

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADO APLICADO A FLUJOS MULTIFÁSICOS

Angel L. Zanotti, Carlos G. Mendez, Norberto M. Nigro,
Alberto Cardona y Mario A. Storti

Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC)
INTEC-Universidad Nacional del Litoral-CONICET, Güemes 3450
3000 Santa Fe, Argentina
e-mail: mstorti, Web page: <http://venus.arcrude.edu.ar/CIMEC>

Palabras clave: flujo multifásico, ecuación de Navier-Stokes incompresible, sistemas advectivos-difusivos-reactivos, modelo de turbulencia $\kappa - \epsilon$.

Resumen.

Los flujos multifásicos aparecen en gran cantidad de aplicaciones de la ingeniería y fenómenos naturales. El entendimiento de las características de tales flujos es crucial para el diseño de sistemas multifluido. Los flujos multifásicos involucran un extenso rango de escalas que van desde el diámetro de la burbuja hasta escalas del orden del flujo macroscópico, la interacción entre estas escalas hace a la física de los flujos multifásicos más compleja que la correspondiente a flujos de una sola fase. En este trabajo nosotros presentamos una aproximación Euleriana multifluido para un flujo a dos fases relacionado con la simulación de la emulsificación del acero en cucharas siderúrgicas. El objetivo final de este análisis es mejorar la limpieza del acero controlando las impurezas atrapadas. La estrategia numérica esta basada en una formulación estabilizada de igual orden del método de elementos finitos, donde el solver es desdoblado acorde a las diferentes fases involucradas en el cálculo, tratando cada fase monolíticamente (momentum y continuidad acoplada). Este esquema evita las oscilaciones debidas a la restricción de incompresibilidad y la advección dominante del flujo como así también las patologías numéricas relacionadas con las fuerzas de interacción entre fases. Algunos ejemplos numéricos son presentados con la finalidad de validar el algoritmo propuesto.

1. INTRODUCCIÓN

Se entiende como flujo multifase a todo flujo en el cual se encuentran presente más de un fluido, donde las fases son asumidas mezcladas sobre escalas de longitud mayores que las escalas de longitud moleculares.

Los flujos multifase son encontrados en una gran cantidad de aplicaciones industriales tales como reactores químicos, evaporadores, combustores, fabricación de acero y equipamiento de enfriamiento de centrales nucleares. También están presentes en fenómenos naturales (nubes, formación de dunas de arena, etc).

Tradicionalmente el diseño de sistemas en los que intervienen flujos multifase se ha basado en métodos de prueba y empíricos. Por lo que resulta necesario el desarrollo de nuevas herramientas que permitan mejorar el diseño y optimización de sistemas de este tipo.

El presente trabajo esta orientado a la resolución de flujos multifásicos existentes en las operaciones de afino de acero, que tienen lugar en cucharas siderúrgicas donde coexisten dos fases líquidas, metal fundido y escoria, y una fase gaseosa, dada por el argon inyectado a través de un tapón poroso situado en la parte inferior de la cuchara, cuya finalidad es el agitado de la masa de acero líquida.

Conocer y controlar el proceso de emulsificación en la cuchara siderúrgica, resulta ser nuestro objetivo principal, dado que este proceso es uno de los factores que determina la calidad del acero obtenido.

Para la resolución matemática del problema, se emplea una aproximación Euleriana multifluido, tratando a cada fase particular como un continuo interpenetrado presente en cada punto del dominio con una fracción de volumen asociada, interactuando entre si via términos de transferencia entre fases.

En la resolución numérica del flujo multifásico turbulento utilizamos una formulación tipo sistema advectivo-difusivo-reactivo debido al grado de generalidad que posee en problemas de multifísica.

Por razones de índole numérica separamos el cálculo por etapas, una etapa para la solución de la fase continua, luego una para cada fase dispersa y una última etapa para la solución del campo de las variables de turbulencia.

El énfasis de este trabajo recae sobre la forma de plantear la estabilización numérica necesaria en problemas de transporte gobernados por la incompresibilidad, por los términos convectivos o por los términos reactivos. Para el primer y segundo caso usamos una formulación del tipo SUPG-PSPG¹ típica para resolver problemas de flujo incompresible a una sola fase y que en este trabajo se aplica a la fase continua.

El caso de la fase dispersa presenta mayormente problemas de estabilización asociados a la competencia entre los términos convectivos y reactivos. Elevadas velocidades locales en el flujo dan lugar a elevados números de Peclet y elevados valores de las fuerzas de interacción entre las fases dan lugar a elevados números de Damkhöler o números de Reacción. La modelización de la turbulencia se realiza usando un modelo $\kappa - \epsilon$, que al resolverse en forma desacoplada de las ecuaciones de flujo del medio continuo hace que el tratamiento

de la condición de pared se simplifique respecto a lo que se ve en el caso de resolución monolítica.²

El software desarrollado se encuentra dentro de una aplicación del programa PETSC-FEM³ desarrollado en el CIMEC.⁴ En la parte final de este trabajo incluimos un ejemplo a modo de validación del desarrollo llevado a cabo.

