

ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS DE LOS EFECTOS DE SURFACTANTES INSOLUBLES EN ONDAS SUPERFICIALES INDUCIDAS PARAMÉTRICAMENTE

Sebastián Ubal, María D. Giavedoni, Fernando A. Saita

INTEC (UNL – CONICET)
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina
e-mail: subal@ceride.gov.ar

Palabras clave: ondas de Faraday, surfactantes, elementos finitos.

Resumen. *Se denominan ondas de Faraday a las oscilaciones que se generan en la superficie libre de un líquido cuando el soporte sobre el que éste se encuentra es sometido a vibraciones en la dirección vertical^[1]. El fenómeno ha sido ampliamente estudiado en condiciones donde la interfase está libre de tensioactivos^[2]; por el contrario, la influencia de los surfactantes sobre la inestabilidad de Faraday no ha sido demasiado explorada. El presente trabajo examina este aspecto en forma numérica, para el caso particular de ondas bidimensionales. Se resuelven para ello las ecuaciones gobernantes para la fase líquida viscosa y para la interfase, de tipo Newtoniana invíscida, mediante el método de elementos finitos/Galerkin en conjunto con una técnica ALE para el seguimiento del dominio deformable^[3]. Los resultados indican que a medida que aumenta la elasticidad del surfactante, se incrementa la intensidad de vibración necesaria para generar las ondas superficiales. Además, un análisis de las variables de flujo en la interfase revela que existe un desfase temporal entre las variaciones de concentración de tensioactivo y la deformación de la superficie libre, el cual también crece con los efectos elásticos.*

1 INTRODUCCIÓN

Se conoce con el nombre de ondas de Faraday a las oscilaciones inducidas en un líquido debido al movimiento vibratorio en la dirección vertical del recipiente sobre el que se encuentra el fluido. Las condiciones necesarias para la generación de estas ondas dependen básicamente de las propiedades fisico-químicas del líquido y la interfase líquido-gas, de la frecuencia e intensidad de la vibración aplicada, y de las características geométricas del problema.

Este fenómeno fue reportado por primera vez por Faraday (1831)^[1] y ha sido ampliamente estudiado tanto teórica como experimentalmente, en condiciones en las que la interfase se encuentra libre de contaminantes tensioactivos. Miles y Henderson (1990)^[2] brindan una adecuada revisión en este aspecto. Sin embargo, aún cuando el efecto de amortiguación de los agentes tensioactivos en ondas gravitatorio-capilares se conoce desde hace tiempo^{[4],[5]}, existen muy pocos estudios donde se analice la influencia de los surfactantes sobre ondas generadas por excitación paramétrica.

En el contexto de ondas de Faraday, Henderson (1998)^[6] realizó mediciones experimentales en las que examina los efectos de los surfactantes insolubles sobre las tasas de amortiguación, las frecuencias naturales y las amplitudes de ondas axisimétricas. Más recientemente, Kumar y Matar (2002)^[7] analizaron la estabilidad lineal del sistema para el caso de un líquido visco-elástico con un surfactante insoluble en la interfase. Sus únicas soluciones compatibles con la existencia de efectos Marangoni son posibles sólo en el límite de Péclet infinito, con una distribución de surfactante constante en el tiempo, y desfasada espacialmente con la forma de la superficie libre un cierto ángulo, el cual es tratado como un parámetro. Muestran resultados correspondientes al umbral de excitación para algunos valores de los parámetros, hallando que la intensidad de vibración crítica puede disminuir o aumentar respecto de un sistema libre de surfactantes, dependiendo del valor del parámetro de desfasaje antes mencionado. Por otra parte estos mismos autores^[8] estudiaron la estabilidad lineal de un modelo simplificado, válido para longitudes de onda larga, basado en las ecuaciones de lubricación. Encuentran que el umbral de estabilidad aumenta con los efectos elásticos, con las fuerzas capilares, de cuerpo y con la difusividad del surfactante; no obstante, el modelo presentado por estos autores predice que cuando el surfactante no está presente, no es posible desestabilizar el sistema.

En el presente trabajo se analiza la influencia de los efectos de un surfactante insoluble sobre las ondas de Faraday bidimensionales.

El estudio se realizó resolviendo numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad, además de las que describen el comportamiento del surfactante, mediante el método de elementos finitos, en combinación con la técnica de los spines, la que permite el seguimiento de la superficie libre y un fácil tratamiento de la malla deformable^{[9],[10],[3]}.

En particular, se investigó la dependencia del umbral de excitación con los efectos elásticos del surfactante, y se estudió en detalle la fluidodinámica del fenómeno, explorando la evolución en el tiempo de varias variables interfaciales. Esto permitió determinar la existencia de un desfasaje temporal entre la evolución de la superficie libre y de la

concentración de surfactante, el cual se genera debido a las tensiones de Marangoni que se producen como consecuencia de los gradientes de tensión interfacial.

2 FORMULACIÓN MATEMÁTICA

En este trabajo se considera el movimiento bidimensional de un líquido Newtoniano e incompresible, de viscosidad μ y densidad ρ , propiedades constantes debido a que se asume que el sistema es isotérmico. El líquido se encuentra sobre una placa plana, horizontal y rígida, la que oscila verticalmente con una frecuencia ω y una amplitud a_0 (ver Figura 1). Inicialmente, se impone una perturbación sinusoidal 2-D a la interfase, de amplitud εH_0 y número de onda k , siendo H_0 el espesor de líquido cuando el sistema está en reposo. Debido a que el sistema coordenado adoptado está fijo respecto a la placa móvil, el movimiento oscilatorio se traduce en una fuerza de cuerpo $\rho a_0 \omega^2 \cos(\omega t) \mathbf{j}$ que se adiciona a la fuerza gravitatoria. Por lo tanto, las ecuaciones gobernantes para la fase líquida son

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + \frac{1}{Fr} [F \cos(2\pi t) - 1] \mathbf{j} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

esto es, las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad, las que se presentan en forma adimensional. Las longitudes se miden en unidades de $\pi/k = \pi H_0/\alpha$, el tiempo en unidades de $2\pi/\omega$, las velocidades en unidades de $\omega H_0/2\alpha$ y las tensiones en unidades de $\rho(\omega H_0/2\alpha)^2$. Los parámetros adimensionales que se observan en (1) son el número de Reynolds $Re = \rho\omega\pi H_0^2/2\mu\alpha^2$, el número de Froude $Fr = \omega^2 H_0/4\pi g\alpha$, y $F = a_0\omega^2/g$ expresa la relación entre la aceleración inducida mediante la vibración externa y la aceleración gravitatoria.

