

## UN MODELO ANALÍTICO PARA EL ESTUDIO DE RECOLECTORES DE ENERGÍA PIEZOELECTRICOS DE GEOMETRÍA CIRCULAR CON CONDICIONES DE VINCULACIÓN PARTICULARES

### AN ANALYTICAL MODEL FOR THE STUDY OF PIEZOELECTRIC ENERGY COLLECTORS OF CIRCULAR GEOMETRY WITH PARTICULAR BOUNDARY CONDITIONS

Carlos Vera<sup>a</sup>, Mariano Febbo<sup>b</sup>, Sebastián Machado<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP), Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, B8000, gimap@frbb.utn.edu.ar, <https://www.frbb.utn.edu.ar/>*

<sup>b</sup>*Instituto de Física del Sur (IFISUR), Universidad Nacional del Sur (UNS), CONICET, Av. Alem 1253 B8000 Bahía Blanca, Argentina, ifisur@uns.edu.ar, <http://www.ifisur-conicet.gob.ar/>*

**Palabras clave:** Recolección de energía, piezoelectricidad, vibraciones.

**Resumen.** En el presente trabajo se presenta un modelo analítico unidimensional (1D) de recolector de energía de geometría circular, que utiliza un piezoelectrico tipo buzzer empotrado a lo largo de toda su circunferencia. El prototipo consta de un disco de latón sobre el cual se monta un piezoelectrico también con forma de disco, y sobre el cual se le adosa una masa cilíndrica de acero para aumentar la deformación y mejorar la generación. El modelo analítico responde matemáticamente a la teoría de placas circulares, estableciendo todas sus definiciones en coordenadas cilíndricas, no obstante, debido a la axisimetría del problema la deflexión solo depende de las coordenadas  $r$  y  $z$ .

El modelo es simulado mediante el método de elementos finitos con un modelo 3D, construido en COMSOL Multiphysics®. Los resultados obtenidos indican que este modelo 1D es efectivo en la recolección de energía eléctrica y simula muy adecuadamente la deformación del prototipo. Esta situación es importante para futuras investigaciones en la optimización y diseño de recolectores con geometría circular.

**Keywords:** Energy harvesting, piezoelectricity, vibration.

**Abstract.** One-dimensional (1D) analytical model of an piezoelectric energy harvester with circular geometry is presented, that uses a piezoelectric buzzer type clamped along its circumference.

The prototype consists of a brass disc on which a piezoelectric bonded with a proof mass to introduce a pre-stress and to increase deformation. The analytical model responds mathematically to the theory of circular plates, establishing all its definitions in cylindrical coordinates, however due to the axisymmetric bending, the deflection only depend to  $r$  and  $z$  coordinates.

The model is verified by finite element simulations with a 3D model, implemented by COMSOL Multiphysics®. The results obtained indicate that 1D model is effective in harvesting electrical energy and adequately simulates the prototype deformation. This situation is important for future research in the optimization and design of collectors with circular geometry.

## 1 INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, los recolectores de energía piezoeléctrica que utilizan a las vibraciones mecánicas como fuente de energía se muestran como una alternativa fiable para la alimentación de dispositivos sensores de baja potencia (Li et. al 2014; Yu et. al 2014). Particularmente, es una tecnología en auge ya que permite la construcción de estaciones de alimentación de energía autónomas reduciendo así costos sus de manutención (Kim et. al. 2014; Erturk et. al 2009). Los dispositivos de baja potencia por lo general son dispositivos electrónicos de bajo consumo (Cetin et. al. 2015), pero que por lo general dependen de baterías para su funcionamiento. Sabido es que la vida útil de cualquier batería siempre es mucho más corta que la vida útil del propio dispositivo. Por otro lado, el recambio de baterías no solo en muchas ocasiones es de alto costo, sino que también pueden tenerse dificultades para el acceso al recambio en las estructuras que se quieren sensar.

Una de las configuraciones geométricas para este tipo de dispositivos de recolección de energía es la que utilizan piezoeléctricos de geometría circular conocidos como buzzer. Son construidos con un PZT sobre un sustrato de latón, teniendo ambas estructuras la forma de discos (Kim et. al 2005; Palosaari et. al 2014; Yangyiwei Yang et. al 2017; Yangyiwei Yang et. al 2018; Bakhtiari – Shahri et. al. 2019). La principal motivación de seguir estudiando recolectores de esta geometría radica en el bajo costo de mercado que presentan los buzzer en comparación con dispositivos tipo viga, así como también juega un rol importante el tamaño del dispositivo para similares rangos de generación.

Los autores del presente trabajo (Vera et. al 2022) vienen realizando estudios experimentales y computacionales con este tipo de dispositivos, comparando las diferentes respuestas que se obtienen modificando las condiciones de vinculación para el buzzer.