2. MODELO MATEMÁTICO DEL FLUJO MULTIFÁSICO TURBULENTO INCOMPRESIBLE

En el modelo matemático consideramos 2 fases, una líquida (continua) y una gaseosa (dispersa), denotadas respectivamente por los subíndices l,g. Cabe destacar que la extensión a más fases sigue el mismo tratamiento presentado a continuación.

Hasta el momento el único término de transferencia de cantidad de movimiento entre fases es el drag, no existiendo transferencia de masa entre fases.

Las ecuaciones del continuo que gobiernan al flujo multifase turbulento son:

2.1. Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l \mathbf{v}_l) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \mathbf{v}_g) = 0$$

$$\text{con } \alpha_l + \alpha_g = 1$$

2.2. Ecuación de Cantidad de Movimiento

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l \mathbf{v}_l)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l \mathbf{v}_l \otimes \mathbf{v}_l) + \alpha_l \nabla p = \nabla \cdot (\alpha_l \mu_{effl} (\nabla \mathbf{v}_l + \nabla \mathbf{v}_l^T)) + \alpha_l \rho_l \mathbf{g} + \mathbf{F}_{l,g}^{inter} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g \mathbf{v}_g)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \mathbf{v}_g \otimes \mathbf{v}_g) + \alpha_g \nabla p = \nabla \cdot (\mu'_{effg} (\nabla \mathbf{v}_g + \nabla \mathbf{v}_g^T)) + \alpha_g \rho_g \mathbf{g} + \mathbf{F}_{g,l}^{inter}$$

Siendo la fuerza de interacción entre fases dada por:

$$\mathbf{F}_{l,g}^{inter} = C'_{drag} Re_{bubble} C_{drag} \alpha_g \alpha_l \mathbf{v}_{rel} \quad C'_{drag} = \frac{3}{4} \frac{\mu_l}{d_{bubble}^2} \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_g - \mathbf{v}_l \quad Re_{bubble} = \frac{\rho d_{bubble} \|\mathbf{v}_{rel}\|}{\mu_l} \quad (4)$$

donde d_{bubble} es el diámetro de burbuja efectivo, es decir el diámetro de una esfera cuyo volumen es igual al volumen de la burbuja en el medio, Re_{bubble} Reynolds de burbuja y C_{drag} coeficiente de Drag, este ultimo en la mayoría de los casos es función del número de Reynolds de burbuja. El código cuenta con las siguientes correlaciones para el C_{drag} según sea el régimen del flujo.

$$\begin{array}{ll}
\text{Régimen Stoke} & C_{drag} = \frac{24,0}{Re_{bubble}} \\
\text{Régimen Laminar} & C_{drag} = \frac{24,0}{Re_{bubble}}(1 + 0,15Re^{0,687}) \\
\text{Régimen Turbulento} & C_{drag} = 0,44
\end{array} \quad (5)$$

2.3. Modelo de Turbulencia $\kappa - \epsilon$

El modelo de turbulencia empleado para el flujo multifásico es una generalización del modelo $\kappa - \epsilon$ para una sola fase. Implementando el modelo $\kappa - \epsilon$ solo para la fase continua, no teniendo en cuenta los efectos de la fase dispersa sobre la turbulencia de la fase continua.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\alpha_l \rho_l \kappa)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l \mathbf{v}_l \kappa) &= \nabla \cdot (\alpha_l \frac{\mu_{effl}}{C_\kappa} \nabla \kappa) + P_\kappa - \rho_l \epsilon \\
\frac{\partial(\alpha_l \rho_l \epsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l \mathbf{v}_l \epsilon) &= \nabla \cdot (\alpha_l \frac{\mu_{effl}}{C_\epsilon} \nabla \epsilon) + \frac{\epsilon}{\kappa} (C_1 P_\kappa - C_2 \rho_l \epsilon) \\
P_\kappa &= 2\mu_t \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})
\end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
\mu_t &= C_\mu \rho_l \frac{\kappa^2}{\epsilon} \\
\mu_{effl} &= \mu_l + \mu_t \\
\mu'_{effg} &= \alpha_g \mu_g + \alpha_l \mu_{effl}
\end{aligned} \quad (7)$$