Se asume que el gas que se encuentra por encima del líquido es invíscido y se encuentra a presión constante, la cual se elige como referencia. En la interfase líquido-gas hay un surfactante adsorbido, de tipo insoluble. Su presencia confiere a la interfase un comportamiento de tipo Newtoniano^[11], con una viscosidad interfacial despreciable, por lo que el tensor de tensiones superficial toma la siguiente forma (dimensional): $\mathbf{T}^{(S)} = \sigma(\mathbf{I} - \mathbf{nn})$, donde \mathbf{I} es el tensor identidad, \mathbf{n} es el versor externo normal a la interfase y σ es la tensión interfacial líquido-gas, cuyo valor depende de la concentración local de surfactante (ρ_s). Por lo tanto, y dado que la interfase es de tipo material, las condiciones de contorno a imponer sobre la misma son:

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{We} \frac{d}{ds} (\bar{\sigma} \mathbf{t}), \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad (4)$$

que constituyen la denominada condición cinemática y el balance de tensiones interfacial, respectivamente. $h(t,x)$ describe la forma de la superficie libre, $\mathbf{v} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j}$, s es la longitud de arco de la interfase, medida de izquierda a derecha, \mathbf{t} es el versor tangente a la superficie libre, dirigido en la dirección de s creciente, $We = \pi\rho/\sigma_0(2/\omega)^2(\alpha/H_0)^3$ es el número de Weber, y σ_0 es la tensión interfacial correspondiente a la concentración de tensioactivo de la interfase en reposo, $\rho_{s,0}$. Debe establecerse además una ecuación de estado que relacione la tensión interfacial con la concentración de tensioactivo. En este trabajo se asume que las desviaciones de la concentración respecto al estado de reposo son pequeñas, por lo que se adopta una ecuación constitutiva lineal alrededor de este estado:

$$\bar{\sigma} = 1 - \beta(\gamma - 1) \quad (5)$$

donde $\gamma(t,x)$ es la concentración adimensional de surfactante, medida en unidades de $\rho_{s,0}$ (esto es $\bar{\sigma}(\gamma = 1) = \sigma(\rho_s = \rho_{s,0})/\sigma_0 = \sigma_0/\sigma_0 = 1$), y $\beta = E_0/\sigma_0$ es el número de elasticidad.

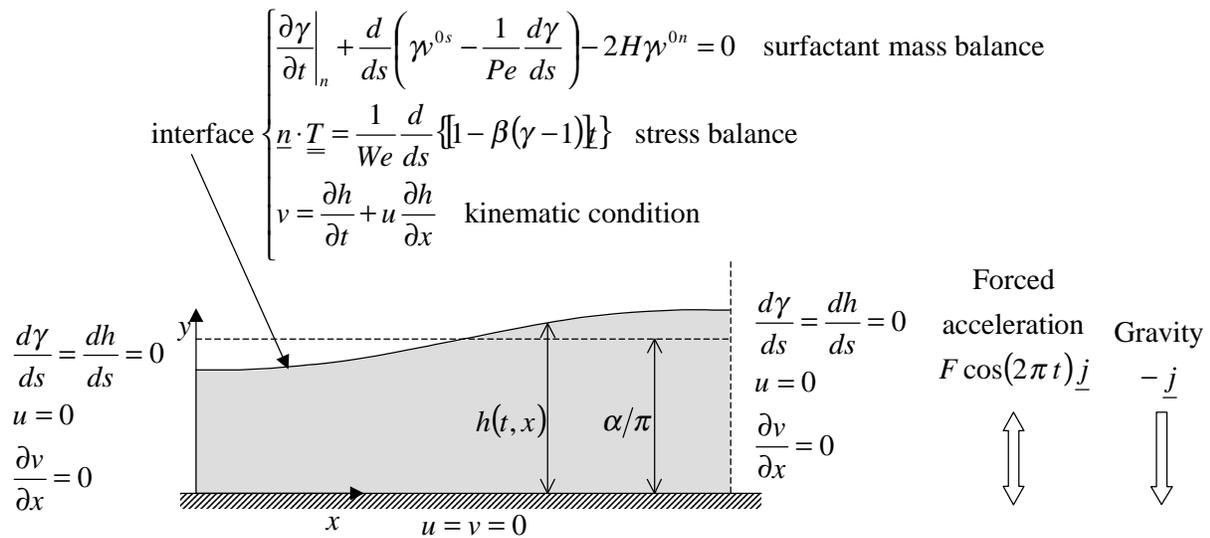


Figura 1: Esquema del dominio de flujo, de las condiciones de contorno y del sistema coordenado adoptado.

A fin de evaluar las ecuaciones (4) y (5), resulta imprescindible conocer la distribución de surfactante interfacial. Para ello debe resolverse el balance de masa de tensioactivo que en este trabajo se representa por^[12]:

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right)_n + \frac{\partial}{\partial s} \left(\gamma^{0s} - \frac{1}{Pe} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) - 2H\gamma^{0n} = 0 \quad (6)$$

Esta ecuación tiene en cuenta la influencia de los transportes convectivo y difusivo, y el efecto de la deformación de la interfase sobre la concentración de surfactante. En (6) $Pe = \pi\omega/2D(H_0/\alpha)^2$ es el número de Péclet, $(\partial\gamma/\partial t)_n$ es la derivada de la concentración respecto del tiempo, siguiendo el movimiento de la interfase a lo largo de su normal, H es la

curvatura media de la superficie del líquido, expresada en forma adimensional, y v^{0n} y v^{0s} son, respectivamente, las componentes normal y tangencial de la velocidad del líquido, en la interfase.

