

VIBRACIONES LIBRES DE PLACAS CIRCULARES CON ORTOTROPÍA POLAR Y UNA MASA EXCÉNTRICA RÍGIDAMENTE ADOSADA

Samanta J. Escanes[†], Diana V. Bambill^{*} y Carlos A. Rossit^{*}

[†] Alumna de posgrado, Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur,
Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. E-mail: sescanes@ceia.uns.edu.ar

^{*} Instituto de Mecánica Aplicada, Departamento de Ingeniería y Departamento de Física,
Universidad Nacional del Sur, CONICET, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca,
Argentina. E-mail: dbambill@criba.edu.ar, carossit@criba.edu.ar

Palabras clave: Placas circulares, Vibraciones, Masas concentradas, Ortotropía cilíndrica, Ortotropía polar

Resumen: *Dado que los elementos estructurales en los que su resistencia a acciones mecánicas es distinta en diferentes direcciones, tienen una muy amplia aplicación en la tecnología moderna, se presenta en este estudio el caso de los materiales que poseen características de ortotropía polar (también llamada anisotropía cilíndrica). Estas características de ortotropía aparecen en materiales de origen natural como madera, pero también en materiales hechos por el hombre que, para mejorar su performance son reforzados en las direcciones radial y tangencial con respecto a un polo de coordenadas del material. En el caso de estudio, se analiza el comportamiento del coeficiente de frecuencia fundamental de placas circulares, para diferentes relaciones de ortotropía polar y masas puntuales rígidamente adosadas. Se consideran placas circulares simplemente apoyadas y empotradas.*

Abstract: *Natural- or man- made materials of cylindrical anisotropy or polar orthotropy are of considerable interest in several areas of technology. Some static problems are amenable to exact analytical solutions when dealing with polarly orthotropic plates or slabs. On the other hand, when analyzing their transverse vibrations, some important, practical problems do not lead themselves to straightforward analytical solutions and it turns out to be more convenient to make use of an approximate treatment like in the present case where the fundamental frequency of simply supported and clamped plates carrying an eccentrically located mass is determined.*

1 INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se analiza el comportamiento dinámico de placas circulares construidas con materiales con ortotropía polar. Estas características de ortotropía se presentan en materiales naturales como algunas piezas de madera, pero también en materiales hechos por el hombre que, para atender de manera más adecuada a diferentes fines, necesitan ser reforzados en las direcciones radial y tangencial ¹ con respecto a un “polo material”.

En la figura 1 se presenta el modelo estructural que consiste en la placa circular de material ortótropo con una masa puntual rígidamente adosada y vinculada en su contorno, según los casos a) simplemente apoyada y b) empotrada.

El polo de anisotropía es coincidente con el centro de la placa.

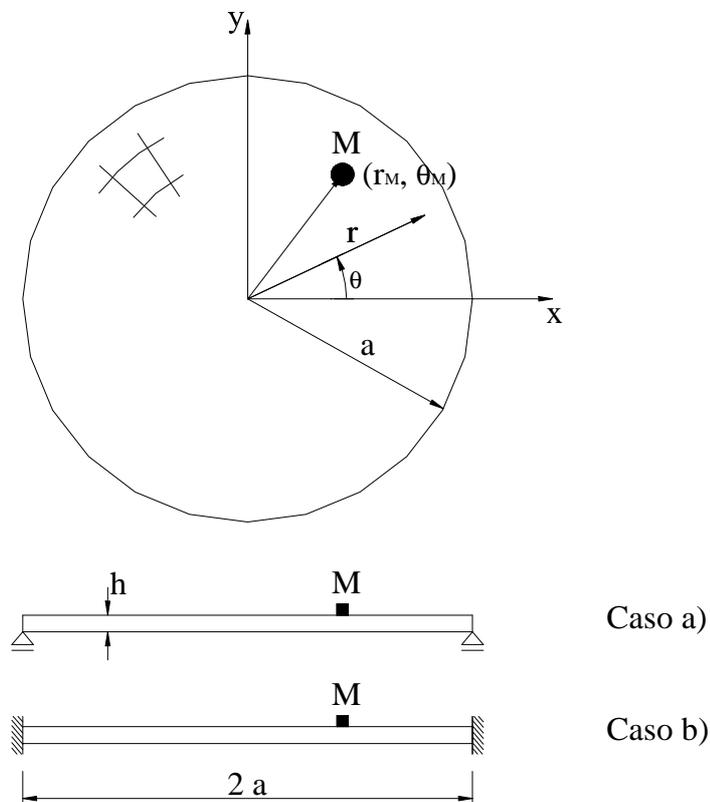


Figura 1: Placa circular vibrante

2 SOLUCIÓN APROXIMADA

El análisis del modelo estructural se hizo utilizando el conocido método de Rayleigh-Ritz^{2,3}, incluyéndose un parámetro exponencial de optimización en las funciones coordenadas y que permite una minimización ulterior de los autovalores en estudio.