En continuidad con la investigación previamente mencionada, el presente estudio tiene como objetivo proponer un modelo analítico unidimensional destinado a evaluar recolectores de energía de geometría circular, basado en la teoría clásica de placas circulares (Timoshenko et. al 1959; Reddy et. al. 2006) que permita la predicción de las relaciones entre los parámetros principales de los dispositivos (diámetros, espesores, autovalores, masa de oscilación) y su relación con la eficiencia y rendimiento de este, específicamente en lo que concierne a la generación eléctrica. Este modelo se muestra como apropiado para el estudio, entendiéndose que es un modelo lineal y unidimensional. En cuanto a su comportamiento mecánico, el modelo incorpora el efecto de amortiguamiento del tipo Rayleigh. Por otro lado, la parte piezoeléctrica del modelo se caracteriza mediante la inclusión de un coeficiente de acoplamiento piezoeléctrico, capacidad interna y la impedancia correspondiente. (Dutoit et. al 2005). Este modelo unidimensional se somete a una comparación con resultados numéricos obtenidos a través un modelo de elementos finitos utilizando con el software comercial COMSOL. A partir del mismo es posible predecir valores de generación de energía, formas modales y deformaciones asociadas a un modelo tridimensional. Se realizan diferentes pruebas bajo una misma condición de vinculación, destacándose que el estudio permite intuir que la modificación del área de contacto de la masa de oscilación sobre el piezoeléctrico tiene un impacto significativo en la generación de energía.

La motivación para la propuesta de un modelo analítico de recolector de geometría circular sigue siendo el diseño de un recolector de pequeño tamaño para alimentar una estación de sensado autónomo en maquinarias agrícolas (Febbo et. al. 2022).

## 2 MODELO ANALÍTICO 1D DEL RECOLECTOR

### 2.1 Geometría

La Figura. 1 a) y b) muestra el esquema del prototipo que consta de un disco circular de latón y un disco PZT – 5H. El latón está empotrado a lo largo de toda su circunferencia.

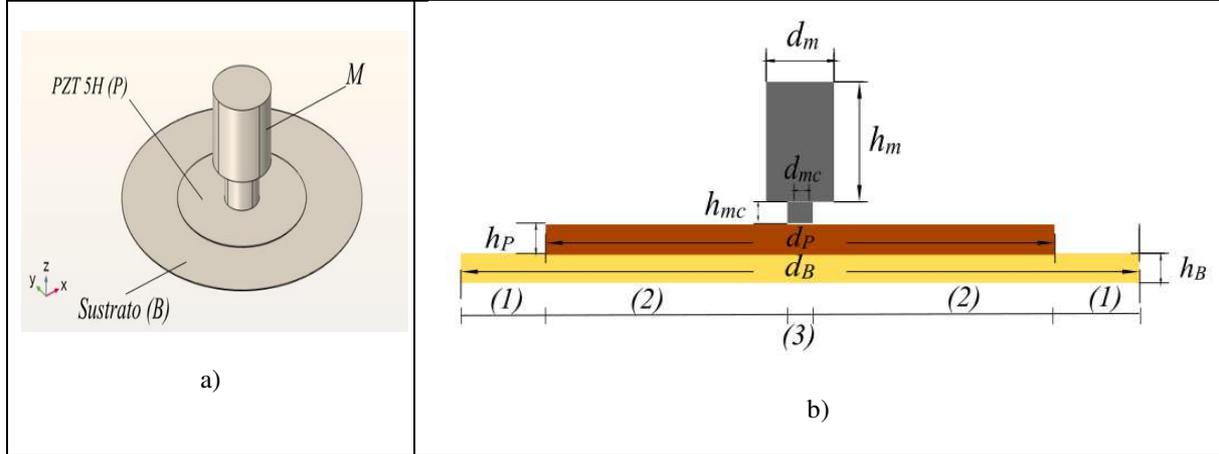


Figura 1a) y b): Esquema del recolector y estructura.

Sobre el PZT - 5H se coloca una masa cilíndrica de acero (Chen, et. al.) con la intención de aumentar la generación por incremento de la deformación del piezoeléctrico.

Las dimensiones geométricas en corte transversal del dispositivo, Figura 1 b) son el diámetro y el espesor del sustrato ( $d_B, h_B$ ), diámetro y espesor del PZT ( $d_P, h_P$ ), diámetro ( $d_m$ ) y altura ( $h_m$ ) de la masa de oscilación. La disminución de área de contacto entre masa y PZT se materializa montando M sobre cilindros de menor diámetro ( $d_{mc}$ ) y de altura constante ( $h_{mc}$ ), siendo  $d_{mc}$  quien define esta área.