En este trabajo se asume que el movimiento ondulatorio del líquido se reproduce infinitamente a lo largo de la coordenada espacial, por lo que el dominio adoptado representa sólo una parte de este patrón repetitivo, de manera tal que los extremos $x = 0$, $x = 1$ constituyen superficies de simetría. Por lo tanto, se imponen condiciones de contorno de este tipo sobre las velocidades, la concentración de surfactante y la forma de la superficie libre, como se muestra en la Figura 1. Finalmente, sobre la placa plana del fondo se imponen condiciones de no-deslizamiento.

Las condiciones iniciales utilizadas son las siguientes. Como se mencionó, la superficie libre es perturbada en forma sinusoidal:

$$h(t = 0, x) = \alpha/\pi [1 - \varepsilon \cos(\pi x)], \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (7)$$

Además, se adopta una distribución inicial de surfactante homogénea:

$$\gamma(t = 0, x) = 1/S_0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad S_0: \text{longitud de arco inicial} \quad (8)$$

mientras que el líquido se encuentra inicialmente en reposo, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

En la siguiente sección se describe brevemente la técnica numérica utilizada.

3 METODOLOGÍA NUMÉRICA

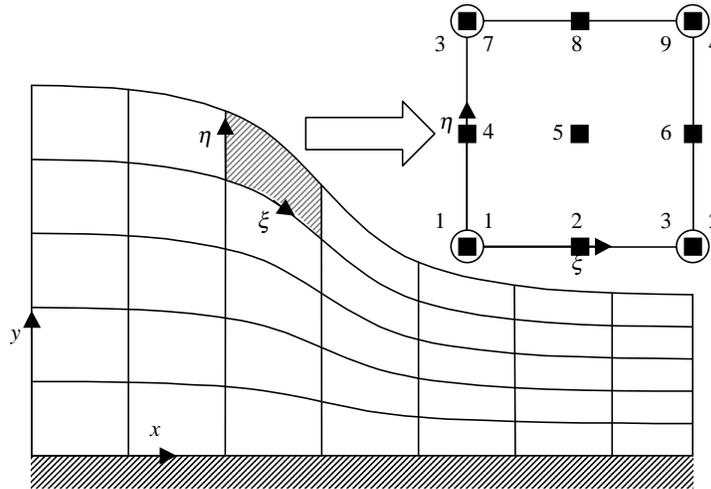
El sistema de ecuaciones (1)-(3) y (6) junto con sus respectivas condiciones de contorno fue resuelto numéricamente. La técnica utilizada, basada en el método de elementos finitos, permite la obtención simultánea del campo de velocidad, presión, concentración de surfactante y forma de la superficie libre, al tiempo que la malla computacional se adapta a las deformaciones que sufre el dominio. Esta técnica, basada en la introducida por el grupo del Prof. Scriven en Minnesota^[9], es esencialmente la misma utilizada por los autores para resolver el problema de ondas de Faraday viscosas 2-D cuando el sistema está libre de agentes tensioactivos^{[10],[3]}. Por lo tanto, sólo se hará hincapié en las diferencias introducidas en el esquema numérico a fin tener en cuenta las ecuaciones que modelan la presencia del surfactante.

La malla estructurada de elementos finitos que se utilizó consta de cuadriláteros de nueve nodos cuya forma se adapta a la forma de la superficie libre (ver Figura 2). Los elementos son transformados isoparamétricamente al cuadrado unitario ($0 \leq \xi, \eta \leq 1$) empleando las nueve funciones de forma bicuadráticas $\phi^k(\xi, \eta)$.

La posición de la superficie libre está parametrizada por medio de distancias medidas a lo largo de spines, que constituyen líneas rectas perpendiculares a la pared inferior, ubicadas en forma equiespaciada a lo largo de la coordenada x . La forma de la superficie libre está descrita mediante una interpolación cuadrática de las distancias mencionadas. Los elementos están distribuidos en un arreglo rectangular, de manera tal que los tres nodos que se encuentran sobre los lados verticales de cada elemento se ubican sobre un mismo spine. De manera similar, los tres nodos no localizados sobre los lados verticales se ubican también

sobre un mismo spine (ver Figura 2). Puesto que los nodos se localizan en posiciones proporcionalmente constantes a lo largo de estas rectas, los elementos se deforman siguiendo la forma de la superficie libre. Se utilizó interpolación mixta para aproximar las variables, el campo de velocidad se describe mediante las nueve funciones base bicuadráticas, el de presión mediante las cuatro funciones de forma bilineales ($\psi^l(\xi, \eta)$), y el campo de concentración se aproximó mediante interpolación cuadrática:

(a)



(b)

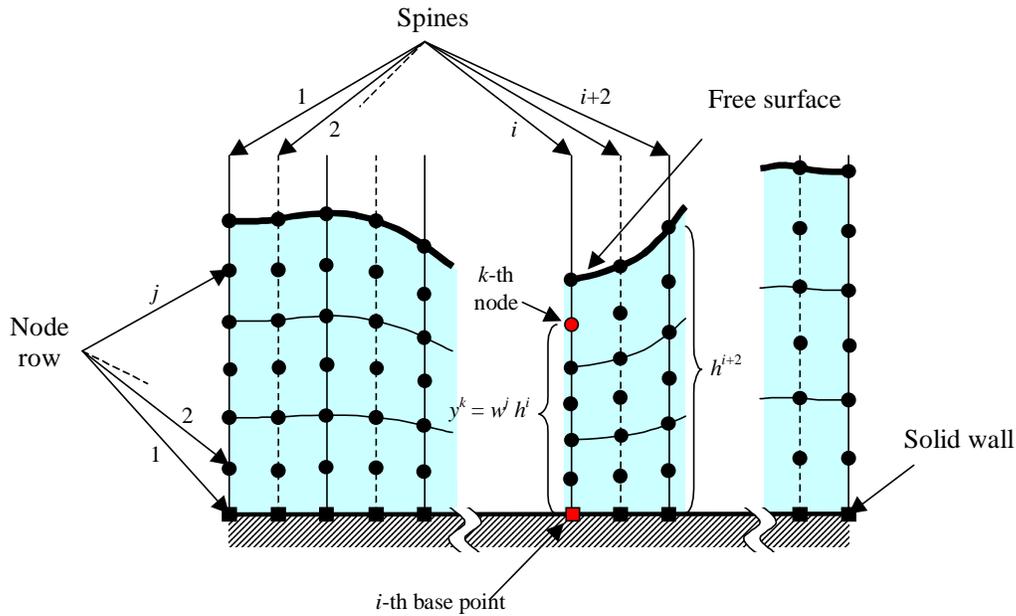


Figura 2: (a) Representación esquemática de la malla estructurada de elementos finitos empleada en este trabajo.

