

## UN MODELO EVOLUTIVO CONTINUO-DISCRETO PARA LA DETERMINACIÓN DE FLUJOS VEHICULARES EN REDES URBANAS CONGESTIONADAS

### A CONTINUOUS-DISCRETE EVOLUTIONARY MODEL FOR THE DETERMINATION OF TRAFFIC FLOW IN CONGESTED URBAN NETWORKS

Víctor H. Cortínez<sup>a,b,c</sup>, Patricia N. Dominguez<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional, 11 de abril 461, Argentina; [vcortine@hotmail.com](mailto:vcortine@hotmail.com)

<sup>b</sup> Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, B. Blanca, Argentina, [pdoming@uns.edu.ar](mailto:pdoming@uns.edu.ar)

<sup>c</sup> CONICET

**Palabras clave:** *Asignación de tráfico urbano, congestión, modelo continuo-discreto, algoritmo Physarum.*

**Resumen.** La red de transporte en grandes ciudades se puede concebir como un sistema de autopistas superpuesto sobre una red densa de calles superficiales. Esto conduce, naturalmente, a una modelación de la misma mediante un enfoque continuo-discreto en el cual las autopistas se modelan de manera detallada en forma discreta y el resto de las calles mediante un continuo. Tales subsistemas están conectados en algunos puntos (rampas). En este trabajo se propone un modelo evolutivo continuo-discreto desarrollado a partir del modelo Physarum, para resolver el problema de asignación de tráfico en este tipo de redes. Se describe la formulación teórica y se presentan ejemplos numéricos de aplicación.

**Keywords:** *Urban traffic assignment, congestion, continuous-discrete model, Physarum algorithm.*

**Abstract.** The transportation network in large cities can be conceived as a system of highways superimposed on a dense network of surface streets. This naturally leads to its modeling using a continuous-discrete approach where highways are appropriately modelled in a discrete form, and the remaining dense surface streets as a two dimensional continuum. These two sub-system are connected at some points (ramps). This work proposes a continuous-discrete evolutionary model developed with the help of the Physarum algorithm to solve the traffic assignment problem in this type of network. The theoretical formulation is described, and numerical application examples are presented.

## 1 INTRODUCCIÓN

La congestión del tráfico urbano constituye uno de los problemas principales de las grandes ciudades. Se refiere a la disminución de la velocidad de transporte de los habitantes de la ciudad para cumplir con sus viajes habituales. Asimismo, está íntimamente relacionado con el problema de contaminación urbana considerando que los motores de los vehículos constituyen importantes fuentes de ruido y de emisiones gaseosas. Para mitigar la congestión existen diferentes alternativas que involucran modificaciones de la red de tráfico tales como cambios de sentido de circulación, semaforización, prohibición de estacionamientos en las calles, construcción de nuevos tramos, restricción de velocidad, etc. Para evaluar el efecto de tales modificaciones de diseño debe procurarse estimar la elección de rutas por parte de los usuarios y, entonces, los flujos vehiculares esperados en cada tramo de la red. Tal estimación se conoce con el nombre de asignación de tráfico y, en condiciones de equilibrio estático, se basa en el primer principio de Wardrop (Boyles et al. 2022). Dicho principio establece que los usuarios eligen la ruta hacia un determinado destino de manera tal de minimizar su propio tiempo de viaje que, consecuentemente, corresponde a una función potencial. Uno de los enfoques más utilizados para abordar tal cuestión está basado en la formulación de Beckmann (Sheffi, 1985), que constituye un problema de optimización cuyas incógnitas son los flujos de cada arco. La carga computacional para resolver este problema se incrementa con la cantidad de nodos de la red y puede ser de gran importancia para modelar redes urbanas modernas, especialmente en el contexto de diseño óptimo (o modificaciones) de la red ya que el problema de asignación debe resolverse muchas veces. Por tal motivo, importantes esfuerzos de investigación se han dirigido al desarrollo de metodologías apropiadas (Florian et al., 2009; Lotito, 2006; Jafari et al., 2017).

En los últimos años ha surgido un enfoque promisorio para resolver dicho problema denominado algoritmo Physarum que está basado en una analogía biológica con el comportamiento de aprovisionamiento de alimento del organismo biológico Physarum polycephalum (Tero et al., 2007). Tal enfoque fue propuesto inicialmente para resolver el problema del camino más corto entre nodos de una red y recientemente fue extendido hacia otros problemas, en particular para el problema de asignación (Xu et al., 2018; Zhang, 2018; Cortínez y Domínguez, 2021; Domínguez et al., 2021). Dicho enfoque constituye un método iterativo y ha mostrado una eficiencia adecuada para la determinación de flujos de transporte en redes congestionadas y se muestra apto para programación en paralelo.