El modelo $\kappa - \epsilon$ tiene cinco constantes,

$$\begin{aligned}
C_\mu &= 0,09 \\
C_1 &= 1,44 \\
C_2 &= 1,92 \\
C_\kappa &= 1,0 \\
C_\epsilon &= 1,3
\end{aligned} \quad (8)$$

2.4. Formulación como sistema advectivo-difusivo-reactivo

Formularemos el problema anterior (1),(2),(6) como un sistema advectivo-difusivo-reactivo del tipo:

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}^a = \nabla \cdot \mathbf{F}^d + \mathbf{G}(\mathbf{U})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}^a - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U} = \nabla \cdot \mathbf{F}^d + \mathbf{G}' \quad (9)$$

donde

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}' + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U} \quad (10)$$

En (9) se usa una función \mathcal{H} que denominamos función de entalpía, por su similitud a problemas de cambio de fase, que sirve para hacer un cambio de variables de forma que las variables que emplea el usuario no necesariamente son las mismas que aquellas en las que se formula el problema. Siendo de utilidad para la imposición de las condiciones de contorno.

Nuestro conjunto de variables de cálculo las definimos como:

$$\mathbf{U} = [p, \alpha_g, \mathbf{v}_l, \mathbf{v}_g, \kappa, \epsilon] \quad (11)$$

Comparando 9 y 11 con 1,2 y 6 vemos que:

$$\mathcal{H}(\mathbf{U}) = [(\alpha_l \rho_l), (\alpha_g \rho_g), (\alpha_l \rho_l \mathbf{v}_l), (\alpha_g \rho_g \mathbf{v}_g), (\alpha_l \rho_l \kappa), (\alpha_l \rho_l \epsilon)] \quad (12)$$

Por razones de espacio se han omitido el jacobiano de la función de entalpía, como así también los flujos y jacobianos advectivos y difusivos. Para finalizar los jacobianos reactivos se calculan a partir del término fuente \mathbf{G} que por una cuestión de orden lo vamos a desdoblar en dos partes, una que incluya la flotación, los términos que relacionan la presión y fracción de gas y los términos de producción turbulenta y otra que reservaremos para los términos de interacción entre las fases:

$$\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{G}^{\text{inter}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_l \rho_l \mathbf{g} + p \nabla \alpha_l \\ \alpha_g \rho_g \mathbf{g} - \alpha_g \nabla p \\ P_\kappa - \rho_l \epsilon \\ \frac{\epsilon}{\kappa} (C_1 P_\kappa - C_2 \rho_l \epsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{F}_{l,g}^{\text{inter}} \\ \mathbf{F}_{g,l}^{\text{inter}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

3. DISCRETIZACIÓN NUMÉRICA MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

Aquí presentamos algunos detalles acerca de la implementación numérica del modelo matemático recién presentado. En este trabajo se ha utilizado el método de los elementos finitos y en particular el esquema SUPG y el SUPG-PSPG que pasamos a describir en la próximas secciones. En realidad por cuestiones de costo computacional y por generalidad en la forma de programar el código hemos dividido la resolución del conjunto total de ecuaciones en partes, una por cada fase involucrada (en este trabajo son dos fases) y una para el modelo de turbulencia (siempre que este sea resuelto mediante un modelo en ecuaciones a derivadas parciales). Todas las fases son tratadas como incompresibles pero como existe una sola presión solo una de ellas la incluye como una de sus incógnitas. Elegimos a la fase continua como aquella que incluye a la presión como incógnita mientras que cada fase dispersa contiene cada una de las fracciones correspondientes. Por ello la estabilización de la restricción de incompresibilidad se debe tener en cuenta sólo para la fase continua que eventualmente es aquella que podría originar modos espúreos de presión. De esta forma la fase continua se encuadra en un tratamiento numérico tipo flujo incompresible. Las fases dispersas (solo una en este trabajo) son más adecuadas en su resolución para una formulación compresible, jugando la fracción de la fase un rol similar a la densidad.

3.1. El método SUPG para sistemas advectivos difusivos reactivos

Como fuera presentado previamente en (9), el problema del flujo multifásico turbulento incompresible puede ser escrito como un sistema advectivo-difusivo-reactivo. La formulación variacional usando el método SUPG para sistemas advectivos-difusivos y extendidos a esta situación se puede escribir definiendo el espacio funcional a usar como:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{u}}^h &= \{ \mathbf{U}^h | \mathbf{U}^h \in (H^{1h})^{nsd}, \mathbf{U}^h \cdot \hat{\mathbf{g}}^h \text{ in } \Gamma_g \} \\ V_{\mathbf{u}}^h &= \{ \mathbf{N}^h | \mathbf{N}^h \in (H^{1h})^{nsd}, \mathbf{N}^h \cdot \hat{\mathbf{o}} \text{ in } \Gamma_g \} \end{aligned} \quad (14)$$

con

$$H^{1h} = \left\{ \phi^h | \phi^h \in C^0(\bar{\Omega}), \phi^h|_{\Omega^e} \in P^1, \forall \Omega^e \in \mathcal{E} \right\} \quad (15)$$

el espacio de Sobolev, P^1 representa una familia de polinomios de primer grado, nsd es la dimensión del dominio físico $\Omega = \cup \Omega^e$, \mathcal{E} representa la partición discreta del dominio físico siendo Ω^e la porción de esta partición correspondiente al elemento e .