Las coordenadas físicas (x - y) se relacionan con las coordenadas computacionales (ξ , η) por medio de una transformación isoparamétrica. La numeración local de los nodos está indicada. (b) Diagrama mostrando la construcción de la malla al emplearse la técnica de los spines.

$$\gamma(\xi, t) = \sum_{i=1}^3 \gamma^i(t) \hat{\phi}^i(\xi) \quad (9)$$

donde $\gamma^i(t)$ constituyen los valores nodales de concentración de tensioactivo, siendo $\hat{\phi}^i(\xi) = \phi^{i+6}(\xi, \eta = 1)$ una especialización unidimensional de las funciones de interpolación bicuadráticas.

Siguiendo el método de Galerkin / elementos finitos, se construyen los residuos ponderados de las ecuaciones (1)-(3) y (6), teniendo en cuenta la velocidad de desplazamiento de la malla en los términos con derivadas respecto del tiempo. En particular, la expresión utilizada para la derivada temporal de la concentración que aparece en (6) es

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right|_n = \dot{\gamma} - \dot{x}_{FS} \cdot \nabla_s \gamma \quad (10)$$

$$\text{donde } \dot{\gamma} \equiv \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right)_{\xi} = \sum_{i=1}^3 \frac{d\gamma^i}{dt} \hat{\phi}^i(\xi), \quad \dot{x}_{FS} \equiv \left(\frac{\partial x_{FS}}{\partial t} \right)_{\xi} = \underline{j} \sum_{i=1}^3 \frac{dh^i}{dt} \hat{\phi}^i(\xi).$$

De esta manera, se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, que se discretizan temporalmente mediante un esquema de diferencias finitas de segundo orden, el cual consta de un corrector trapezoidal y un predictor de Adams-Bashforth. Al aproximarse las derivadas respecto del tiempo mediante la regla del trapecio, se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales algebraicas no lineales, que se resuelven mediante el método de Newton. A fin de mejorar la convergencia del proceso iterativo, un predictor de Adams-Bashforth provee una primera estimación de la solución. Adicionalmente, el paso de tiempo se ajusta de acuerdo al método de Crisfield, de manera que se satisfaga el criterio de convergencia (el error medio cuadrático debe ser menor a 10^{-6}) en un número tentativo de iteraciones:

$$\Delta t_n = \Delta t_{n-1} \left(\frac{DNIT}{NIT_n} \right), \quad \Delta t_n = t_{n+1} - t_n, \quad DNIT = 3, \quad (11)$$

donde t_{n+1} y t_n denotan el valor del tiempo en el paso actual ($n + 1$) y en el anterior (n), respectivamente, $DNIT$ es el número de iteraciones en el que se pretende que converja el lazo de Newton, y NIT_n es el número de iteraciones que efectivamente demandó la convergencia en el paso de tiempo anterior. Además, el paso de tiempo fue limitado a un valor máximo 0.02. A fin de asegurar la continuidad del experimento numérico en el caso que el criterio de convergencia no fuera satisfecho, se recalcula la solución en el paso de tiempo n empleando un paso de tiempo Δt de la mitad de tamaño.

La sección siguiente presenta los resultados obtenidos con la técnica numérica descripta.

4 RESULTADOS

4.1 Introducción

Como se mencionara anteriormente, el objetivo de este trabajo consiste en determinar la influencia de los efectos elásticos de un surfactante insoluble sobre la estabilidad de ondas de Faraday bidimensionales. Adicionalmente, un examen detallado de algunas de las variables interfaciales provee información sumamente valiosa que ayuda a comprender mejor el comportamiento del sistema.

El estudio realizado en este trabajo corresponde a algunos valores particulares de los parámetros adimensionales:

$$\alpha^2 Re = 39.47842, \alpha^2 We = 5.637505, \alpha Fr = 3.205707, \alpha^2 Pe = 394784.2$$

que corresponden a los siguientes valores típicos de las variables físicas:

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \mu = 0.025 \text{ Pa s}, D = 2.5 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s},$$

$$\sigma_0 = 0.055 \text{ N/m}, H_0 = 10^{-3} \text{ m}, \omega = 200 \pi \text{ s}^{-1}$$

Las simulaciones numéricas se realizaron utilizando una malla de 20x7 elementos en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente. Todas ellas se iniciaron a partir de las condiciones iniciales especificadas en la sección 2, con $\varepsilon = 0.05$ en la ec. (7).

Los resultados que se muestran en los apartados siguientes están organizados de la siguiente manera: a) en primer término se determina un número de onda particular, que define un caso base correspondiente a un sistema donde los efectos elásticos son nulos; b) luego se analiza la influencia de los efectos elásticos sobre la magnitud de excitación crítica, utilizando el número de onda previamente obtenido; c) por último se estudia la evolución en el tiempo de un conjunto de variable interfaciales a fin de mejorar la comprensión de los resultados referidos en b) y del comportamiento del sistema.

4.2 Obtención del número de onda de referencia

Previamente al estudio de la influencia de los efectos elásticos sobre el umbral de estabilidad, se determina el número de onda crítico (α_C) para el caso en que $\beta = 0$, esto es, el número de onda para el cual puede lograrse la formación de ondas superficiales con una fuerza de excitación mínima (F_C). Para ello se construyó un mapa de estabilidad en el plano $F - \alpha$, el cual se muestra en la Figura 3. Cada uno de los círculos y cruces que se observan representa un único experimento numérico, los que denotan evoluciones de tipo estable e inestable, respectivamente. El criterio adoptado en esta clasificación es el siguiente: si la amplitud de oscilación de la superficie libre decae a cero a partir de la perturbación inicial, la solución es considerada *estable*, de lo contrario, el experimento es catalogado como *inestable*.