Más allá de la eficiencia de los diferentes enfoques de solución, la carga computacional para grandes redes de transporte puede ser muy grande, por lo cual se han ideado enfoques para reducir el número de incógnitas (Raadsen et al., 2020). En particular, se han desarrollado modelos continuos de transporte que consisten en aproximar una red densa de calles como un medio continuo bidimensional en el cual las variaciones de los patrones de tráfico en regiones adyacentes son pequeñas comparadas a las diferencias en el sistema entero (Sasaki et al., 1990; Wong et al., 2003; Domínguez, 2013). Consecuentemente, se pueden utilizar funciones continuas para representar flujos y tiempos de viaje. Tal formulación conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales cuya solución puede determinarse mediante el método de elementos finitos. Sin embargo, la naturaleza de dichas ecuaciones produce ciertas inestabilidades numéricas que conllevan a la investigación de métodos apropiados para su solución (Wong et al., 1998). En particular, la estrategia Physarum previamente mencionada se ha sugerido como una metodología eficiente para la versión continua del problema de asignación (Cortínez y Domínguez, 2018).

De todas maneras, las redes de transporte en grandes ciudades pueden concebirse como la superposición de dos sistemas: a) un sistema de autopistas superpuestas a b) una red densa de calles, lo que conduce naturalmente a la modelización de las primeras mediante una red discreta que interactúa con el segundo subsistema modelado como un sistema continuo (Yang et al., 1994; Du et al., 2016; Cortínez y Dominguez, 2017).

En este trabajo se presenta la estrategia Physarum para resolver el problema de asignación en redes mixtas continuas-discretas. Se describe la formulación teórica y se presentan ejemplos numéricos de aplicación.

## 2 PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE TRÁFICO: FORMULACIÓN DE BECKMAN

Se considera una red de tráfico urbana en la hora pico, tal como la que se muestra en la Figura 1a, cuando los viajes se generan en los hogares distribuidos en la ciudad y se dirigen hacia determinados puntos de destino  $d$  ( $d=1, 2, \dots, Nd$ ).

El sistema de transporte en la ciudad consiste en dos tipos de caminos: a) una red densa de calles superficiales y b) una red de autopistas. Las autopistas se conectan a los centros de destino y a las calles superficiales a través de un número limitado ( $M_j$ ) de puntos de intercambio o rampas. Asimismo se supone que la red de calles superficiales es tal que para cada calle en un sentido existe otra en sentido opuesto.

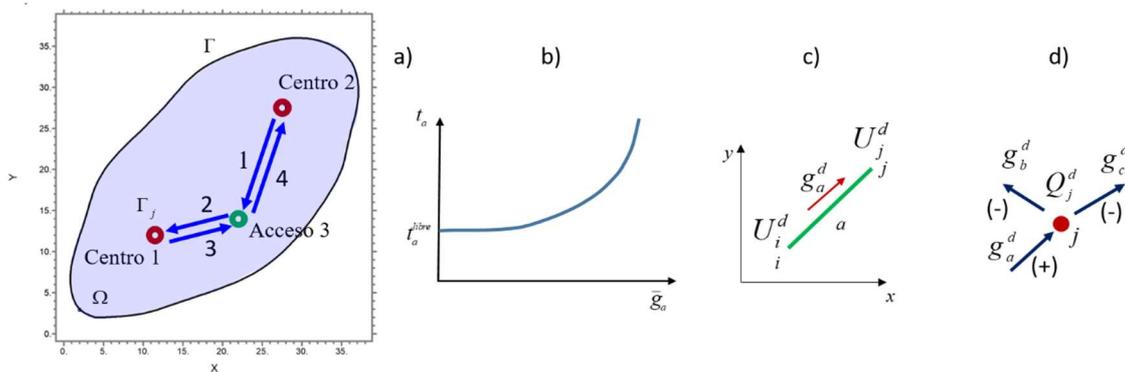


Figura 1: a) Esquema básico de la red de transporte, b) función de costo en un arco, c) flujo de arco entre nodos ( $U_i^d > U_j^d$ ) y d) flujos concurrentes en un nodo de la red.