La formulación *SUPG* de (9) se escribe como:

Hallar $\mathbf{U}^h \in S_u^h$ satisfaciendo

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}^h \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{U}^h)}{\partial \mathbf{U}^h} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}^a(\mathbf{U}^h) - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}^h} \mathbf{U}^h - \nabla \cdot \mathbf{F}^d(\nabla \mathbf{U}^h) - \mathbf{G}' \right\} d\Omega = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^h &= \mathbf{N}^h + \mathbf{P}^h \\ \mathbf{P}^h &= \tau \mathbf{A}^T(\mathbf{U}^h) \cdot \nabla \mathbf{N}^h \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}^a(\mathbf{U}^h) &= \mathbf{A}(\mathbf{U}^h) \cdot \nabla \mathbf{U}^h \\ \forall \mathbf{N}^h &\in V_u^h \end{aligned}$$

Debilitamos la expresión anterior (16) llegamos a

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \mathbf{N}^h \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{U}^h)}{\partial \mathbf{U}^h} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}^h} \mathbf{U}^h - \mathbf{G}' \right\} d\Omega + \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{N}^h \mathbf{A}(\mathbf{U}^h) \cdot \nabla \mathbf{U}^h d\Omega \right\} \zeta_{weak=0} + \\ &\left\{ \int_{\Omega} -\nabla \mathbf{N}^h \cdot \mathbf{F}^a d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^h \mathbf{F}^a \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma \right\} \zeta_{weak=1} + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^h \cdot \mathbf{F}^d(\nabla \mathbf{U}^h) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^h \mathbf{F}^d \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma + \\ &\int_{\Omega} \mathbf{P}^h \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{U}^h)}{\partial \mathbf{U}^h} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}^h} \mathbf{U}^h - \mathbf{G}' \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{P}^h \mathbf{A}(\mathbf{U}^h) \cdot \nabla \mathbf{U}^h d\Omega \end{aligned} \quad (17)$$

Donde la estabilización se aplica a todos los términos salvo al flujo difusivo. El código desarrollado cuenta con dos formulaciones para el término advectivo, la primera que corresponde al segundo término de la expresión anterior (termino advectivo sin debilitar) y la segunda correspondiente al tercer término la cual permite debilitar el término advectivo surgiendo uno adicional en el contorno. La matriz \mathbf{P}^h denominada perturbación de la función de peso depende de la matriz τ , denominada matriz de tiempos intrínsecos, cuyo diseño es un tema de constante interés científico. En este trabajo simplemente usamos una matriz diagonal donde sus valores se adoptan de forma de aproximar en la mayor medida posible la estabilización que se tendría usando el método SUPG-PSPG. Este método es

muy utilizado para la resolución por elementos finitos de problemas de flujo incompresible viscoso pero su formulación original no fue propuesta como un sistema advectivo-difusivo más frecuente en el caso de flujos compresibles. Como el caso multifásico tiene aspectos combinados de ambos tipos de flujos, por un lado la ecuación de continuidad tiene un fracción líquida que puede hacer las veces de una densidad variable (típica del caso compresible) y por otro lado la presión no aparece como incógnita del problema ya que no existe una ecuación termodinámica de estado que la ligue con las otras variables, típico del caso incompresible. Por el primer motivo consideramos necesario formular el problema en una manera similar a un flujo compresible y para evitar el inconveniente de no contar con la presión como incógnita hemos recurrido a una función que llamamos de entalpía, por su similitud con el problema de cambio de fase, que permite incorporar la presión al vector de estado. Esta misma función de entalpía puede usarse para cualquier tipo de cambio de variables, por ejemplo para el caso compresible cuando uno quiere trabajar externamente con variables primitivas e internamente con las variables de conservación. Se ha agregado a la ecuación de continuidad de la fase gaseosa un término de difusión numérica isotrópica adicional para estabilizar *overshoots-undershoots* presentes alrededor de soluciones con discontinuidades abruptas. En la siguiente sección mostramos como se pueden hacer equivalentes la formulación propuesta en este trabajo y la denominada *SUPG-PSPG*.