Los casos inestables mostrados en la Figura 3 representan oscilaciones subarmónicas de ondas con una longitud dos veces superior a la del dominio físico. El símbolo \oplus marca el punto ($F_C = 11.90$, $\alpha_C = 1.26$), que representa aproximadamente las condiciones críticas de

excitación para el conjunto de parámetros utilizados, en el caso de un surfactante cuya elasticidad es nula. El número de onda determinado de esta manera se utilizará en el resto de los experimentos numéricos realizados en este trabajo, en los que se consideran valores del número elástico distintos de cero.

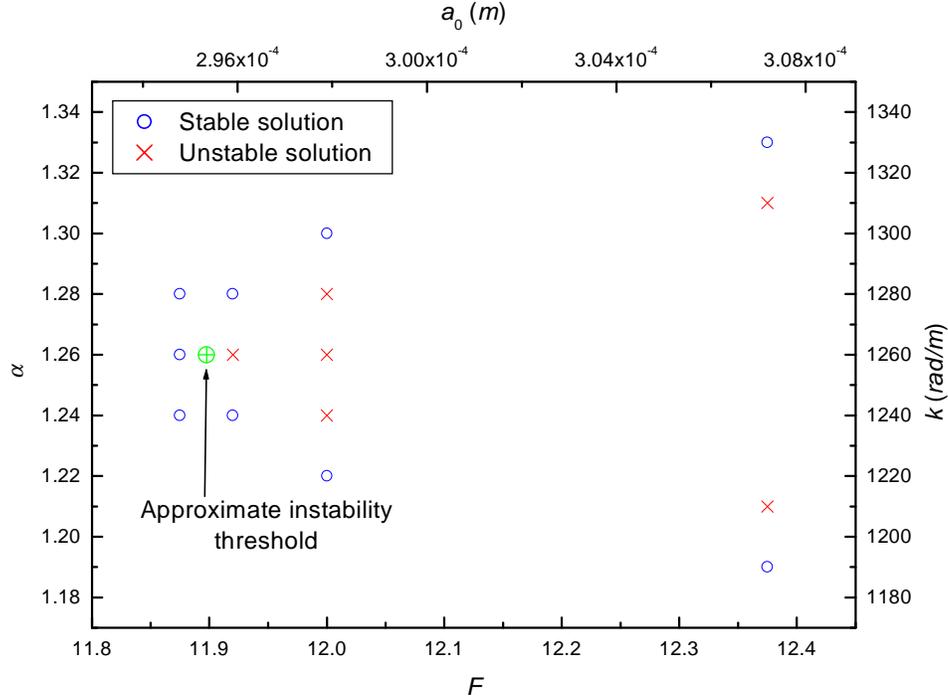


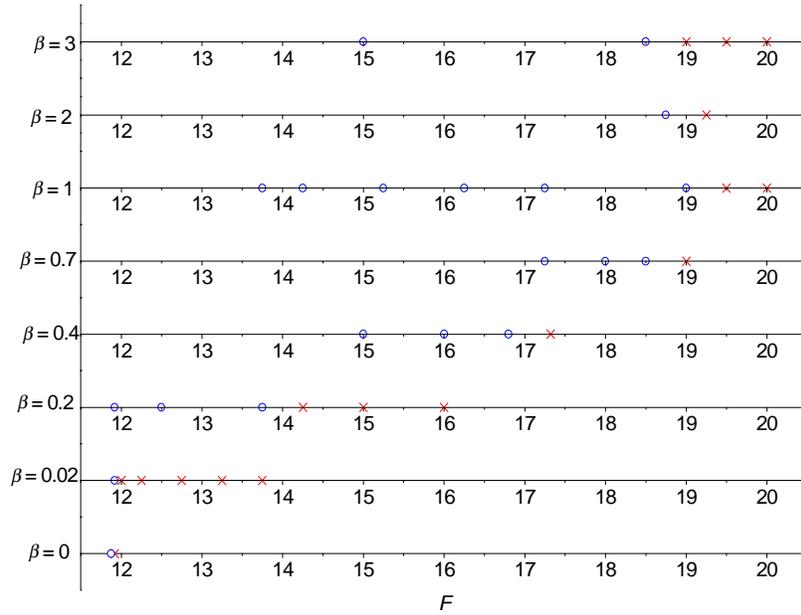
Figura 3: Mapa de estabilidad correspondiente a $\alpha^2 Re = 39.47842$, $\alpha^2 We = 5.637505$, $\alpha Fr = 3.205707$, $\alpha^2 Pe = 394784.2$, $\beta = 0$.

4.3 Efecto de la elasticidad del surfactante sobre la estabilidad del sistema

A fin de determinar el efecto de la elasticidad del surfactante sobre la estabilidad del sistema, se determinó numéricamente la fuerza de excitación mínima necesaria para obtener soluciones inestables, para varios valores del parámetro β . Los resultados de este estudio se resumen en la Figura 4. El significado de los símbolos utilizados en el diagrama de estabilidad (Figura 4-(a)) es el mismo que en la Figura 3. Claramente puede apreciarse que el aumento del número elástico se traduce en general en un incremento de la intensidad de excitación crítica, respecto a un surfactante inerte (aproximadamente un 62% para el conjunto de parámetros utilizados). Sin embargo, si bien F crece abruptamente hasta alcanzar un máximo local aproximadamente en $\beta = 1$ (ver Figura 4-(b)); a partir del mismo, incrementos adicionales de este parámetro producen una ligera disminución de la fuerza crítica. Estos resultados sugieren que cuando se incrementa el número elástico las tensiones de Marangoni, representados por el producto $\beta \frac{d\gamma}{ds}$, aumentan hasta alcanzar un máximo (que para el caso en

estudio se localiza también en $\beta = 1$), pero que por encima de este valor, un incremento de este parámetro no produce una modificación importante de estas tensiones tangenciales. Esto se verificará más adelante, donde se observan cambios importantes en las variables interfaciales, especialmente en la componente tangencial de la velocidad y la tracción asociados con el valor de β .