La funcional de energía que gobierna el problema propuesto de la placa vibrante del modelo, se expresa como

$$\begin{aligned}
 J(W(r, \theta)) = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[D_r \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right)^2 + D_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + 2 D_r \nu_\theta \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + 4 D_k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right] r dr d\theta - \quad (1) \\
 & - \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho h W^2 r dr d\theta - \frac{1}{2} M \omega^2 (W(r_M, \theta_M))^2
 \end{aligned}$$

con

$W = W(r, \theta)$: función amplitud de desplazamiento.

$D_r = \frac{E_r h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}$: rigidez a la flexión de la placa en la dirección radial.

$D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}$: rigidez a la flexión de la placa en la dirección tangencial.

$D_k = \frac{G_{r\theta} h^3}{12}$: rigidez torsional de la placa.

h : espesor de la placa.

E_r : módulo de elasticidad en la dirección radial.

E_θ : módulo de elasticidad en la dirección tangencial.

$G_{r\theta}$: módulo de elasticidad transversal para las direcciones elásticas principales r y θ .

ν_r y ν_θ : coeficientes principales de Poisson.

M : magnitud de la masa puntual.

$W(r_M, \theta_M)$: amplitud del desplazamiento del punto donde se encuentra adosada la masa puntual.

ω : frecuencia natural circular de vibración del sistema estructural placa-masa de la figura 1.

La notación utilizada es la propuesta por Lekhnikskii⁴ en su clásico tratado.

Las condiciones de borde en el contorno de la placa son:

Caso a) Simplemente Apoyada

$$W(r, \theta)|_{r=a} = 0 \quad (2.a)$$

$$M_r|_{r=a} = 0 \quad (2.b)$$

donde

$$M_r = -D_r \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)^2 \right]$$

es la expresión del momento flector en la dirección radial. Las ecuaciones (2) corresponden a la condición de desplazamiento y momento nulo en el borde de la placa.

Caso b) Empotrada

$$W(r, \theta) \Big|_{r=a} = 0 \quad (3.a)$$

$$\frac{\partial W(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad (3.b)$$

las cuales se corresponden con las condiciones de desplazamiento y giro nulos en el borde de la placa.

A los efectos de aplicar el conocido método de Rayleigh-Ritz optimizado, se aproxima la función amplitud de desplazamiento de la placa mediante una suma de funciones coordenadas polinómicas, donde cada una de las cuales cumple las condiciones de borde.

$$W(r, \theta) \cong W_a(r, \theta) = A_0 f_0(r) + A_1 f_1(r) \cos \theta \quad (4)$$

Las expresiones adoptadas para las funciones coordenadas son:

$$f_0(r) = 1 + r^\gamma \alpha_0 + r^2 \beta_0$$

$$f_1(r) \cos \theta = (1 + r^\gamma \alpha_0 + r^2 \beta_0) r^2 \cos \theta$$

donde

γ : es el parámetro de optimización sugerido por Lord Rayleigh ².

$\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$: son coeficientes que se determinan a partir de la verificación de las condiciones de borde (2.a,b) y (3.a,b)

Al considerar los casos propuestos se obtienen las expresiones:

Caso a) Simplemente Apoyada

$$\alpha_0 = \frac{1}{a^\gamma} \frac{2(1 + \nu_\theta)}{(\gamma - 2)(1 + \gamma + \nu_\theta)} \quad (5.a)$$

$$\beta_0 = -\frac{1}{a^2} \frac{\gamma(\gamma + \nu_\theta - 1)}{(\gamma - 2)(1 + \gamma + \nu_\theta)} \quad (5.b)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{a^\gamma} \frac{2(5 + \nu_\theta)}{(\gamma - 2)(5 + \gamma + \nu_\theta)} \quad (5.c)$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{a^2} \frac{\gamma(3 + \gamma + \nu_\theta)}{(\gamma - 2)(5 + \gamma + \nu_\theta)} \quad (5.d)$$

Caso b) Empotrada

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{a^\gamma} \frac{2}{(\gamma - 2)} \quad (6.a-d)$$

$$\beta_0 = \beta_1 = -\frac{1}{a^2} \frac{\gamma}{(\gamma - 2)}$$

Procediendo de acuerdo al método de Rayleigh-Ritz se requiere que la funcional de energía sea un mínimo. Cuando se propuso la configuración deformada para la placa en la expresión (4), se consideraron dos parámetros: A_0 y A_1 y con respecto a ellos se minimiza la funcional.