El problema de asignación de tráfico consiste en determinar los flujos vehiculares horarios,  $\bar{g}_a$  (veh/h) en cada segmento  $a$  ( $a=1,2,\dots,N_a$ ) de las autopistas de la red de tráfico y el flujo superficial  $\mathbf{f}$  (veh/h/km) del entramado de calles, a partir del conocimiento de la localización de los centros de destino, de la estructura de la red de tráfico y de las tasas horarias de viajes  $q^d(x, y)$  (veh/h/km<sup>2</sup>) generados en la ciudad para los usuarios que se dirigen hacia el destino  $d$ . El flujo total en cada tramo de autopista es igual a la suma de los flujos que utilizan el arco dirigiéndose a cada destino:

$$\bar{g}_a = \sum_{d=1}^{Nd} g_a^d \tag{1}$$

De manera similar, el flujo superficial en un punto dado del entramado de calles se puede expresar como:

$$\mathbf{f} = \sum_{d=1}^{Nd} \mathbf{f}^d \tag{2}$$

En cada tramo de autopista, el tiempo de viaje se establece mediante una función empírica del flujo en el arco:

$$t_a = H_a(\bar{g}_a) \quad (3)$$

Esta función, conocida como “función de costo” pone de manifiesto el efecto de la congestión ya que corresponde a una función creciente del tiempo de viaje con respecto al flujo en el arco, partiendo de un valor mínimo denominado “tiempo a flujo libre” (Figura 1b). Existen diversas expresiones para tal función y particularmente la conocida fórmula BPR (Sheffi, 1985):

$$t_a = l_a / V_a (1 + \alpha(\bar{g}_a / C_a)^\rho) \quad (4)$$

donde  $l_a$  y  $V_a$  corresponden a la longitud y la velocidad a flujo libre (sin congestión) en el tramo. De manera similar, en la red de calles representada por el dominio continuo, el tiempo de viaje por unidad de longitud  $c(x, y)$  es también una función creciente de la intensidad del flujo superficial (Wong et al., 2003):

$$c(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \left( \sum_{d=1}^{Nd} |\mathbf{f}^d(x, y)| \right)^{\gamma(x, y)} \quad (5)$$

donde las funciones  $a$ ,  $b$  y  $\gamma$  se obtienen empíricamente a partir de la estructura de la red de calles (Sasaki, 1990; Dominguez, 2013; Cortínez y Dominguez, 2017) y

$$|\mathbf{f}^d| = \sqrt{(f_x^d)^2 + (f_y^d)^2}.$$

El problema de asignación de tráfico en condiciones de equilibrio para el sistema mixto continuo-discreto considerado puede formularse como uno de optimización (formulación de Beckman-Sheffi, 1985; Yang et al., 1994; Wong et al., 2003; Du, 2016):

$$\min F(g_a^d, \mathbf{f}^d) = \sum_a \int_0^{\bar{g}_a} H(z) dz + \int_\Omega a \sum_{d=1}^{Nd} |\mathbf{f}^d| + \frac{b}{\gamma+1} \left( \sum_{d=1}^{Nd} |\mathbf{f}^d| \right)^{\gamma+1} \quad (6)$$

s.a:

$$\nabla \cdot \mathbf{f}^d = q^d \quad (7)$$

$$\mathbf{f}^d \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma \quad (8)$$

$$\sum_{a \in M_j} \pm g_a^d + Q_j^d = 0 \quad j = 1, 2, \dots, Nn \quad d = 1, 2, \dots, Nd \quad (9)$$

$$Q_j^d = - \oint_{\Gamma_j} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad j = 1, 2, \dots, Nn \quad d = 1, 2, \dots, Nd \quad (10)$$

donde  $\mathbf{n}$  denota los versores normales externos a los contornos  $\Gamma$  y  $\Gamma_j$  ( $j=1, 2, \dots, Nn$ ). La restricción (7) corresponde a la continuidad de vehículos en cada punto del continuo que representa el entramado denso de calles, la (8) indica que se considera flujo nulo en el borde externo de la ciudad, la (9) corresponde a la continuidad de vehículos en cada acceso a la autopista teniendo en cuenta que  $Q_j^d$  es el flujo de intercambio entre discreto y continuo que está definido mediante (10).  $Q_j^d$  es positivo cuando se dirige hacia la

autopista. El signo  $+(-)$  en (9) corresponde a  $g_a^d$  entrando a (saliendo de) la autopista.

### 3 FORMULACIÓN ALGEBRAICA-DIFERENCIAL DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

Es posible transformar el problema de optimización anterior en un sistema equivalente de ecuaciones algebraicas y diferenciales. Para ello debe generalizarse el funcional  $F$  (6) incorporando en el mismo las restricciones de continuidad con ayuda de multiplicadores de Lagrange  $u^d(x, y)$  y  $U_j^d$ :

$$F = \sum_a \int_0^{\bar{g}_a} H(z) dz + \int_{\Omega} a \sum_{d=1}^{Nd} |\mathbf{f}^d| + \frac{b}{\gamma + 1} \left( \sum_{d=1}^{Nd} |\mathbf{f}^d| \right)^{\gamma + 1} + \sum_{d=1}^{Nd} u^d (\nabla \cdot \mathbf{f}^d - q^d) + \sum_{d=1}^{Nd} \sum_{j=1}^{Nn} U_j^d \left( \sum_{a \in M_j} \pm g_a^d - \oint_{\Gamma_j} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{n} d\Gamma \right) \tag{11}$$