3.2. El método SUPG-PSPG visto como sistema advectivo difusivo reactivo

Los espacios para las funciones de peso e interpolación en el método SUPG-PSPG son definidas como sigue:

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{u}}^h &= \{\mathbf{u}^h | \mathbf{u}^h \in (H^{1h})^{nsd}, \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{g}^h \text{ in } \Gamma_g\} \\
V_{\mathbf{u}}^h &= \{\mathbf{N}^h | \mathbf{N}^h \in (H^{1h})^{nsd}, \mathbf{N}^h \cdot \mathbf{o} \text{ in } \Gamma_g\} \\
S_p^h &= \{q^h | q^h \in H^{1h}\} \\
V_p^h &= S_p^h
\end{aligned} \tag{18}$$

con

$$H^{1h} = \left\{ \phi^h | \phi^h \in C^0(\overline{\Omega}), \phi^h|_{\Omega^e} \in P^1, \forall \Omega^e \in \mathcal{E} \right\} \tag{19}$$

el espacio de Sobolev y P^1 un conjunto de polinomios de primer orden, nsd es la dimensión del dominio físico. La formulación *SUPG-PSPG* de la ecuación de Navier-Stokes incompresible se escribe como:

Hallar $\mathbf{u}^h \in S_{\mathbf{u}}^h$ y $p^h \in S_p^h$ satisfaciendo

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \mathbf{N}^h \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h \right) + \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{N}^h) : \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega + \\
 & + \underbrace{\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta}^h \cdot \left[\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^h \right] d\Omega}_{(SUPG)} + \\
 & + \underbrace{\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^h \cdot \left[\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^h \right] d\Omega}_{(PSPG)} + \\
 & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega} \tau_{(CONT)} \nabla \cdot \mathbf{N}^h \rho \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega + \int_{\Omega} q^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega = \int_{\Gamma_h} \mathbf{N}^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma \quad \forall \mathbf{N}^h \in V_u^h, \forall q^h \in V_p^h
 \end{aligned} \tag{20}$$

Los parámetros de estabilización son definidos como:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\delta}^h &= \tau_{supg} (\mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{N}^h) \\
 \boldsymbol{\epsilon}^h &= \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \nabla q^h \\
 \tau_{SUPG} &= \frac{h}{2 \|\mathbf{u}^h\|} z(Re_u) \\
 \tau_{PSPG} &= \tau_{SUPG} \\
 \tau_{CONT} &= \frac{h}{2} \|\mathbf{u}^h\| z(Re_u)
 \end{aligned} \tag{21}$$

con Re_u número de Reynolds basado en los parámetros del elemento:

$$Re_u = \frac{\|\mathbf{u}^h\| h}{2\nu} \tag{22}$$

Para lograr una estabilización similar al método *SUPG-PSPG*, la función de perturbación a aplicar en un esquema advectivo-difusivo-reactivo como el (16) para un caso 2D esta dada por:

$$\mathbf{P}^h = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial q^h}{\partial x} \frac{\tau_{supg}}{\rho} & \frac{\partial q^h}{\partial y} \frac{\tau_{supg}}{\rho} \\ \frac{\partial N^h}{\partial x} \rho \tau_{cont} & \left(\frac{\partial N^h}{\partial x} u + \frac{\partial N^h}{\partial y} v \right) \tau_{supg} & 0 \\ \frac{\partial N^h}{\partial y} \rho \tau_{cont} & 0 & \left(\frac{\partial N^h}{\partial x} u + \frac{\partial N^h}{\partial y} v \right) \tau_{supg} \end{pmatrix} \tag{23}$$

4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

4.1. Canal Bidimensional con un Escalon

Con el fin de validar el código desarrollado **Bubbly** correspondiente a la formulación presentada, se compara los resultados obtenidos al resolver el flujo a través de un canal bidimensional con un escalón con los publicados en el trabajo de K.Hiltunen⁵. Cabe destacar que para este ejemplo se ha eliminado el término difusivo de la ecuación de cantidad de movimiento del gas, por ser bajo su aporte, permitiendo independizar a esta última de la fracción de gas.

El dominio computacional y su malla pueden ser observados en la figura 1, manteniendo esta última el mismo número de elementos y distribución que los empleados en el trabajo de referencia. Las condiciones de contorno y condiciones iniciales para el ejemplo son:

Condiciones de Contorno

- Plano de Entrada, $v_{lx} = v_{gx} = 4v_{max}(1 - y/L) \cdot y/L$, $v_{ly} = v_{gy} = 0$, $\alpha_{gas} = 0,01$.
- Plano de Salida $v_{ly} = v_{gy} = 0$, $p = 0$.
- Muro superior e inferior, condición de no deslizamiento $\mathbf{v}_l = \mathbf{v}_g = \mathbf{0}$.