### 2.2 Modelo Matemático

La generación de energía a través de piezoelectricidad se resuelve desde las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento (Erktur et. al. 2009)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2q - \Theta_jv &= \Gamma_j\ddot{g} \\ Cv + \frac{1}{R}v + \dot{\Theta}_j\dot{q}_j &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

en las que  $q_j$  representa los desplazamientos temporales generalizados;  $v$  el voltaje a través del elemento piezoeléctrico;  $R$  es la resistencia de la carga,  $C$  la capacidad del piezoeléctrico,  $\xi_j$  el amortiguamiento modal asociado;  $\omega_j$  frecuencia natural del sistema;  $\Theta_j$  el acoplamiento electromecánico y  $\Gamma_j$  el acoplamiento modal. El dispositivo se discretiza en tres secciones, para considerar el cambio seccional introducido por el material piezoeléctrico.

Resolviendo mediante balance armónico la Ec. (1) se obtiene la expresión para el voltaje (Febbo et al. 2022)

$$V(t) = \frac{\Gamma\Theta\Omega R}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2 - 2CR\xi\omega\Omega^2)^2 + (2\Omega\xi\omega + R\Omega(\Theta^2 + C\omega^2 - C\Omega^2))^2}} \quad (2)$$

con  $\Omega$ , frecuencia forzada.

El buzzer se modela utilizando la ecuación diferencial fundamental de vibración amortiguada donde se propone una expansión del desplazamiento de la  $u(x, t)$  de la placa circular discretizando espacialmente de la forma

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^n U_{(i),n}(r)q(t) \quad (3)$$

en la que  $U_{(i),n}(r)$  son los  $n$  modos normales de vibración de cada sección ( $i$ ) en tanto que  $q(t)$  es el desplazamiento temporal. Los modos se determinan a través de la teoría de vibraciones flexionales de placas circulares, la que deriva la ecuación gobernante del problema con  $u$  como el desplazamiento flexional

$$D\nabla^4 u + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

aquí,  $D$  es la rigidez a la flexión y  $m$  la masa por unidad de área de la sección transversal de la placa. La definición de  $D$  para un material isótropo viene dada por

$$D = \frac{Yh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (5)$$

en las que,  $Y$  es el módulo de Young de la placa,  $\nu$  es la relación de Poisson y  $h$  su espesor.

La discretización del modo de vibración se divide en tres secciones que consideran para cada caso su propio comportamiento mecánico y condiciones de borde (CB). La continuidad mecánica en cada sección deber considerar la compatibilidad de desplazamientos, giros, momentos flectores y esfuerzos de corte (Yang et. al 2018).

Según la Figura 1a), las secciones quedan definidas por: sección simple (1) para el sustrato; sección doble (2) para el sustrato y el PZT y la sección circular completa (3) para el sustrato, PZT y la masa  $M$ . Reemplazando la Ec. (3) en la Ec. (4) se obtiene la ecuación para los modos normales

$$D_{(i)}\nabla^4 u_{(i)} + m_{(i)} \frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial t^2} = 0 ; i = 1, 2, 3 \quad (6)$$

en la que el subíndice ( $i$ ) representa la rigidez, la deflexión y la masa  $m_{(i)}$  de cada una de las secciones. Así considerado cada tramo, quedan entonces determinadas para el tramo (1)

$$D_{(1)} = \frac{Y_B h_B^3}{12(1 - \nu_B^2)} ; m_{(1)} = \rho_B h_B \quad (7,8)$$

en el que  $Y_B$  es el módulo de Young,  $\nu_B$  el módulo de Poisson y  $h_B$  el espesor del sustrato.

En el tramo (2) se redefinen de acuerdo a la literatura (Li et. al. 2003)  $Y_C$  y  $\nu_C$ , como

$$D_{(2)} = \frac{Y_C h_C^3}{12(1 - \nu_C^2)} ; m_{(2)} = \rho_B h_B + \rho_P h_P \quad (9,10)$$

$$Y_C = H_P Y_P + H_B Y_B + \frac{H_P Y_P H_B Y_B (\nu_P - \nu_B)^2}{H_P Y_P (1 - \nu_B^2) + H_B Y_B (1 - \nu_P^2)} \quad (11)$$

$$\nu_C = \frac{H_P Y_P \nu_P (1 - \nu_B^2) + H_B Y_B \nu_B (1 - \nu_P^2)}{H_P Y_P (1 - \nu_B^2) + H_B Y_B (1 - \nu_P^2)} \quad (12)$$

$$H_P = \frac{h_P}{h_P + h_B}; H_B = \frac{h_B}{h_P + h_B} \quad (13,14)$$

con  $h_c$  espesor de sustrato más el del PZT,  $Y_P$  módulo de Young,  $\nu_P$  módulo de Poisson y  $h_P$  espesor del PZT.