Para minimizar la funcional se toman las derivadas parciales con respecto a cada uno de los parámetros y se igualan a cero. Tal procedimiento conduce a un sistema de ecuaciones simultáneas, cuya solución no trivial conduce a la ecuación-determinante en $\omega(\gamma)$

$$\frac{\partial J(W_a(r, \theta))}{\partial A_0} = \frac{\partial J(W_a(r, \theta))}{\partial A_1} = 0 \quad (7)$$

Se obtienen así los autovalores del problema que constituyen los coeficientes de frecuencia natural del sistema que expresamos de manera adimensional:

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D_r}} a^2 \quad (8)$$

y que quedan expresados en función del parámetro de optimización γ

$$\Omega = \Omega(\gamma) \quad (9)$$

Dado que los autovalores son cotas superiores, minimizando con respecto al parámetro γ

$$\frac{\partial \Omega(\gamma)}{\partial \gamma} = 0 \quad (10)$$

se obtienen los valores optimizados de los coeficientes de frecuencia natural.

El menor coeficiente de frecuencia es el coeficiente de frecuencia fundamental.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se han obtenido valores del coeficiente adimensional de frecuencia fundamental $\Omega = \omega \sqrt{\rho h / D_r} a^2$, para distintas posiciones (r_M, θ_M) de la masa puntual y diferentes valores de la magnitud M , expresados con relación a la masa propia de la placa: $M_p = \rho \pi a^2 h$.

Los resultados obtenidos para el coeficiente de frecuencia natural del primer modo de vibración, son independientes del valor de la coordenada θ_M de posición de la masa puntual, por tratarse de un material con ortotropía polar.

En las tablas 1 y 2 se presentan los valores obtenidos para los casos de vinculación propuesta simplemente apoyada y empotrada respectivamente considerando la masa ubicada en el centro de la placa ($r_M = 0$). Se analizaron dos casos diferentes de materiales con ortotropía polar y se compararon con la placa isótropa⁵. De la observación de los resultados mostrados surge que, para placas construidas con materiales ortótropos, los valores de la frecuencia fundamental son mayores que los que le corresponden a la placa isótropa tanto para el caso simplemente apoyado como para el empotrado, para los valores de parámetros escogidos.

En las tablas 3 y 4 se presentan los coeficientes de frecuencia fundamental obtenidos para los casos de placas simplemente apoyadas en el borde y con la masa puntual en posición excéntrica (r_M, θ_M) . La tabla 3, corresponde al material indicado como material I y la tabla 4 al material II. Como era de esperar, los autovalores poseen un valor mínimo cuando la masa concentrada está ubicada en el centro y aumentan su magnitud a medida que la masa se acerca al contorno. En ambas tablas, se observa un incremento en los valores del coeficiente de frecuencia fundamental con respecto a la placa de material isótropo, con igual posición y valor de la masa puntual.

Las tablas 5 y 6 corresponden a la placa empotrada, con la masa adosada en posición excéntrica. También aquí se puede observar que el comportamiento dinámico de los materiales ortótropos elegidos es superior al del material isótropo.

Tabla 1 – Coeficientes de frecuencia fundamental de la placa circular simplemente apoyada, con una masa puntual adosada en el centro.

I - $D_\theta/D_r = 6/5, D_k/D_r = 1/2, \nu_\theta = 0.30, \nu_r = 0.25$

II - $D_\theta/D_r = 3/2, D_k/D_r = 1/2, \nu_\theta = 0.30, \nu_r = 0.20$

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D_r}} a^2$$

M/M_p		Material ortótropo		Material isótropo ⁵
		I	II	
0	γ	4.89	5.76	
	Ω	5.21572	5.6004	4.9351
0.1	γ	3.22	4.14	
	Ω	4.48812	4.83525	4.2320
0.2	γ	2.76	3.23	
	Ω	3.98635	4.30581	3.7510
0.5	γ	2.39	2.63	
	Ω	3.10535	3.36642	2.9135
1	γ	2.24	2.43	
	Ω	2.40765	2.61538	2.2927
2	γ	2.17	2.32	
	Ω	1.79388	1.95113	1.71153