Efectuando un cálculo variacional similar al realizado por Du et al., (2016) es posible llegar al siguiente sistema de ecuaciones de Euler del funcional anterior:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^d &= - \frac{|\mathbf{f}^d|}{c} \nabla u^d \\ \nabla \cdot \mathbf{f}^d &= q^d \\ g_a^d &= \xi_a^d g_a^d \frac{U_i - U_j}{t_a}, \quad \xi_a^d = \begin{cases} 1 & \bar{\lambda}_{ij} (U_i^d - U_j^d) > 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_{ij} (U_i^d - U_j^d) \leq 0 \end{cases} \\ \sum_{a \in M_j} \pm g_a^d + Q_j^d &= 0 \\ Q_j^d &= - \oint_{\Gamma_j} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ U_j^d &= u^d(x_j, y_j) \\ u^d(x_d, y_d) &= 0 \end{aligned} \tag{12 a,...,g}$$

La condición 12a) indica que el flujo de tráfico superficial  $\mathbf{f}^d$  es paralelo al gradiente del multiplicador de Lagrange  $u^d$  y que  $c = |\nabla u^d|$ . Esto quiere decir que la norma del gradiente de  $u^d$  es independiente del destino  $d$ :  $|\nabla u^1| = |\nabla u^2| = \dots = |\nabla u^{Nd}|$ . De igual manera 12c) implica que  $t_a = t_a^d = U_i^d - U_j^d$  es independiente del destino considerado:  $U_i^1 - U_j^1 = U_i^2 - U_j^2 = \dots$ , siempre que el flujo hacia el destino considerado pase por el tramo que se analiza. Esto, más las expresiones 12e) y 12f) definen a  $u^d(x, y)$ , y por consiguiente a  $U^d$ , como el tiempo de viaje de equilibrio desde un punto  $(x, y)$  hacia el destino  $d$ . En 12c) el coeficiente  $\xi_a^d$  se incorpora para asegurar que el tiempo de viaje decrece en la dirección permitida ya que  $\bar{\lambda}_{ij}$  es igual a 1 si el sentido de circulación es de  $i$  hacia  $j$  y -1 si va en sentido contrario (Figura 1c).

La solución numérica del sistema algebraico-diferencial (12) presenta ciertas dificultades tanto por su carácter no lineal como por el hecho de indeterminarse para flujos muy bajos (zonas con calles descongestionadas). Tales dificultades son salvadas

apropiadamente con el enfoque que se presenta en la siguiente sección.

#### 4 SOLUCIÓN ITERATIVA MEDIANTE EL ENFOQUE PHYSARUM

Para la solución del sistema (12) se propone una extensión del método Physarum que inicialmente fue desarrollado a partir de una analogía biológica. Los autores (Cortínez y Dominguez, 2018; Dominguez et al., 2021) han demostrado recientemente que dicha metodología corresponde a una solución evolutiva de una formulación alternativa del problema de Beckman basado en ecuaciones algebraicas. Tal enfoque adaptado al problema de asignación continuo-discreto, formulado mediante el sistema (12), parte de la aproximación inicial de  $|\mathbf{f}|^d$  y  $c$  como  $R^d$  y  $l$  respectivamente en 12a),  $g_a^d \xi_a^d$  y  $t_a$  como  $D_a^d$  y  $L_a$ , respectivamente en 12c) y de  $Q_j^d$  en 12e). Con tales aproximaciones el sistema (12) puede ser reformulado aproximadamente de la siguiente manera:

$$\sum \frac{D_a^d}{L_a} (U_i^d - U_j^d) + Q_j^d = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot K^d \nabla u^d + q^d &= 0 \\ u^d(x_j, y_j) &= U_j^d, \quad u^d(x_d, y_d) = 0 \end{aligned} \quad (14a, c)$$

donde  $K^d = R^d / l$ . Se resuelven, en primer lugar los sistemas lineales (13) para cada destino  $d$ , obteniendo una aproximación a  $U_j^d$ , luego se resuelven los problemas diferenciales (14) para cada destino  $d$  (mediante el método de elementos finitos) obteniendo una aproximación a  $u^d(x, y)$ . Con los tiempos de viaje obtenidos pueden obtenerse aproximaciones para los flujos (en las autopistas y en la red de calles) como:

$$\left( g_a^d \right)_{ap} = \frac{D_a^d}{L_a} (U_i^d - U_j^d) \xi_a^{d,nuevo} \quad (15)$$