En tanto para el tramo (3) se definen

$$D_{(3)} = \frac{Y_F h_F^3}{12(1 - \nu_F^2)}; \quad m_{(3)} = \frac{M_F}{\pi r_3^2} \quad (15,16)$$

en las que  $Y_F$ ,  $\nu_F$  y  $h_F$  son el módulo de Young, el módulo de Poisson la altura de  $M_F$ , masa de oscilación.

Realizando la sustitución de la Ec. (3) en la Ec. (6) se obtiene la ecuación de autovalores  $\beta_i$

$$\nabla^4 U_{(i)} - \beta_{(i)}^4 U_{(i)} = 0; \quad i = 1, 2, 3; \quad \beta_{(i)}^2 = \omega \sqrt{\frac{m_{(i)}}{D_{(i)}}}; \quad i = 1, 2, 3 \quad (17,18)$$

La solución general de la Ec. (17) para el 1° modo normal es

$$U_{(i)}(r) = A_{(i)}J_0(\beta_{(i)}r) + B_{(i)}Y_0(\beta_{(i)}r) + C_{(i)}I_0(\beta_{(i)}r) + DK_0(\beta_{(i)}r); \quad i = 1, 2, 3 \quad (19)$$

donde  $J_0(\beta_{(i)}r)$  y  $Y_0(\beta_{(i)}r)$  son las funciones de Bessel de 1° y 2° especie de orden cero, mientras  $I_0(\beta_{(i)}r)$  y  $K_0(\beta_{(i)}r)$  son sus versiones modificadas. Para la sección (3),  $B_{(3)}$  y  $D_{(3)} = 0$ , por indeterminación de las funciones de Bessel para  $r \rightarrow 0$ .

Aplicando las condiciones de borde y de compatibilidad mecánica se determinan las 10 constantes  $A_{(i)}$ ,  $B_{(i)}$ ,  $C_{(i)}$  y  $D_{(i)}$ .

### 2.3 Autovalores y frecuencias

Las condiciones de borde y de compatibilidad en  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  determinan el sistema lineal homogéneo de 10 ecuaciones con 10 incógnitas  $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$  que resuelve el problema de autovalores.

$$U_{(1)}(r_1) = 0; \quad \frac{dU_{(1)}(r_1)}{dr} = 0 \quad (20,21)$$

$$U_{(2)}(r_2) = U_{(1)}(r_2); \quad \frac{dU_{(2)}(r_2)}{dr} = \frac{dU_{(1)}(r_2)}{dr} \quad (22,23)$$

$$U_{(3)}(r_3) = U_{(2)}(r_3); \quad \frac{dU_{(3)}(r_3)}{dr} = \frac{dU_{(2)}(r_3)}{dr} \quad (24, 25)$$

$$M_{r(i)}(r) = -D_{(i)} \left( \frac{\partial^2 U_{(i)}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial U_{(i)}}{\partial r} \right); \quad N_{r(i)}(r) = -D_{(i)} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 U_{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{(i)}}{\partial r} \right) \quad (26, 27)$$

### 2.4 Generación de energía

Para determinar la generación de energía en función de la frecuencia de excitación (Eq. 2), es necesario normalizar el modo calculado y calcular el valor del  $\Theta_j$  y  $\Gamma$

La normalización de los modos  $\hat{u}_n(r)$  respecto de la masa para cada sección del recolector se calcula a través de la integral

$$1 = 2\pi \int_{r_2}^{r_1} m_{(1)} U_1^2(r) r dr + 2\pi \int_{r_2}^{r_3} m_{(2)} U_2^2(r) r dr + 2\pi \int_0^{r_3} m_{(3)} U_3^2(r) r dr. \quad (28)$$

En tanto la carga modal y el acoplamiento se calculan (Bakhtiari – Shahri et. al. 2019) con

$$\Gamma = 2\pi \left( \int_{r_2}^{r_1} \hat{u}_1 r dr + \int_{r_2}^{r_3} \hat{u}_2 r dr + \int_0^{r_3} \hat{u}_3 r dr \right) \quad (29)$$

$$\Theta = -\frac{2\pi Y_C d_{31}(1+\nu_P)}{(1+\nu_P^2)} \frac{(2ah_P+h_P^2)}{2h_P} \left[ \int_{r_3}^{r_2} \left( \frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial r} \right) r dr + \int_0^{r_3} \left( \frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial r} \right) r dr \right] \quad (30)$$

en la que la distancia  $a = h_B - h_0$ ;

$$h_0 = \frac{\frac{Y_B h_B^2}{(1-\nu_B^2)} + \frac{Y_P [(h_B + h_P)^2 + h_P^2]}{(1-\nu_P^2)}}{2 \left[ \frac{Y_B h_B}{(1-\nu_B^2)} + \frac{Y_P h_P}{(1-\nu_P^2)} \right]} \quad (31)$$