(a)



(b)

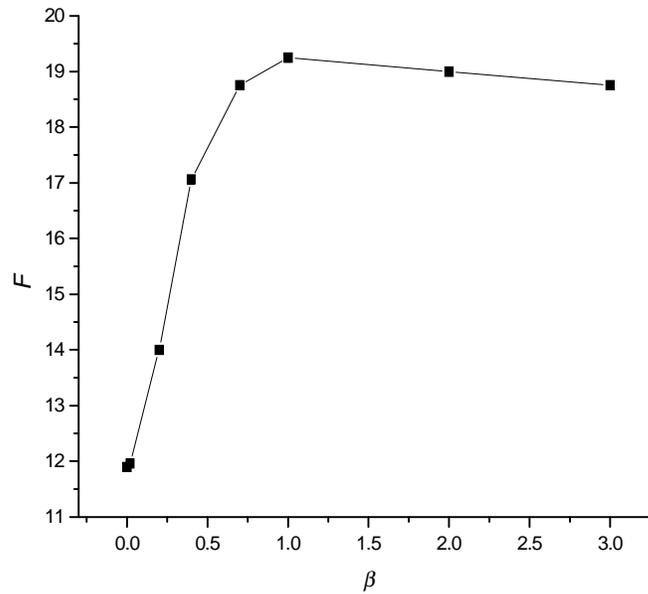


Figura 4: Estabilidad del sistema en función de F , para $Re = 24.86673$, $We = 2.818223$, $Fr = 2.544212$, $Pe = 248667.3$, $\alpha = 1.26$ y varios valores de β . (a) Diagrama de estabilidad. (b) Amplitud de excitación crítica.

Como se mencionó en la Introducción, si bien la influencia de los efectos elásticos sobre las ondas de Faraday no ha sido explorado en profundidad, su efecto sobre las oscilaciones no forzadas de ondas superficiales se conoce desde hace tiempo^{[13],[14]}, al igual que el mecanismo por el cual inducen un amortiguamiento adicional sobre estas ondas. En forma resumida, este mecanismo puede describirse como sigue.

Cuando una oscilación de onda superficial se ha establecido, el líquido se mueve en forma alternada desde el valle hacia la cresta de la onda y luego a la inversa. Si la amplitud de estas oscilaciones es pequeña, el transporte convectivo tangencial a la superficie, generado por este movimiento, induce una acumulación de surfactante en la región hacia la cual se desplaza el líquido. Esto produce un gradiente de tensión interfacial que ocasiona la aparición de una componente tangencial de la tracción en la interfase (tensión de Marangoni), dirigida hacia la región donde la concentración del soluto es menor, intentando restablecer una distribución homogénea de la sustancia tensioactiva (efecto Marangoni). Esta tensión, actuando en una dirección contraria a la de movimiento del líquido, provoca un efecto de amortiguamiento sobre las oscilaciones, proporcional al espesor relativo de la capa límite viscosa adyacente a la superficie libre. Si la magnitud de esta tensión tangencial es lo suficientemente grande, puede incluso lograrse que el movimiento del líquido en la interfase cambie de dirección antes que se produzca la inversión del movimiento en el seno del líquido, generándose así un desfase temporal entre la evolución de la forma de la superficie libre y de la distribución de surfactante.

En la sección subsiguiente se analizará en detalle la serie de fenómenos descritos en el párrafo anterior.

4.4 Análisis de la evolución temporal de las variables de flujo en la interfase

En esta sección se estudia la evolución en el tiempo de las siguientes variables interfaciales de relevancia: máximo valor absoluto a lo largo de la interfase de las componentes normal y tangencial de los vectores velocidad y tracción, y concentración de surfactante y posición de la superficie libre en los extremos $x = 0$, $x = 1$. El análisis de estas variables se realiza para algunos valores seleccionados del parámetro β , para las soluciones inestables más cercanas al umbral de la Figura 4-(a): $\beta = 0.02$, $F = 12.25$ (Figura 5-(I)), $\beta = 0.2$, $F = 14.25$ (Figura 5-(II)), $\beta = 1$, $F = 19.5$ (Figura 5-(III)) y $\beta = 3$, $F = 19$ (Figura 5-(IV)).

En todos los casos considerados, la magnitud de éstas variables se incrementa desde sus valores iniciales hasta alcanzarse una oscilación de tipo estacionaria, en la cual el movimiento de la superficie libre es subarmónico y la amplitud de oscilación es similar.

Debido a que las curvas mostradas en la Fig. 5 corresponden a soluciones cercanas al umbral de estabilidad, algunas de las variables interfaciales presentan evoluciones similares. Otras, por el contrario, cambian fuertemente a medida que se modifica el número de elasticidad. Por ejemplo, la amplitud de oscilación en ambos extremos de la superficie libre (Figs. 5-(If)–5-(IVf)), y el máximo valor absoluto de la componente normal de la tracción (Figs. 5-(Ic)–5-(IVc)) y la velocidad en la superficie (Figs. 5-(Ia)–5-(IVa)) poseen comportamientos y valores similares. Por lo tanto, la influencia del término que representa la

dilución/concentración de surfactante asociado a cambios en la curvatura en el balance de masa interfacial de surfactante (7) es semejante en todos los casos considerados.

