

## TOMA DE AGUA POR RAÍCES DE CULTIVOS MEDIANTE UN MODELO DE FRONTERA MÓVIL

Jorge L. Blengino Albrieu\*<sup>†</sup>, Juan C Reginato\*, y Domingo Tarzia<sup>†‡</sup>

\*Departamento de Física, Universidad Nacional de Río Cuarto  
Ruta 36 km 601, X5804BYA Río Cuarto, Argentina  
e-mail: jblengino@exa.unrc.edu.ar, web page: <http://www.unrc.edu.ar>

<sup>†</sup>Departamento de Matemática Fac. de Cs. Empr.; Universidad Austral  
Rosario, Argentina

<sup>‡</sup>CONICET

**Palabras Clave:** Frontera Móvil, Toma de Agua, Diferencias Finitas.

**Resumen.** *Desde los comienzos de la agricultura es de vital importancia el conocimiento de los procesos de absorción de agua por raíces de cultivos. Así diversos autores han propuesto diferentes funciones de extracción de agua del suelo por cultivos obtenidas empíricamente y mediante modelos de frontera fija. En esta comunicación se propone un modelo dinámico de frontera móvil a una fase (suelo) para la predicción del potencial agua sobre la superficie de las raíces. Con estos resultados se estima la toma de agua por parte de un sistema radical creciendo mediante la integración en un dominio variable. La solución del modelo de frontera móvil se obtiene mediante la aplicación de un método implícito de diferencias finitas en sucesivas capas.*

## 1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de los años se han propuesto diversos modelos para la toma de agua por raíces de cultivos. Muchos de ellos utilizando un análogo de la ley de Ohm<sup>1</sup> y definiendo resistencias al flujo de agua tanto en el suelo,<sup>2,3</sup> como en la interface raíz-suelo.<sup>4,5</sup> Recientemente han sido propuestos modelos de toma de nutrientes acoplada con crecimiento de raíces mediante modelos de frontera libre,<sup>6-9</sup> y mediante modelos de frontera móvil.<sup>10</sup>

En este trabajo se asume un crecimiento radical conocido a priori y a partir de la formulación de un modelo de frontera móvil se estimarán los cambios en el potencial agua en la fase suelo y se obtendrá el valor del potencial agua sobre la raíz. Utilizando un método de integración sobre dominios variables<sup>11</sup> obtenemos la toma total de agua por parte de la raíz.

## 2. ANÁLISIS

De acuerdo al modelo de flujo de agua hacia una única raíz, el flujo en la dirección radial hacia la raíz por unidad de longitud esta dado<sup>12</sup> por:

$$v = -\pi r k(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (1)$$

siendo  $v$  el flujo de agua por unidad de longitud  $\left(\frac{cm^3}{s}\right)$ ,  $k$  la conductibilidad hidráulica  $\left(\frac{cm}{s}\right)$  y  $-\Psi$  el potencial agua  $(cm)$ .

Con su correspondiente ecuación de continuidad

$$2\pi \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial r} \quad (2)$$

donde  $\theta$  es el contenido de agua del suelo  $\left(\frac{cm^3}{cm^3}\right)$ . Al ser  $\theta$  función de  $\Psi$  entonces se cumple que

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = C(\Psi) \frac{\partial(\Psi)}{\partial t} \quad (3)$$

donde  $C(\Psi)$  es la capacidad diferencial de humedad del suelo, para calcularla suponemos que  $\Psi$  es una función univaluada.