### 3 MODELO DEL RECOLECTOR 3D

El modelo 3D es similar al recolector del trabajo (Vera et. al 2022). Para el software COMSOL Multiphysics® (versión 5.5, COMSOL, Burlington, MA, USA) se requieren el cálculo de matrices  $\mathbf{c}$  tensor elástico y  $\mathbf{e}$  tensor de acoplamiento electromecánico según las siguientes definiciones  $\mathbf{c} = \mathbf{s}^{-1}$  y  $\mathbf{e} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{s}^{-1}$ .

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1680 & 0 & 0 \\ 0 & 1680 & 0 \\ 0 & 0 & 1402 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ F \\ m \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.08 & 0 & 0 \\ -1.85 & -1.85 & 7.855 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ m^2 \end{bmatrix} \quad (32, 33)$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 8.23 \cdot 10^{10} & 3.60 \cdot 10^{10} & 3.29 \cdot 10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ 3.60 \cdot 10^{10} & 8.23 \cdot 10^{10} & 3.29 \cdot 10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ 3.29 \cdot 10^{10} & 3.29 \cdot 10^{10} & 7.10 \cdot 10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.48 \cdot 10^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.48 \cdot 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.32 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} [Pa] \quad (34)$$

Las dimensiones del recolector se indican en la Tabla 1

Sustrato (Brass)		PZT 5H	
$Y_B$	97 GPa	$Y_P$	8.23 GPa
$\rho_B$	7850 kg/m <sup>3</sup>	$\rho_P$	7500 kg/m <sup>3</sup>
$\nu_B$	0.31	$\nu_P$	0.31
$d_B$	41 mm	$d_P$	22 mm
$h_s$	0.1 mm	$h_P$	0.1 mm
----	----	$d_{31}$	125 x 10 <sup>-12</sup> C/m <sup>2</sup>

Tabla 1: Valores mecánicos y estructurales del recolector

### 4 RESULTADOS

El recolector consiste en un buzzer empotrado en toda su circunferencia, al que se le incorpora una masa M para aumentar la deformación en resonancia. En la Tabla 2 a) y b) se indican las dimensiones geométricas de la masa para valores de M = 9.25 gr. y de M = 8 gr. respectivamente, mientras que en las Figuras 2 a) y b) y 3 a) y b) se muestra el 1° modo flexional y el mallado del modelo 3D. La resistencia de carga R = 10 kΩ en todos los casos, mientras que la aceleración es de 1 G.

Caso 1 (a)		Masa	Caso 2 (b)		Masa
$d_m$	10 mm	9.25 gr	$d_m$	10 mm	8 gr
$h_m$	15 mm		$h_m$	9.6 mm	
$d_{mc}$	0		$d_{mc}$	6 mm	
$h_{mc}$	0		$h_{mc}$	5 mm	

Tabla 2 a) y b): Dimensiones de M para cada caso de estudio

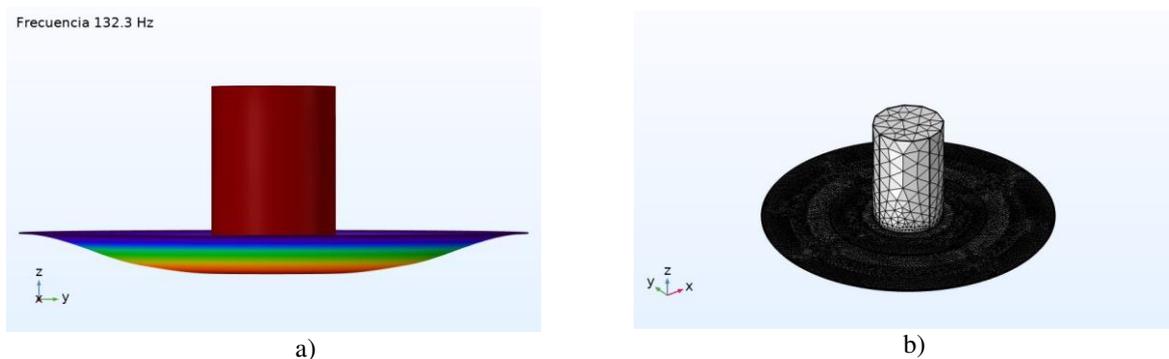


Figura 2 a) y b): 1° modo y malla para el caso de M = 9.25 gr.