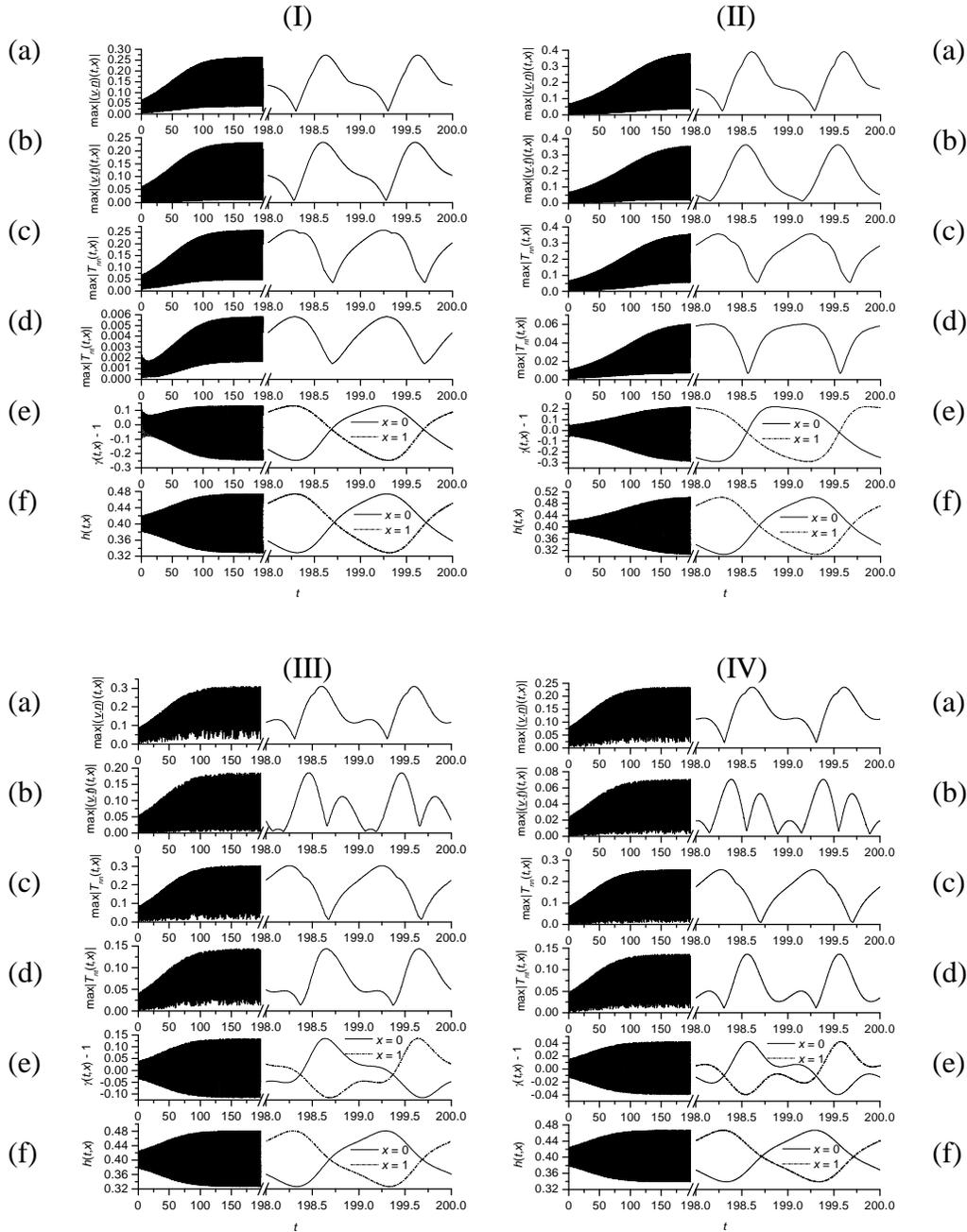


Figura 5: Evolución temporal de varias variables interfaciales en condiciones cercanas al umbral de estabilidad. (I) $\beta = 0.02$, $F = 12.25$, (II) $\beta = 0.2$, $F = 14.25$, (III) $\beta = 1$, $F = 19.5$, (IV) $\beta = 3$, $F = 19$. De arriba hacia abajo, componentes normal y tangencial de la velocidad, componentes normal y tangencial del vector tracción, concentración de surfactante y posición de la superficie libre en ambos extremos de la interfase.

Por otra parte, se observan diferencias importantes en las curvas correspondientes a la máxima magnitud de la componente tangencial de la tracción en la superficie (Figs. 5-(Id)–5-(IVd)) y la velocidad en la superficie (Figs. 5-(Ib)–5-(IVb)), y a la concentración local de surfactante en los extremos del dominio (Figs. 5-(Ie)–5-(IVe)), una vez establecido un estado cuasi-periódico. De hecho, a medida que el número de elasticidad aumenta, las tensiones de Marangoni se incrementan, aún cuando los gradientes de concentración tienden a disminuir. Estas tensiones afectan la componente tangencial de la velocidad interfacial, en un intento por minimizar los gradientes de tensión superficial, induciendo la aparición de un desfase entre el movimiento de la superficie libre y el movimiento en el seno del líquido (ver Figs. 5-(Ib)–5-(IVb) y 5-(If)–5-(IVf)), y una reducción en la magnitud de la velocidad tangencial de la superficie libre. Puesto que el surfactante se transporta principalmente por convección, la evolución temporal de la concentración local de soluto se encuentra también adelantada respecto a la evolución temporal de la forma de la superficie libre (ver Figs. 5-(Ie)–5-(IVe) y 5-(If)–5-(IVf)).

Aún cuando el transporte convectivo es el mecanismo más importante en el balance de masa de surfactante dentro del rango de números elásticos analizados, la dilución y/o concentración del soluto debido al estiramiento y/o contracción de la interface presenta una importancia creciente a medida que aumenta β y la componente tangencial de la velocidad en la superficie libre disminuye en mayor proporción que la componente normal.

La fuerza F requerida para generar ondas depende fuertemente de los efectos elásticos; por consiguiente, la relación entre F y β debe ser similar a la observada entre el desfase temporal y β : la curva muestra una pendiente relativamente grande en la región donde los efectos elásticos son fuertemente afectados por un incremento en el número de elasticidad y una pendiente pequeña cuando el mecanismo de dilatación/contracción adquiere una importancia relativa mayor frente al transporte convectivo en el balance de masa de surfactante.

Otra característica que se puede observar en las Figs. 5-(Ib)–5-(IVb) es el cambio notable en el comportamiento de la componente tangencial de la velocidad en la superficie, asociada a variaciones del número de elasticidad. De hecho, los resultados ilustrados en las Figs. 5-(IIIb) y 5-(IVb) muestran que la velocidad tangencial cambia de signo más de una vez durante el ciclo, indicando la existencia de flujos de recirculación cerca de la interfase.

Un aspecto interesante de las curvas en las Figs. 5-(IIIId) y 5-(IVd) es el pequeño cambio sufrido por la componente tangencial del vector tracción cuando el número de elasticidad varía entre 1 y 3. Las Figs. 5-(IIIb), 5-(IIIe) y 5-(IVb), 5-(IVe), ponen en evidencia que en este rango de β , el efecto principal del surfactante es una reducción drástica de la magnitud de la velocidad tangencial y por consiguiente, de la diferencia entre la concentración del agente tensioactivo menos su concentración en reposo.