Entonces combinamos 3 y 2 con 1 y obtenemos

$$2C(\Psi) \frac{\partial(\Psi)}{\partial t} = - \left[ k(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial r} + r k(\Psi) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial \Psi} k(\Psi) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

Las relaciones entre  $k$ ,  $\Psi$  y  $\theta$  estan dadas por:<sup>13</sup>

$$\Psi = \Psi_e \left( \frac{\theta}{\theta_s} \right)^{-b} = \Psi_0 \theta^{-b} \quad (5)$$

$$k(\Psi) = k_s \left( \frac{\Psi_e}{\Psi} \right)^n = k_0 \Psi^{-n} \quad (6)$$

con  $\Psi_0 = \Psi_e \theta_s^b$  y  $k_0 = k_s \Psi_e^n$ , donde  $\Psi_e$  es el potencial suelo-agua de entrada de aire (cm),  $\theta_s$  es el contenido de saturación suelo-agua ( $cm^3 cm^{-3}$ ),  $k_s$  es la conductividad hidráulica saturada del suelo,  $-b$  es la pendiente de la curva característica suelo-agua  $\Psi = \Psi(\theta)$  en un sistema coordenado log-log y  $n$  es la pendiente de la curva  $k(\Psi)$  en un sistema coordenado log-log.

Utilizando las ecuaciones 5 y 6 en la ecuación 4 obtenemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \alpha \Psi^{\frac{1}{b}+1-n} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{rn}{\Psi} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 + r \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right], \quad (7)$$

con  $\alpha = \frac{k_0 b}{2 \Psi_0^{\frac{1}{b}}}$ .

Así el sistema a resolver (en coordenadas cilíndricas) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \alpha \Psi^{\frac{1}{b}+1-n} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{rn}{\Psi} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 + r \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right] \\ \Psi(r, 0) &= \phi(r) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial r}(R, t) &= 0 \\ G(\Psi(s_0, t)) &= -\pi s_0 \ell(t) k_0 (\Psi(s_0, t))^{-n} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ R(t) &= R_0 \sqrt{\frac{\ell(0)}{\ell(t)}} \\ \ell(t) &= \ell_0 + v * t, \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $\ell(t)$  es el largo de la raíz a tiempo  $t$ ,  $\phi(r)$  una función univaluada que cumpla las condiciones de contorno, la condición en  $r = R$  surge de pedir que el flujo total de agua en el borde externo sea nulo,  $G(\Psi(s_0, t))$  es la toma de agua por unidad de longitud en el borde de la raíz ( $cm^3/(s \text{ cm})$ ). Varias funciones de extracción han sido propuestas, por simplicidad utilizaremos la definida por<sup>14</sup>

$G(\Psi) = 0$	si	$0 > \Psi > \Psi_1$	= potencial agua punto anaerobiosis
$G(\Psi) = S_{Max}$	si	$\Psi_1 > \Psi > \Psi_2$	= potencial agua punto límite
$G(\Psi) = S_{Max} \frac{\Psi - \Psi_3}{\Psi_2 - \Psi_3}$	si	$\Psi_2 > \Psi > \Psi_3$	= potencial agua punto marchitez
$G(\Psi) = 0$	si	$\Psi_3 > \Psi$	

### 3. SOLUCIÓN PROPUESTA

Inicialmente aplicamos el método de inmovilización del dominio haciendo la transformación

$$\begin{aligned} y &= \frac{r - s_0}{R(t) - s_0} \\ \tilde{t} &= t \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Phi(y, \tilde{t}) = \Psi(r, t). \tag{10}$$

Con lo que el sistema resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{t}} &= \alpha \Phi^{\frac{1}{b}+1-n} \left[ \left( \frac{1}{\delta(\tilde{t})} - \frac{\dot{R}(\tilde{t})y\Phi^n}{\alpha\delta(\tilde{t})^2\Phi^{\frac{1}{b}+1}} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] + \\ &+ \alpha \Phi^{\frac{1}{b}+1-n} \left[ -\frac{y\delta(\tilde{t}) + s_0}{\delta(\tilde{t})^2} \frac{n}{\Phi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{y\delta(\tilde{t}) + s_0}{\delta(\tilde{t})^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right], \\ \Phi(y, 0) &= \varphi(y) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(1, \tilde{t}) &= 0. \\ G(\Phi(0, \tilde{t})) &= -\ell(t) \frac{\pi s_0 k_0}{\delta(\tilde{t}) (\Phi(0, \tilde{t}))^n} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ R(\tilde{t}) &= R_0 \sqrt{\frac{\ell(0)}{\ell(\tilde{t})}} \\ \ell(\tilde{t}) &= \ell_0 + v * \tilde{t}, \end{aligned} \tag{11}$$

con  $\delta(\tilde{t}) = R(\tilde{t}) - s_0$ , y  $\varphi(y) = \phi(r)$ .