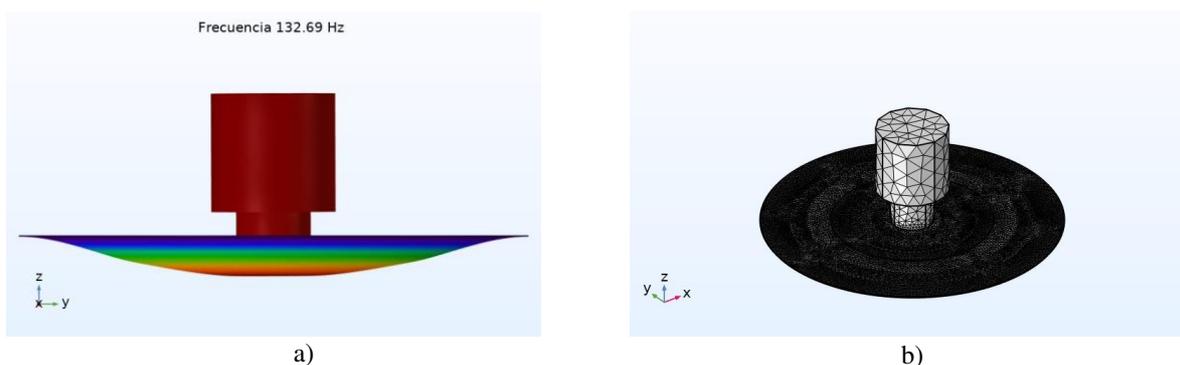


Figura 3 a) y b): 1° modo y malla para el caso de M = 8 gr.

Los valores obtenidos con el modelo 3D para el primer modo flexional son comparados con los resultados analíticos. En este primer cálculo no intervienen la parte eléctrica y solo se considera la relación constitutiva del piezoeléctrico. La Tabla 3) muestra la comparación entre ambos modelos, observando una muy buena concordancia para los valores de frecuencia.

Caso a) M = 9,25 gr.		Caso b) M = 8 gr.	
Analítico 1D	COMSOL 3D	Analítico 1D	COMSOL 3D
132.11 Hz	132.3 Hz	132.24 Hz	132.69 Hz

Tabla 3): Valores de frecuencia para el 1° modo flexional modelo analítico 1D y COMSOL 3D

A los efectos de validar el modelo analítico 1D, se compara la respuesta dinámica del recolector de energía con los resultados del modelo 3D COMSOL. Estas comparaciones consisten en la obtención de la respuesta en frecuencia para la generación de voltaje, respuesta en frecuencia del desplazamiento y la configuración deformada del recolector en resonancia.

La respuesta en frecuencia de generación de voltaje se muestra en las Figuras 4 a) y b). Para el Caso 1, la generación del modelo 1D (curva azul) llega a un máximo de 18,36 V, con una muy buena aproximación con el modelo 3D, tanto en resonancia como fuera de ella. En tanto para el Caso 2, la generación del modelo analítico es un ligeramente mayor. En este caso, la generación llega a un valor pico de 16,1 V, la cual es menor al valor máximo del Caso 1. Sin embargo, se puede observar un mayor ancho de banda. Este comportamiento se debe a que el Caso 2 posee una masa inferior al caso 1 para una misma frecuencia resonante.

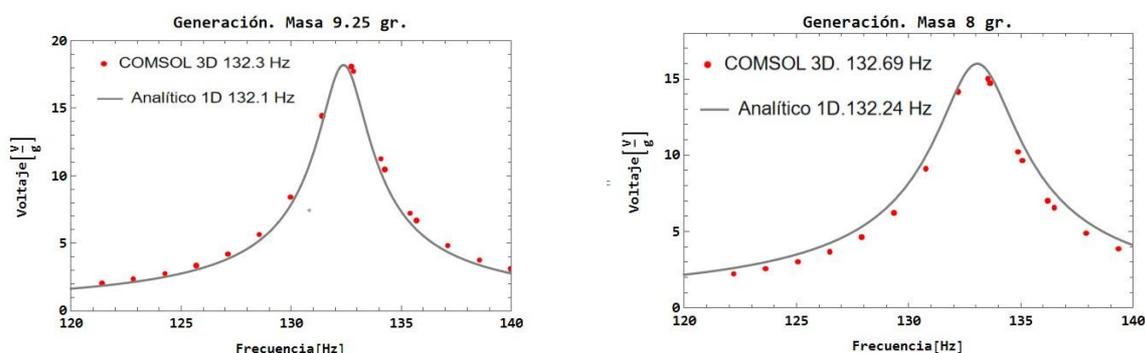


Figura 4 a) y b): Respuesta en frecuencia de voltaje. Casos 1 y 2. Analítico 1D y COMSOL 3D. R = 10 kΩ

La Figura 5 a) y b) muestra la comparación del desplazamiento máximo, ubicado en el centro del recolector. De igual forma que en análisis anterior, se observa una muy buena convergencia entre el modelo 1D y 3D para el caso 1 ( $M = 9.25\text{gr.}$ ). Para el caso 2 ( $M = 8\text{gr.}$ ), el desplazamiento 1D ajusta correctamente con el modelo 3D fuera de resonancia, mientras que en condición resonante arroja valores inferiores al modelo 3D. Para el Caso 2 se observa una disminución del desplazamiento máximo en comparación con el Caso 1, debido a la disminución de la masa.