Condición Inicial

Se parte de un campo de velocidad constante en la dirección del flujo. La fracción de volumen para la fase dispersa es también constante en todo el dominio para el estado inicial.

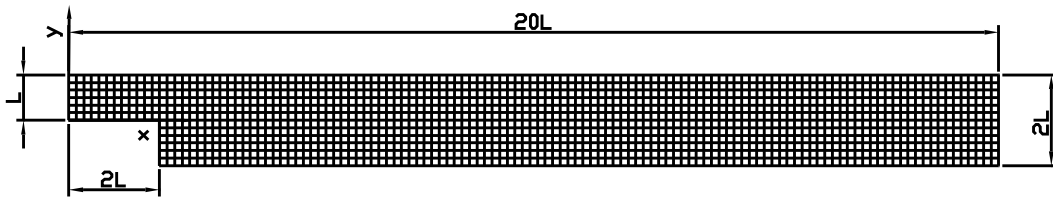


Figura 1: Dominio computacional y malla

En el presente ejemplo el único termino de transferencia de cantidad de movimiento entre fases es el correspondiente al Drag. Siendo la fuerza de interacción entre fases:

$$F_{l,g}^{inter} = \frac{3}{4} \frac{\mu_l}{d_{bubble}^2} Re_{bubble} C_{drag} \alpha_g \mathbf{v}_{rel} \quad (24)$$

Definimos al número de Reynolds de la fase para el plano de estrada como, $Re_\alpha = \rho_\alpha U_{max} L / \mu_\alpha$. La configuración física correspondiente al ejemplo esta dada en la tabla siguiente, la que se mantiene para todos los casos corridos.

Configuración Física			
Diám. de partícula (d)	5.0E-03 m	Coefficiente de Drag (C_{drag})	0,44
Densidad del Líq. (ρ_l)	1000 Kg/m ³	Relación de densidades ($b = \rho_l / \rho_g$)	0,5
Viscosidad del Líq. (μ_l)	3.8E-03 Ns/m ²		

En la figura 2a se compara la fracción de la fase dispersa obtenida por la formulación propuesta con los resultados de referencia para un plano $y=0$ con $[Re_l, Re_g] = (50, 100)$, observando un offset entre ambas curvas. Los mínimos de fracción de fase dispersa se encuentran desfasados, siendo el más cercano al escalón el obtenido por la formulación propuesta. La misma diferencia podemos observar en la fig.3a siendo ahora el número de Reynolds de fase $[Re_l, Re_g] = (100, 200)$. La presión calculada presenta la misma tendencia que los resultados de referencia para ambos Reynolds fig.2b y 3b, estando el mínimo para los Reynolds altos más cercano al de referencia.