Tabla 2 – Coeficientes de frecuencia fundamental de la placa circular empotrada, con una masa puntual adosada en el centro

I - $D_\theta/D_r = 6/5, D_k/D_r = 1/2, \nu_\theta = 0.30, \nu_r = 0.25$

II - $D_\theta/D_r = 3/2, D_k/D_r = 1/2, \nu_\theta = 0.30, \nu_r = 0.20$

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D_r}} a^2$$

M/M_p		Material ortótropo		Material isótropo ⁵
		I	II	
0	γ	4.2	4.76	10.216
	Ω	10.5103	10.9144	
0.1	γ	2.86	3.22	8.1127
	Ω	8.40285	8.7935	
0.2	γ	2.53	2.78	6.8727
	Ω	7.14267	7.50694	
0.5	γ	2.28	2.46	5.0232
	Ω	5.24102	5.53563	
1	γ	2.19	2.34	3.75.95
	Ω	3.93006	4.16079	
2	γ	2.14	2.28	2.7402
	Ω	2.86763	3.04009	

Tabla 3 – Coeficientes de frecuencia fundamental para la placa circular simplemente apoyada con una masa puntual adosada en posición (r_M, θ_M) , $D_\theta/D_r = 6/5$, $D_k/D_r = 1/2$, $\nu_\theta = 0.30$, $\nu_r = 0.25$.

(a) Placa con ortotropía polar, (b) Placa isótropa

M/M_p		$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D_r}} a^2$				
		r_M/a				
		0	0.1	0.3	0.5	0.8
0	γ	3.74				
	Ω	5.21812				
0.1	γ	3.15	3.2	3.5	3.79	3.82
	Ω	4.48823 (a) 4.232 ^s (b)	4.50547 4.250	4.62487 4.371	4.82082 4.561	5.13783 4.861
0.2	γ	2.83	2.93	3.36	3.79	3.9
	Ω	3.98643 3.751	4.01366 3.778	4.19265 3.959	4.49304 4.250	5.05785 4.784
0.5	γ	2.47	2.62	3.16	3.7	4.16
	Ω	3.10563 2.913	3.14435 2.954	3.37906 3.188	3.78782 3.580	4.82285 4.548
1	γ	2.29	2.46	3.03	3.66	4.55
	Ω	2.4078 2.255	2.44815 2.292	2.68167 2.529	3.0981 2.925	4.46078 4.165
2	γ	2.19	2.37	2.95	3.56	5.07
	Ω	1.79393 1.678	1.82976 1.715	2.03159 1.916	2.3968 2.260	3.87723 3.540

Tabla 4 – Coeficientes de frecuencia fundamental para la placa circular simplemente apoyada con una masa puntual adosada en posición (r_M, θ_M) , $D_\theta/D_r = 3/2$, $D_k/D_r = 1/2$, $\nu_\theta = 0.30$, $\nu_r = 0.20$

		$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D_r}} a^2$				
M/M_p		r_M/a				
		0	0.1	0.3	0.5	0.8
0	γ	4.22				
	Ω	5.60273				
0.1	γ	3.53	3.59	3.92	4.27	4.34
	Ω	4.83624	4.85283	4.972	5.17397	5.51382
0.2	γ	3.14	3.25	3.73	4.25	4.45
	Ω	4.30588	4.33182	4.51076	4.82016	5.42498
0.5	γ	2.69	2.85	3.47	4.14	4.79
	Ω	3.36652	3.40346	3.63934	4.05928	5.163
1	γ	2.48	2.65	3.29	3.99	5.26
	Ω	2.61547	2.65429	2.89001	3.3165	4.75931
2	γ	2.355	2.54	3.19	3.85	5.8
	Ω	1.95117	1.9859	2.19024	2.563	4.11497

Tabla 5 – Coeficientes de frecuencia fundamental para la placa circular empotrada con una masa puntual adosada en posición (r_M, θ_M) , $D_\theta/D_r = 6/5$, $D_k/D_r = 1/2$, $\nu_\theta = 0.30$, $\nu_r = 0.25$