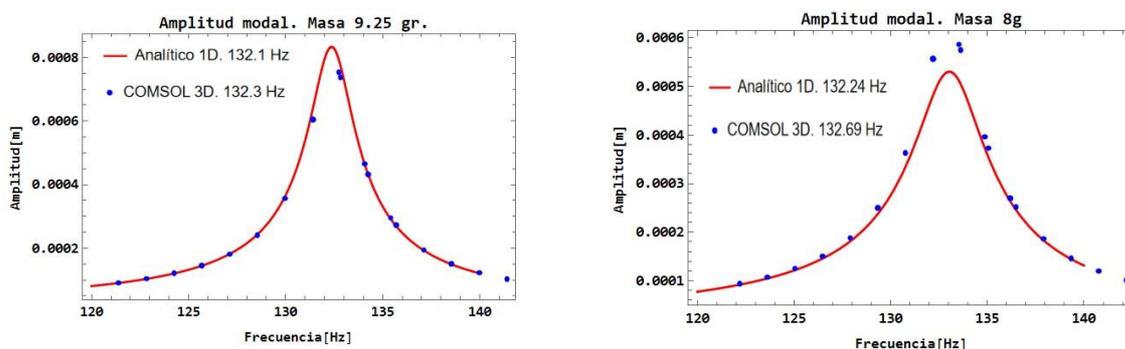


Figura 5 a) y b): Amplitud modal. Casos 1 y 2. Analítico 1D y COMSOL 3D. R = 10 kΩ

Por último, la configuración deformada del buzzer es comparada entre ambos modelos con la idea de observar la girdización producida por la masa. Las Figura 6 a) y b) muestra el desplazamiento en la mitad del buzzer obtenida para cada modelo 1D y 3D. Como puede apreciarse, el modelo 1D analítico captura de buena manera cambio de rigidez provocado por

la masa y por el piezoeléctrico. Se pone especial énfasis, en que la forma deformada y directamente proporcional al modo de vibración propuesto en el modelo 1D, el cual influye directamente sobre el valor del acoplamiento piezoeléctrico que se calcula con la ecuación Ec. (30).

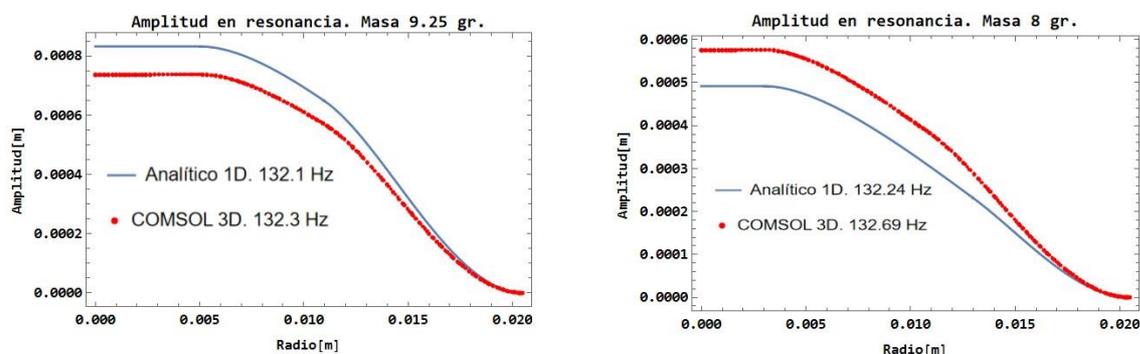


Figura 6 a) y b): Desplazamiento en resonancia. Casos 1 y 2. Analítico 1D y COMSOL 3D.  $R = 10 \text{ k}\Omega$

## 5 CONCLUSIONES

Se presentaron estudios numéricos de un modelo analítico unidimensional (1D) de un dispositivo recolector de energía de geometría circular (buzzer) con una masa de oscilación agregada en su centro geométrico para mejorar la generación de voltaje. El modelo 1D es comparado y validado con simulaciones numéricas por el método de elementos finitos a través de un modelo construido bajo la plataforma COMSOL Multiphysics. La condición de borde considerada fue de empotramiento a lo largo de toda la circunferencia.

