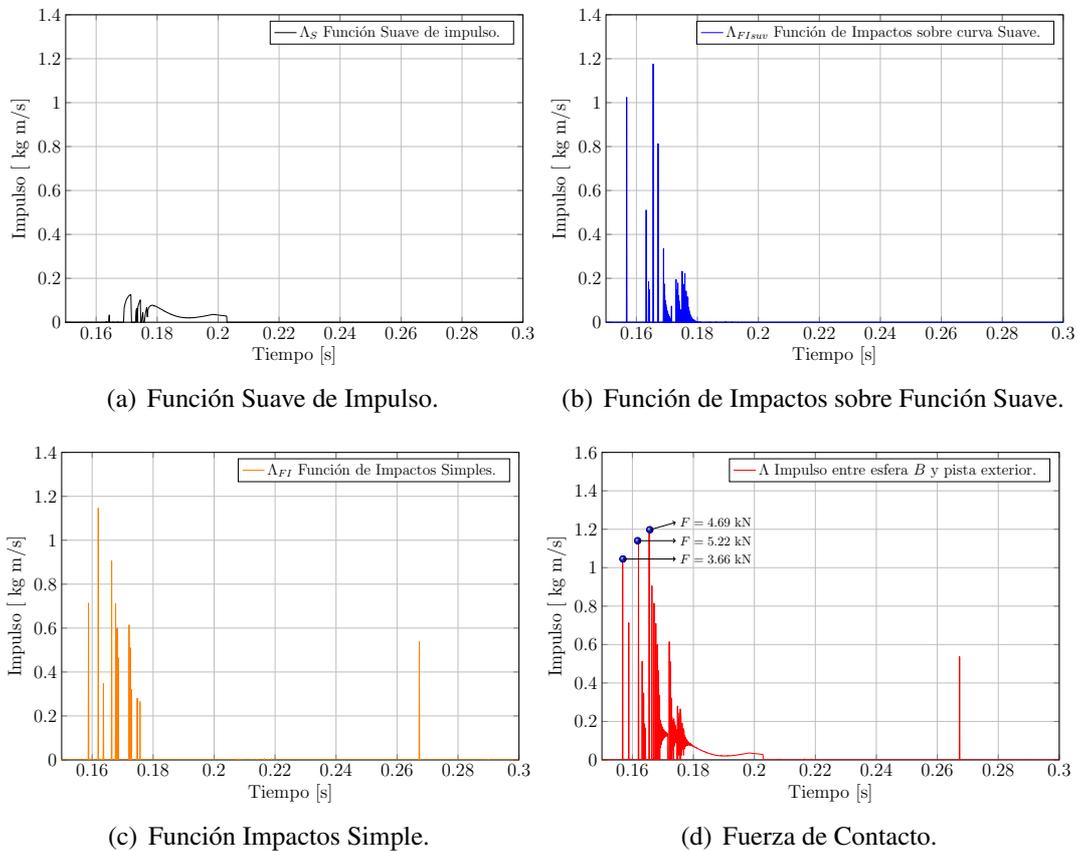


Figura 7: Resultados obtenidos mediante el proceso de filtrado.

CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un nuevo elemento de contacto tridimensional, capaz de representar el comportamiento que presenta un rodamiento de bolas inmerso en un mecanismo. El proceso de filtrado propuesto permite identificar de forma efectiva los impactos producidos entre las bolas y las pistas del rodamiento. Mediante la detección de estos impactos, el cálculo de la fuerza de contacto es posible. La integración de las ecuaciones de movimiento del problema de contacto por fricción se realiza utilizando el esquema de integración temporal α generalizado no suave, basado en un enfoque Lagrangiano aumentado. Las restricciones de contacto se cum-

plen exactamente a nivel posición y velocidad, es decir, no hay penetración entre los cuerpos en contacto.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido financiamiento del CONICET a través del proyecto PIP11220200101 688CO y de la UTN a través de los proyectos AMECAFE0008102TC y 7704.

REFERENCIAS

- Alart P. y Curnier A. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 92(3):353–375, 1991.
- Albrecht P., Appiarius J., McCoy R., Owen E., y Sharma D. Assessment of the reliability of motors in utility applications-updated. *IEEE Trans. Energy Convers.*, (1):39–46, 1986.
- Brüls O., Acary V., y Cardona A. Simultaneous enforcement of constraints at position and velocity levels in the nonsmooth generalized- α scheme. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 281:131–161, 2014.
- Cavaliere F.J., Sanchez E., Cosimo A., Brüls O., y Cardona A. Simulación de cuerpos rígidos esféricos sujetos a colisiones de impacto múltiple y efectos de fricción. *Mecánica Computacional*, 38(29):1123–1130, 2021.
- Cosimo A., Galvez J., Cavaliere F.J., Cardona A., y Brüls O. A robust nonsmooth generalized- α scheme for flexible systems with impacts. *Multibody System Dynamics*, 48(2):127–149, 2020.
- Flores P., Ambrósio J., Claro J.P., y Lankarani H. Dynamic behaviour of planar rigid multi-body systems including revolute joints with clearance. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 221(2):161–174, 2007.
- Flores P., Machado M., Silva M.T., y Martins J.M. On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics. *Multibody system dynamics*, 25:357–375, 2011.
- Galvez J., Cavaliere F.J., Cosimo A., Brüls O., y Cardona A. A nonsmooth frictional contact formulation for multibody system dynamics. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 121(16):3584–3609, 2020.
- Gérardin M. y Cardona A. *Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach*. Wiley, 2001. ISBN 0471489905.
- Gismeros Moreno R., Corral Abad E., Meneses Alonso J., Gómez García M.J., y Castejón Sisamón C. Synchronous contact/impact events modelling with a smooth-based approach. En *ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics*, páginas 55–66. Budapest University of Technology and Economics, 2021.
- Gérardin M. y Cardona A. *Flexible Multibody Dynamics*. John Wiley and Sons, 2001.
- Harris T.A. y Kotzalas M.N. *Rolling Bearing Analysis-2 Volume Set*. Crc Press, 2006.
- Jones A. A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions. 1960.
- Sanchez E., Cardona A., Cosimo A., Brüls O., y Cavaliere F.J. Simulation of spherical rigid bodies subject to friction with multiple impacts. *ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics*, 2023.
- Shah D.S. y Patel V.N. A review of dynamic modeling and fault identifications methods for rolling element bearing. *Procedia Technology*, 14:447–456, 2014.
- Tiwari M., Gupta K., y Prakash O. Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor. *J. Sound Vib.*, 238(5):723–756, 2000.

- Xu L.x. A general method for impact dynamic analysis of a planar multi-body system with a rolling ball bearing joint. *Nonlinear Dynamics*, 78(2):857–879, 2014.
- Yao T., Xian L., Wang L., y Liu X. Multibody contact dynamics on mechanisms with deep groove ball bearing joints. *J. Sound Vib.*, 31:4119–4135, 2017.