(a) Placa con ortotropía polar, (b) Placa isótropa

M/M_p		$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D_r}} a^2$				
		r_M/a				
		0	0.1	0.3	0.5	0.8
0	γ	3.44				
	Ω	10.5262				
0.1	γ	2.83	2.94	3.33	3.57	3.46
	Ω	8.40299 (a) 8.112 ⁵ (b)	8.49634 8.213	9.05128 8.766	9.8032 9.487	10.4882 10.189
0.2	γ	2.57	2.73	3.26	3.67	3.49
	Ω	7.14291 6.872	7.27939 7.019	8.05899 7.777	9.2072 8.826	10.4502 10.148
0.5	γ	2.32	2.51	3.17	3.86	3.56
	Ω	5.24138 5.023	5.40568 5.196	6.32601 6.588	7.9054 7.336	10.3374 9.996
1	γ	2.21	2.42	3.13	4.02	3.69
	Ω	3.9302 3.759	4.08216 3.918	4.93919 4.701	6.58605 5.887	10.1522 9.613
2	γ	2.15	2.37	3.1	4.15	4.01
	Ω	2.86767 2.740	2.99205 2.869	3.70096 3.506	5.18425 4.472	9.79252 6.194

Tabla 6 – Coeficientes de frecuencia fundamental para la placa circular empotrada con una masa puntual adosada en posición (r_M, θ_M) , $D_\theta/D_r = 3/2$, $D_k/D_r = 1/2$, $\nu_\theta = 0.30$, $\nu_r = 0.20$.

		$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D_r}} a^2$				
M/M_p		r_M/a				
		0	0.1	0.3	0.5	0.8
0	γ	3.69				
	Ω	10.9371				
0.1	γ	3.06	3.15	3.55	3.8	3.71
	Ω	8.79514	8.88054	9.41744	10.1736	10.8948
0.2	γ	2.78	2.92	3.47	3.92	3.73
	Ω	7.50696	7.63204	8.39127	9.54666	10.8527
0.5	γ	2.48	2.68	3.37	4.11	3.83
	Ω	5.53577	5.68833	6.59358	8.18389	10.7272
1	γ	2.36	2.57	3.31	4.26	3.97
	Ω	4.16086	4.30336	5.15121	6.80983	10.5216
2	γ	2.29	2.51	3.28	4.39	4.33
	Ω	3.04011	3.15751	3.86135	5.35537	10.1228

4 CONCLUSIONES

De la observación de los resultados mostrados en las tablas surge claramente que, como era de esperar, el coeficiente de frecuencia fundamental es menor al aumentarse la magnitud de la masa puntual con relación a la masa de la placa. La posición de la masa también afecta al coeficiente fundamental, los menores valores corresponden a la masa centrada y aumentan gradualmente a medida que la masa se aleja del centro de la placa.

Analizado el modelo, según se ve en las tablas, permite determinar que el comportamiento dinámico de las placas de materiales ortótropos elegidos es más adecuado que el de las placas isótropas, ya que en todos los casos los coeficientes fundamentales resultan ser mayores. En principio esto puede lograr con plásticos reforzados con fibras de grafito o carbono.

En cuanto a la utilización de las funciones aproximantes de la forma propuesta, resultaron

adecuadas para tomar en consideración el efecto que se produce al colocar la masa en posición no centrada. Asimismo el hecho de adoptar el parámetro de optimización γ , permitió optimizar el valor de cada coeficiente de frecuencia fundamental.

5 AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el Dr. Patricio A. A. Laura por sus valiosos consejos y asesoramiento.

El presente estudio ha sido auspiciado por el CONICET y por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de Universidad Nacional del Sur.

6 REFERENCIAS

- [1] J. N. Petzing and J. R. Tyler, "The effect of metallographic structure on clamped plate vibration characteristics", *Experimental Mechanics*, **36**, 127-234 (1995).
- [2] Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*, Segunda Edición, Vol. 1, Macmillan, London (1884), Sec. 88 (Re-Edición por Dover, New York, 1945).
- [3] W. Ritz, "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik" (Un nuevo método para resolver ciertos problemas de variaciones en la física matemática), *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. **135**, 1-61 (1908).
- [4] S. G. Lekhnitskii, *Anisotropic Plates*, Gordon and Breack Science Publishers, New York, N. Y. (1968).
- [5] D. V. Bambill, P. A. A. Laura, C. A. Rossit y S. J. Escanes, "Frecuencias naturales de vibración de placas circulares con una masa adosada", *Mecánica Computacional*, Vol. **XXI**, 2168-2175 (2002).