La solución analítica para las formas modales responde a las clásicas funciones de Bessel, con la particularidad de que el modelo se considera constituido por tres secciones que tienen en cuenta al sustrato, al PZT 5 H y a la masa de oscilación. Condiciones de compatibilidad mecánica entre las tres secciones permiten dar solución al problema de autovalores de manera muy sencilla y adecuada.

Los estudios se centraron en la obtención de la respuesta en frecuencia para la generación de voltaje, en el cálculo de la amplitud de desplazamiento modal y en el gráfico de la curva de amplitud del desplazamiento en resonancia. Se realizaron estudios para dos geometrías diferentes de la masa de oscilación, con la consiguiente variación de la masa de estas. En ambos casos de estudio la excitación armónica fue de 1 G, con una resistencia de carga de  $10 \text{ k}\Omega$ . A partir de la comparación entre los dos casos propuestos, se concluye que es posible sintonizar el dispositivo modificando el área de contacto de la masa con el buzzer. A partir de la reducción del área, disminuye la masa y la generación obtenida en resonancia también disminuye. Sin embargo, se observa un aumento del ancho de banda lo que mejora la condición resonante ante una variación de la frecuencia de excitación.

Los valores de frecuencias de resonancia, generación y desplazamientos modales que se obtuvieron con el modelo analítico 1D tienen una muy buena concordancia con los que se obtuvieron desde el modelo 3D de COMSOL. Esto supone a priori, que el modelo analítico propuesto es apropiado para avanzar en modelos que consideren condiciones de borde diferentes y que tengan en cuenta problemas que no solo dependan del radio del dispositivo, sino también de la coordenada angular.

A futuro, se pretende avanzar con el modelo analítico 1D para dispositivos de geometría circular que consideren condiciones particulares para su vinculación, diferentes a la del empotramiento a lo largo de toda su circunferencia.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Facultad Regional Bahía Blanca - Universidad Tecnológica Nacional; a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y a la Comisión de Investigaciones Científicas (CIC) de la Provincia de Buenos Aires.

## REFERENCIAS

- Cetin, H, G, Sümer, B. A flexible piezoelectric energy harvesting system for broadband and low-frequency vibrations. *Procedia Eng.* 120 - 345 – 348, 2015
- Chen X R, Yang T Q, Wang W and Yao X. Vibration energy harvesting with a clamped piezoelectric circular diaphragm. *Ceram. Int.* 38 S271–4, 2012.
- Dutoit N. E., Wardle B. L. and Kim S-G. Design vibration energy harvester. *Integr. Ferroelectr.* 121 – 60, 2005.
- Erturk A. and Inman D. J. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. *Smart Materials and Structures*, 18(2), 2009.
- Erturk A. and Inman D. J. Piezoelectric Energy Harvesting. Wiley, Chichester, United Kingdom, 2011.
- Febbo M, Machado SP. Recolector piezoeléctrico para unidad de sensado autónomo de fuego, *MECOM 2022*, págs. 871-880, Bahía Blanca, Argentina, 2022.
- Kim S, Clark W W and Wang Q-M. Piezoelectric energy harvesting with clamped circular plate: experimental study. *J. Intell Mater. Syst. Struct.* 16 855-63. 2004.
- Li H D, Tian C and Deng Z D. Energy harverting from low frequency applicattions using piezoelectric materials. *App. Phys. Rev.* 1 20. 2014
- Li S. and Chen S. Analytical analysis of a circular PZT actuator for valveless micropumps. *Sensors Actuators A* 104 151–61, 2003.
- Palosaari J., Leinonen M., Juuti J., Hannu J. and Jantunen H. Piezoelectric circular diaphragm with mechanically induced pre-stress for energy harvesting. *Smart Materials Structure*, 23, 085025, 2014.
- Reddy J. N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. (Boca Raton, FL: CRC Press), 2006.
- Timoshenko S. P. and Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. (New York: McGraw-hill) pp 51–9, 1959.
- Vera C, Febbo M, Machado S. Estudios paramétricos de un recolector de energía que utiliza piezoeléctricos de geometría circular. *MECOM 2022*, págs. 921-930 Bahía Blanca, Argentina, 2022
- Yang Y., Li Y., Guo Y., Xu B. -X and Yang T. Improved vibration-based energy harvesting by annular mass configuration of piezoelectric circular diaphragms. *Smart Materials Structure*. 27, 2018, 035004 (9pp), 2018.
- Yang Y., Wang S., Stein P., Xu B. -X. and Yang T. Vibration-based energy harvesting with a clamped piezoelectric circular diaphragm: analysis and identification of optimal structural parameters. *Smart Materials Structure*. 26, 2017, 045011 (17pp), 2017.
- Yu H, Zhou J L, Deng L C and Wen Z Y. A vibration-based MEMS piezoelectric energy harvester and power conditioning circuit. *Sensors*. 14 3323-41.2014