$$\left( \mathbf{f}^d \right)_{ap} = -K^d \nabla u^d \quad (16)$$

donde  $\xi_a^{d,nuevo}$  es la nueva aproximación de  $\xi_a^d$ . Luego, se obtienen actualizaciones para  $D_a, L_a, R^d, l, K^d$  y  $Q_j^d$  de la siguiente manera:

$$\left( D_a^d \right)_{nuevo} = \left( D_a^d + \left| \left( g_a^d \right)_{ap} \right| \right) / 2 \quad (17)$$

$$\left( L_a \right)_{nuevo} = \left( L_a + H_a \left( \sum_{d=1}^{Nd} \left| g_a^d \right|_{ap} \right) \right) / 2 \quad (18)$$

$$\left( R^d \right)_{nuevo} = \left( R^d + \left| \left( \mathbf{f}^d \right)_{ap} \right| \right) / 2 \quad (19)$$

$$\left( l \right)_{nuevo} = \left( l + c \left( \sum_{d=1}^{Nd} \left| \left( \mathbf{f}^d \right)_{ap} \right| \right) \right) / 2 \quad (20)$$

$$\left(K^d\right)_{\text{nuevo}} = \frac{R_a}{l} \quad (21)$$

$$\left(Q_j^d\right)_{\text{nuevo}} = -\oint_{\Gamma_j} \mathbf{f}_{ap}^d \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (22)$$

Con los nuevos valores (17-22), se reformula el sistema (13-16) y se resuelve en forma iterativa hasta que los valores de los tiempos de viaje  $u^d$  y  $U_j^d$  converjan.

## 5 EJEMPLO NUMÉRICO

Para ejemplificar la metodología descrita, se presenta una ciudad de aproximadamente 790 km<sup>2</sup> tal como la de la Figura 1a), originalmente con una distribución de calles superficiales, sin autopistas. Se estudia el comportamiento de la red en una hora pico de la mañana cuando el flujo vehicular originado en los hogares se dirige hacia los centros 1 y 2, siendo las demandas de viajes  $q_1=q_2=50$  veh/h/km<sup>2</sup>, generando en total 39600 veh/h hacia cada uno de los destinos. Se adopta una velocidad máxima de circulación de 60 km/h y los siguientes valores para la función de costo:  $a=1/60$ ,  $b=0.21e-5$  y  $\gamma = 1.2$  (Wong et al., 2003).

Tal problema se analiza con la metodología propuesta utilizando (14), (16) y (19) a (21). En la Figura 2 se muestran algunos resultados tales como el tiempo de viaje  $u^l$  hacia el destino 1 desde todos los puntos de la ciudad (Figura 2a) y la densidad de flujo total (Figura 2c). Asimismo, en la Figura 2b) se puede apreciar el tiempo de viaje hasta el destino 1 desde diferentes puntos de un determinado trayecto para las últimas 2 iteraciones.

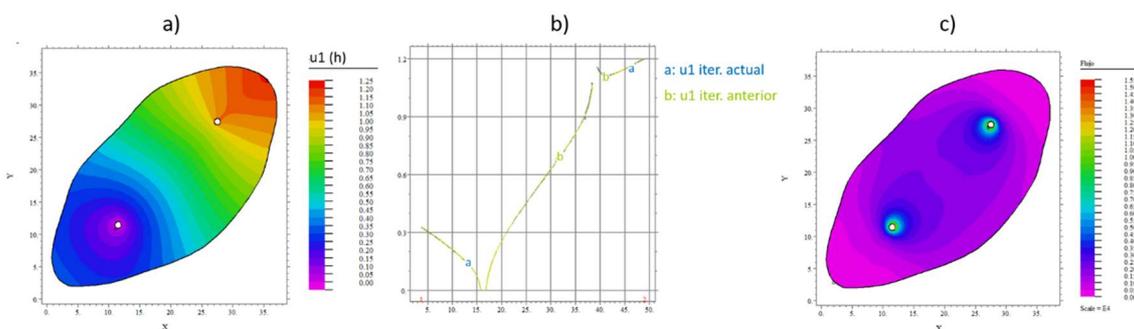


Figura 2: a) tiempo de viaje hacia el destino 1, b) ídem sobre un recorrido, c) densidad de flujo.

A continuación, se incorporan a la red original 4 tramos de autopistas, dos en un sentido y dos en sentido contrario que unen ambos destinos, añadiendo también un punto de intercambio con la red densa de calles (Acceso 3 en la Figura 1a). El tiempo de viaje en los tramos de autopistas se calcula mediante la fórmula BPR (4) para la cual se adoptan los siguientes valores (iguales en todos ellos): velocidad a flujo libre  $V_a = 120 \text{ km/h}$ , capacidad  $C_a = 10000 \text{ veh/h}$ ,  $\alpha = 0.15$  y  $\varphi = 4$ . En las Figuras 3 y 4 se muestran los resultados obtenidos a partir de enfoque propuesto para tiempos de viaje sobre diferentes trayectos hacia los destinos 1 y 2, comparándolos con los de la red sin autopistas.