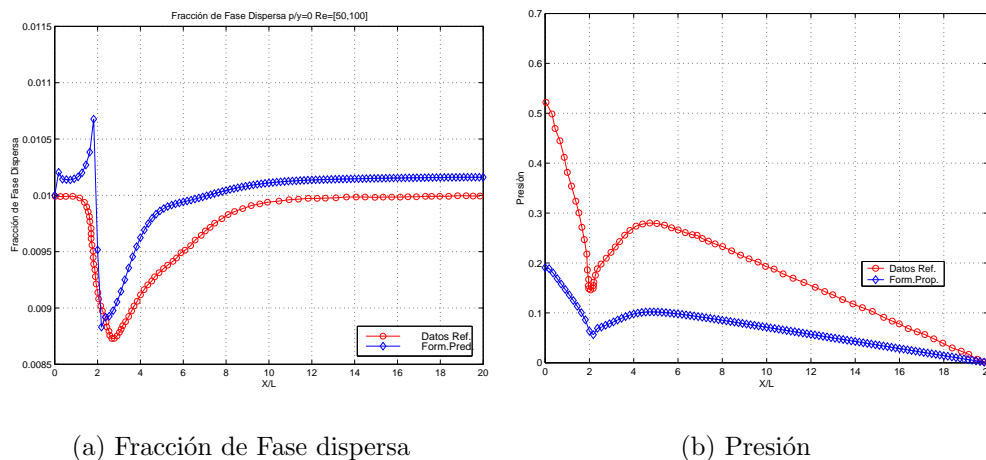


Figura 2: Resultados para un plano $y = 0$, $[Re_l, Re_g] = (50, 100)$

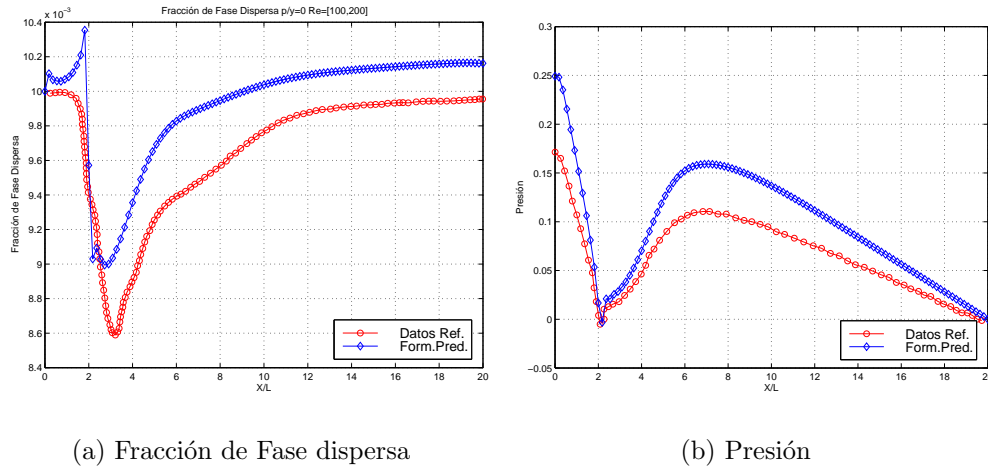


Figura 3: Resultados para un plano $y = 0$, $[Re_l, Re_g] = (100, 200)$

Se procedió a refinar la malla en forma uniforme, incrementando el número de elementos a 20100, al comparar los resultados de la fracción de gas para $[Re_l, Re_g] = (100, 200)$ fig.4a se aprecia un acercamiento a los valores de referencia en la zona de la entrada al escalón y a la salida del canal, estando ahora en fase el mínimo. La presión fig.4b no evidencia cambios notables con relación a la obtenida con la malla sin refinar.

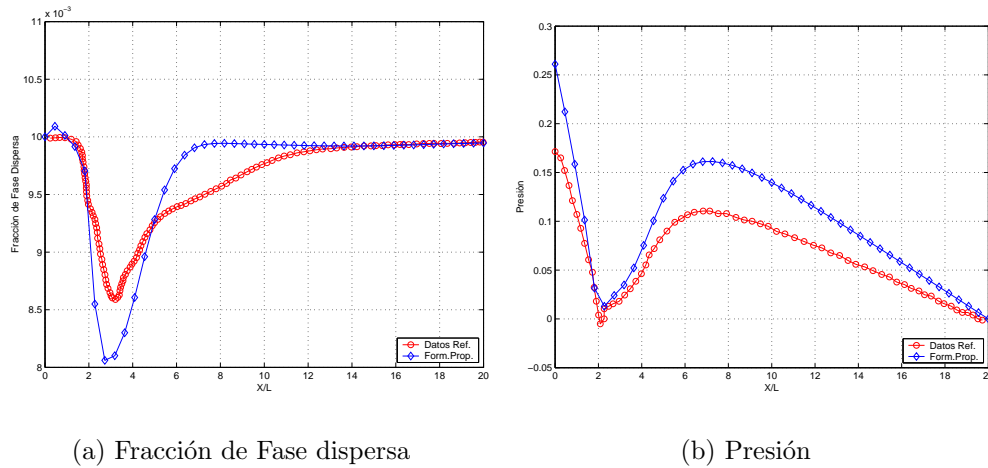


Figura 4: Resultados para un plano $y = 0$, $[Re_l, Re_g] = (100, 200)$, con malla refinada

En la fig. 5,6a y 6b observamos los campos de fracción de gas y modulo de las velocidades del líquido y gas para un Reynolds de fase $[Re_l, Re_g] = (100, 200)$.