Teniendo el dominio inmovilizado, discretizamos las ecuaciones, utilizando diferencias finitas hacia atrás tanto en el tiempo como en el espacio, para llevar el sistema a

$$\begin{aligned} \Phi_i^{t-1} \sigma_i^t &= -\Phi_{i+1}^t + \Phi_i^t [\sigma_i^t - \rho_i^t + n + 2] + \\ &+ \Phi_{i-1}^t \left[ \rho_i^t + \frac{n\Phi_{i-1}^t}{\Phi_i^t} - 2n - 1 \right], \\ \Phi_i^0 &= \varphi_i, \\ \Phi_N^t &= \Phi_{N-1}^t, \\ \Phi_0^t - \Phi_1^t &= \frac{\delta^t \Delta y (\Phi_0^t)^n}{\ell^t \pi s_0 k_0} G(\Phi_0^t) \\ R^t &= R_0 \sqrt{\frac{\ell^0}{\ell^t}} \\ \ell^t &= \ell^0 + v * t * \Delta \tilde{t}, \end{aligned} \tag{12}$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma_i^t} &= \beta_i^t(i\Delta y\delta^t + s_0), \\ \rho_i^t &= \frac{\Omega_i^t}{i\Delta y\delta^t + s_0}, \\ \Omega_i^t &= \left( \delta^t - \frac{\dot{R}(t)i\Delta y(\Phi_i^t)^n}{\alpha(\Phi_i^t)^{\frac{1}{b}+1}} \right) \Delta y,\end{aligned}$$

y

$$\beta_i^t = \frac{\alpha\Delta\tilde{t}}{(\delta^t\Delta y)^2} (\Phi_i^t)^{\frac{1}{b}+1-n}. \quad (13)$$

Como el potencial agua en el suelo es negativo entonces  $\Phi > 0$  en todo el dominio, pero por las condiciones de contorno en el borde de la raíz, para que  $\Phi_1^t > 0$  resulta:

$$\frac{(\Phi_0^t)^{1-n}\ell^t\pi s_0 k_0}{\delta^t G(\Phi_0^t)} > \Delta y, \quad (14)$$

como  $\Phi_0^t$  tiene un orden de magnitud que va desde  $10^2$  a  $10^5$  y  $2 \leq n \leq 10$ , entonces  $10^{-6} \gtrsim \Delta y \gtrsim 10^{-50}$  por lo que decidimos modificar el método de diferencias finitas.

### 3.1. Diferencias Finitas Modificadas

El método consiste en generar una malla adaptada al problema. Como el limitante en  $\Delta y$  está sobre el borde del intervalo, dividimos el problema en 3 partes. Una parte es encontrar el valor del potencial en el borde de la raíz, otra es encontrar el potencial dentro del intervalo y la tercera es encontrar el potencial en el extremo opuesto a la raíz. La malla la hacemos de acuerdo a la figura 1 donde se puede observar que esencialmente tenemos 3 tipos de intervalo con sus correspondientes condiciones de contorno.