Como se puede apreciar, desde los puntos más alejados hasta dichos destinos, el tiempo de viaje se reduce a la mitad en el primer caso (Figura 3a) y en un 46% en el segundo (Figura 3b). Prácticamente las mismas diferencias se observan en otro trayecto, tal como se puede ver en la Figura 4. Esta reducción en los tiempos de viaje se debe a

que, prácticamente, el 40% de los viajes generados llegan a sus destinos por las autopistas (Figura 5b), descongestionando las calles superficiales. En la Figura 5 se muestra la distribución espacial del tiempo de viaje desde cada punto de la ciudad hasta los centros 1 (Figura 5a) y 2 (Figura 5b).

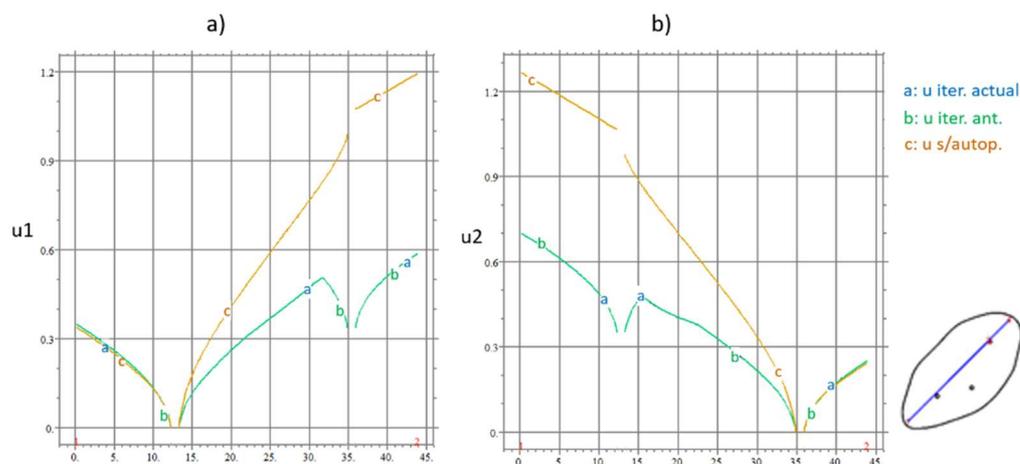


Figura 3: a) tiempo de viaje hacia el destino 1, b) ídem hacia el destino 2.

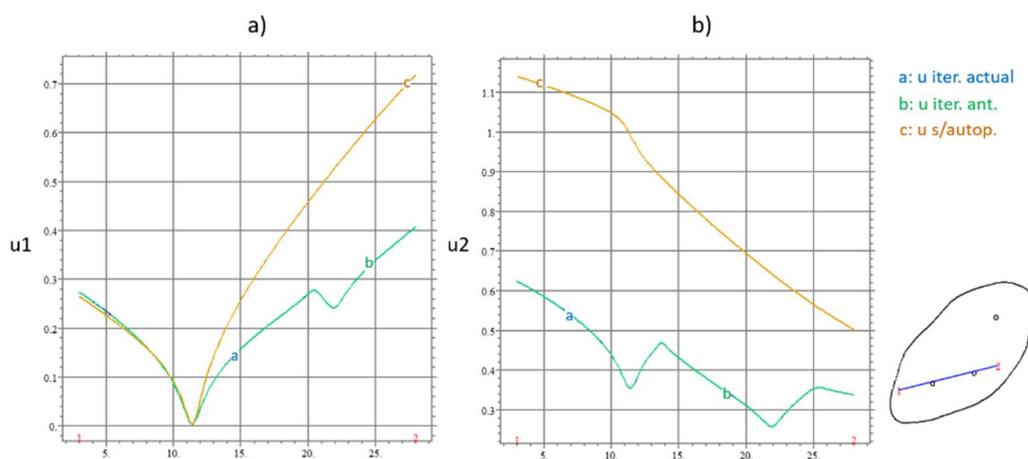


Figura 4: a) tiempo de viaje hacia el destino 1, b) ídem hacia el destino 2.

Por otra parte, en la Figura 6a) se puede ver cómo se direcciona el flujo vehicular hacia el punto de destino 1, mientras que en la Figura 6b) se ve cómo es la circulación hacia el destino 2.