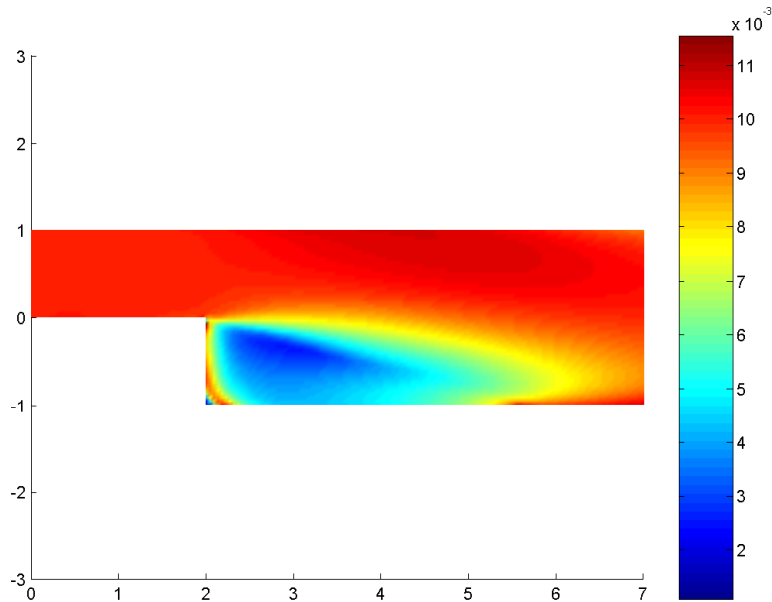
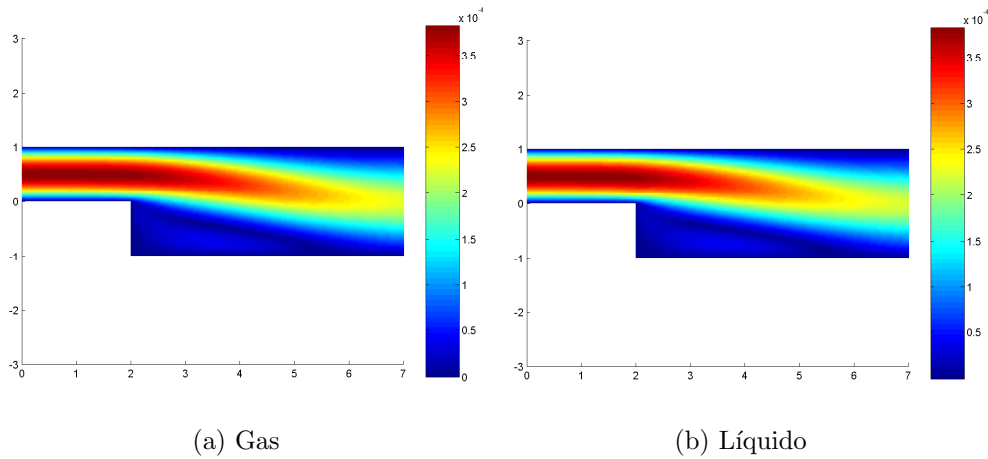


Figura 5: Fracción de Gas, para $[Re_l, Re_g] = (100, 200)$



(a) Gas

(b) Líquido

Figura 6: Modulo de Velocidad, para $[Re_l, Re_g] = (100, 200)$

En la fig.7 se compara la velocidad relativa obtenida con la formulación propuesta y la determinada en el trabajo de referencia para $[Re_l, Re_g] = (100, 200)$, observando que ambos campos poseen el mismo patron.

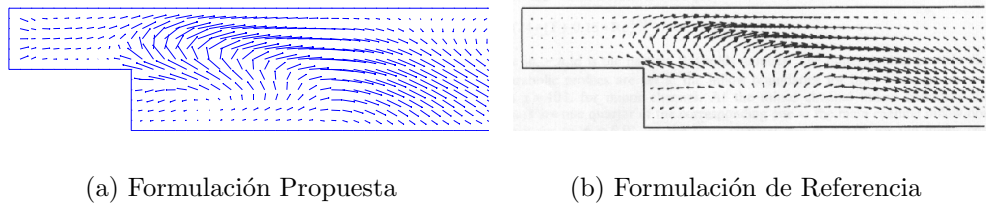


Figura 7: Velocidad relativa, para $[Re_l, Re_g] = (100, 200)$

5. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos por la formulación presentada, poseen las mismas tendencias que los encontrados en la bibliografía de referencia, notando una mejora en los mismos al incrementar el número de elementos de la malla. La formulación es robusta para los valores de fracción de vacío empleados para la validación del código desarrollado. No obstante se han detectado ciertas dificultades numéricas cuando la fracción de vacío crece a valores superiores a 0.5 que merece un estudio más profundo.

REFERENCIAS

- [1] T. Tezduyar, S. Mittal, S. Ray, R. Shih, “Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal order interpolation velocity-pressure elements”, *Comp. Meth. Applied Mechanics and Engineering*, 95, 1992.
- [2] Norberto Nigro, M. Storti and A. Zanotti “Numerical aspects of $\kappa - \epsilon$ turbulence modeling using a finite element incompressible Navier-Stokes formulations”, *Mecom 2002-Mecánica Computacional vol. XXI*, 700-719, 2002.
- [3] (PETSc-FEM) “A General Purpose, Parallel, Multi-Physics (FEM) Program, *Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC)*, Página Web: <http://www.cimec.org.ar/petscfem/>.
- [4] Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), Página Web: <http://www.cimec.org.ar>.
- [5] Kai Hiltunen, “A stabilized finite element method for particulate two-phase flow equations Laminar isothermal flow”, *Comp. Meth. Applied Mechanics and Engineering*, 147, 1997.