A fin de cuantificar el desplazamiento temporal en las variaciones cíclicas en la concentración del surfactante y de la altura de líquido en un punto de la superficie libre, una vez alcanzado un estado de oscilaciones periódicas, se midió el desfase temporal entre las evoluciones de las amplitudes de los modos dominantes respectivos, obtenidos mediante la transformada de Fourier $h(t,x)$ y $\chi(t,x)$ a lo largo de la coordenada x . Este análisis se realizó

para todos los puntos inestables mostrados en la Fig. 4-(a) más cercanos al umbral, y los resultados obtenidos se ilustran en la Fig. 6. Se observa que el desfase se incrementa rápidamente con la elasticidad del surfactante cuando este parámetro es más pequeño que 1, siendo levemente afectado para β mayor que este valor. Esto es, el comportamiento del desfase en función de β es similar al observado para F (ver Fig. 4).

Los resultados correspondientes a la evolución de las variables interfaciales para distintos valores del número de elasticidad, previamente analizados, muestran que cuando β es mayor o igual a uno, un incremento en este parámetro produce una distribución más uniforme de surfactante a lo largo de la superficie libre, y que la magnitud de las tensiones tangenciales se mantiene aproximadamente igual. Por consiguiente, el efecto Marangoni asociado con las tensiones tangenciales no varía significativamente para $\beta \geq 1$. Si los efectos elásticos del surfactante son similares, tanto el desfase como la amplitud de la aceleración externa necesaria para producir una interfase ondulada será similar, como se observa en las Figuras 5 y 6.

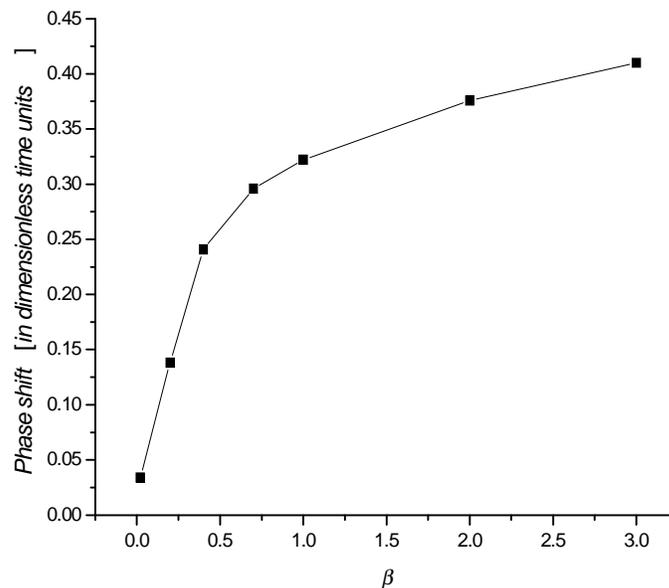


Figura 6: Influencia de la elasticidad sobre el corrimiento temporal entre las evoluciones de la distribución de surfactante y la forma de la superficie libre, cerca del umbral de estabilidad.

5 CONCLUSIONES

Se ha estudiado numéricamente la influencia de los efectos elásticos de un surfactante insoluble sobre el fenómeno de ondas de Faraday bidimensionales. En particular, se analizó la estabilidad del sistema, encontrándose que en general la elasticidad del surfactante desplaza el umbral de estabilidad hacia valores mayores de la aceleración forzada, respecto del caso de un soluto con elasticidad nula.

La técnica numérica empleada permitió examinar en detalle las variables de flujo, proveyendo un conocimiento más profundo del fenómeno, el cual permitió detectar y cuantificar un desfase temporal entre las variaciones de concentración del surfactante interfacial y la forma adoptada por la superficie libre, el cual depende de la intensidad de las fuerzas de Marangoni.

Se espera en trabajos futuros analizar la influencia de la viscosidad interfacial sobre el comportamiento de ondas de Faraday bidimensionales.

6 REFERENCIAS

- [1] Faraday, M., "On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces", *Philos. Trans. R. Soc. London*, **121**, 319-340 (1831).
- [2] Miles, J. W. y Henderson, D., "Parametrically forced surface waves", *Ann Rev. Fluid Mech.*, **22**, 143 (1990).
- [3] Ubal, S., Giavedoni, M.D. y Saita, F.A., "A numerical analysis of the influence of the liquid depth on two dimensional Faraday waves", *Phys. Fluids*, en prensa (2003).
- [4] Miles, J. W. "Surface-wave damping in closed basins". *Proc. R. Soc. Lond. A*, **297**, 459 (1967).
- [5] Henderson, D. y Miles, J. W. "Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line". *J. Fluid Mech.*, **275**, 285-299 (1994).
- [6] Henderson, D. "Effects of surfactants on Faraday-wave dynamics". *J. Fluid Mech.*, **365**, 89 (1998).
- [7] Kumar, S. y Matar, O. K. "Parametrically driven surface waves in surfactant-covered liquids". *Proc. R. Soc. Lond. A*, **458**, 2815-2828 (2002).
- [8] Kumar, S. y Matar, O. K. "Instability of long-wavelength disturbances on gravity-modulated surfactant-covered thin liquid layers". *J. Fluid Mech.*, **466**, 249-258 (2002).
- [9] Khesghi, H. S. y Scriven, L. E., "Penalty finite element analysis of unsteady free surface flows". En *Finite elements in fluids* (eds. R. H. Gallagher & J. T. Oden), Vol. 5, Cap. 19, pág. 393, New York: John Wiley & Sons Limited (1984).
- [10] Giavedoni, M. D. "A numerical study of the two-dimensional dynamic behavior of a thin liquid film subject to a vertical oscillation". *Ind. Eng. Chem. Res. Des.*, **34**, 356-365 (1995).
- [11] Scriven, L. E. "Dynamics of fluid interfaces. Equation of motion for Newtonian surface fluids". *Chem. Eng. Science*, **12**, 98 (1960).
- [12] Wong, H., Rumschitzki, D. y Maldarelli, C. "On the surfactant mass balance at a deforming fluid interface". *Phys. Fluids*, **8** (11), 3203 (1996).
- [13] Lamb, H. *Hydrodynamics*, Dover (1945).
- [14] Franklin, B. "On the stilling of waves by means of oil". *Philos. Trans. R. Soc. London*, **2**, 144 (1774).