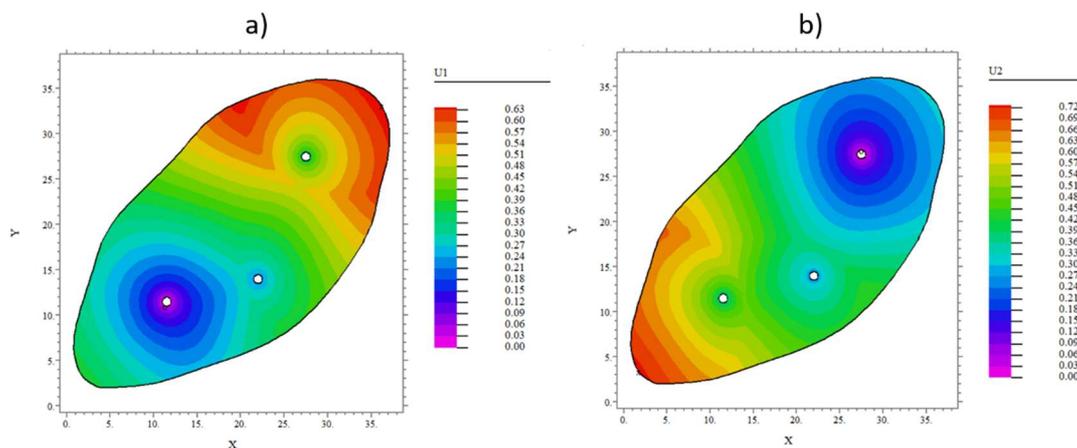


Figura 5: a) tiempo de viaje hacia el destino 1, b) ídem hacia el destino 2.

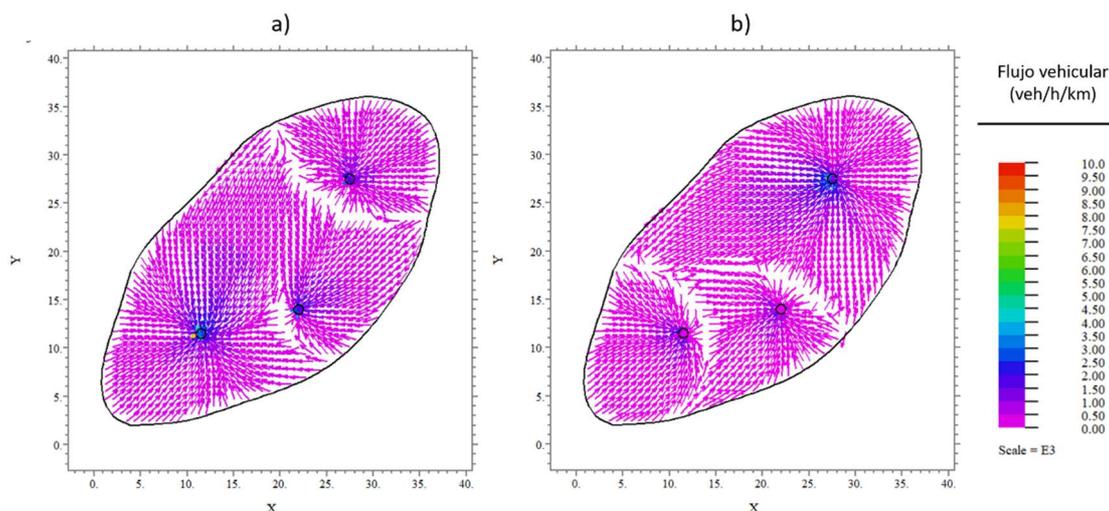


Figura 6: Flujo vehicular a) hacia el destino 1, b) hacia el destino 2.

Finalmente, en la **Figura 7a)** se muestra la evolución (convergencia), en función del número de iteraciones, del tiempo total de viaje  $U$  (km/h) entre puntos de la ciudad y, de igual manera, en la **Figura 7b)** el flujo en los arcos de las autopistas. Como se puede apreciar en ambas figuras, en este ejemplo sencillo, la convergencia se logra en muy pocas iteraciones (5), siendo el tiempo de cálculo menor a 1 segundo por iteración.

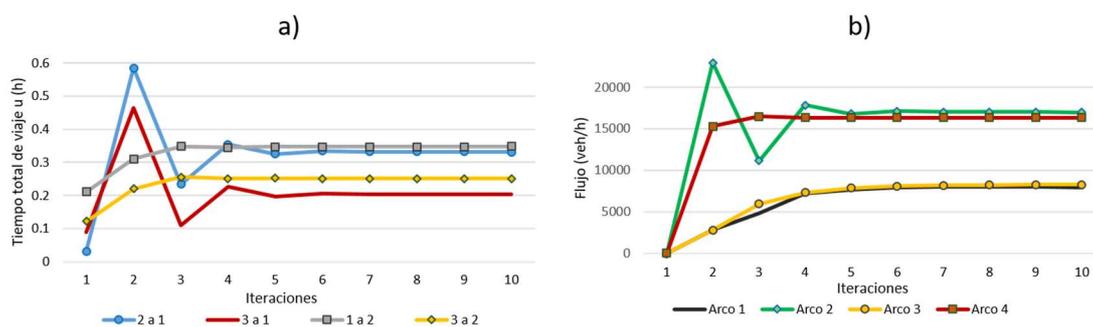


Figura 7: Convergencia de a) Tiempos de recorrido entre puntos de la red de autopistas, b) flujos en los arcos.

Asimismo, es posible apreciar en tales figuras que los flujos en los arcos 2 y 4 superan en más del 50% las capacidades de los mismos, mientras que en los tramos 1 y 3 se mantienen por debajo de ellas. Las velocidades de circulación correspondientes a estos 2 últimos tramos son aproximadamente iguales a 112 km/h mientras que en el tramo 2 es de 53 km/h y en el tramo 4 de 58 km/h.

## 6 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto una extensión del método evolutivo (iterativo) Physarum, para resolver el problema de asignación de tráfico en redes urbanas congestionadas, compuestas por un entramado de calles superficiales y un conjunto de autopistas. Se han presentado ejemplos numéricos para ilustrar la adecuada convergencia del enfoque propuesto.

## 7 BIBLIOGRAFIA

Boyles, S.D., Lownes, N. E. y Unnicrishan, A. *Transportation network Analysis* Volumen I. Ver. 0.90, <https://sboyles.github.io/blubook.html>, 2022.

- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N. An anisotropic continuum model for traffic assignment in mixed transportation networks. *Applied Mathematical Modelling* 50, 340-350, 2017.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N. Una nueva interpretación del modelo Physarum para el problema de asignación de tráfico en equilibrio de usuario. *Mecánica Computacional* XXXVI, 2089-2098, 2018.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N. A finite element approach for the traffic assignment problem. *Transportation Research Procedia* 58, 13–20, 2021
- Dominguez, P. N. *Un nuevo modelo continuo de asignación de tráfico para el diseño óptimo de redes de transporte urbano*. Tesis doctoral, Universidad Nacional del Sur, 2013.
- Du, Y., Wong, S. y Sun, L.J. A Multi-Commodity Discrete/Continuum model for a traffic equilibrium system. *Transportmetrica A: Transport Science*, 12 (3), 249-271, 2016.
- Florian, M., Constantin, I. y Florian, D. A new look at projected gradient method for equilibrium assignment. *J. Trans. Res. Board* (2090), 10-16, 2009.
- Jafari, E., Pandey, V. y Boyles, S. A decomposition approach to the static traffic assignment problem. *Transportation Research part B* 105, 276-296, 2017.
- Lotito, P. Issues in the implementation of the DSD algorithm for the traffic assignment problem. *European Journal of the Operation Research* 175, 1577-1587, 2006.
- Raadsen, M., Bliemer, M. y Bell, M. Aggregation, disaggregation and decomposition methods in traffic assignment: historical perspectives and new trends. *Transportation Research part B* 139, 199-223, 2020.
- Sasaki T., Iida Y., y Yang H. User equilibrium traffic assignment by continuum approximation of network flow. 11th International Symposium of Transportation and Traffic Theory, 233-252. Yokohama, Japan, 1990.
- Sheffi, Y., *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1985.
- Tero, A. Kobayashi, R. and Nakagaki, T. A mathematical model for adaptive transport network in path finding by true slime mold. *Journal of theoretical biology* 244, 553-564, 2007.
- Wong S.C, Lee, C.K. y Tong, C.O. Finite element solution for the continuum equilibrium problems. *International Journal for Numerical Method in Engineering* 43 (7), 1253-1273, 1998.
- Wong S., Du Y., Ho H., y Sun L. A simultaneous optimization formulation discrete/continuous transportation system. *Transportation Research Record* 1857, 11-20, 2003.
- Xu, S., Jiang, W., Deng, X. Y. y Shou, Y. A modified Physarum-inspired model for the user equilibrium traffic assignment problem, *Applied Mathematical Modelling* 55, 340-353, 2018.
- Yang, H., Yagar, S. y Iida, Y. Traffic assignment in congested discrete-continuous transportation system. *Transportation Research* 28B (2), 161-174, 1994.
- Zhang, X. A bio-inspired approach to traffic network equilibrium assignment problem. *IEEE Transactions on cybernetics*, 1304-1315, 2018.