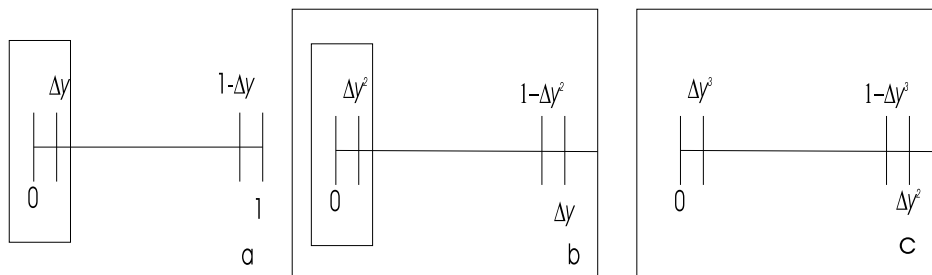


Figura 1: Mallado utilizado en la resolución del problema: en la parte a) se observa el intervalo completo, en la parte b) es el mallado para el recuadro de la parte a), y en la parte c) se observa el mallado para el recuadro pequeño de la parte b). (esta figura va mas chica)

El intervalo  $[0, 1]$  -fig 1a)- con condiciones de contorno como más arriba para  $y = 1$  y  $\Phi_0^t$  fijo, el intervalo  $[0, \Delta t]$  -fig 1b)- con ambos extremos fijos y el intervalo  $[0, (\Delta t)^2]$ , -fig 1c)- donde calculamos  $\Psi_0^t$  y mantenemos  $\Phi_{(\Delta t)^2}^t$  fijo.

#### 4. RESULTADOS

Este modelo es cualitativo, y se ha obtenido solución solamente para un tipo de suelo (arcilloso) con parámetros experimentales típicos, en este momento se está trabajando para extender la solución a otros tipos de suelo.

Se pueden notar 3 zonas de interés basados en la función de toma,

- la zona de toma constante, a este fin se realizaron corridas con  $\Phi(0, 0) = 300$ , cuyos resultados se muestran en la figura 2;
- la zona límite, donde la absorción pasa del régimen constante al régimen lineal, a este fin se realizaron corridas con  $\Phi(0, 0) = 750 = \Phi_2$ , cuyos resultados se muestran en la figura 3;
- y la zona de toma lineal con el potencial, a este fin se realizaron corridas con  $\Phi(0, 0) = 10000$ , cuyos resultados se muestran en la figura 4;

en todos los casos la condición inicial cumple la condición de borde para  $y = 1$ . Las figuras siempre muestran las distintas capas, en todos los casos es la capa con  $\Delta y$  más pequeño la que está por encima.

En la figura 5 se puede observar una comparación entre los valores de  $\Phi(0, t)$  para las tres soluciones. Se puede observar que al no estar estrictamente en el mismo caso las variaciones no son necesariamente debidas al cambio de  $\Phi(0, 0)$  sino por ejemplo al hecho que en la parte a) tenemos una condición inicial con gradiente y en la parte b) una condición sin gradiente.

#### 5. CONCLUSIONES

Se puede observar en la figura 5 que la disminución en el potencial es sensiblemente mayor en el caso de  $\Phi(0, 0) = 10000$  que en los demás casos, esto indica que el suelo se está secando, y por lo tanto el agua es mucho más difícil de extraer por la planta. Como en este caso el suelo de por sí está bastante seco, es de esperar que el agua esté fuertemente ligada a las partículas de suelo. Por otro lado considerando el contenido real de agua, tal cual se muestra en la figura 6 se puede observar que la variación real de contenido de agua es mayor en el caso de  $\Psi(0, 0) = 300$ , como era de esperarse. La similitud en las variaciones de los contenidos de agua en los casos de  $\Phi(0, 0) = 750$  y  $\Phi(0, 0) = 10000$  se deberían a las distintas formas de la condición inicial. El hecho de que en la figura 7 no se observen variaciones significativas de la absorción total de agua en los casos de  $\Phi(0, 0) = 750$  y  $\Phi(0, 0) = 300$  se debe a que las variaciones de potencial en el caso de  $\Phi(0, 0) = 750$  fueron muy pequeñas para producir un efecto relevante.

En cuanto a la forma de la curva, es similar a modelos anteriores<sup>15</sup> que utilizan frontera fija.

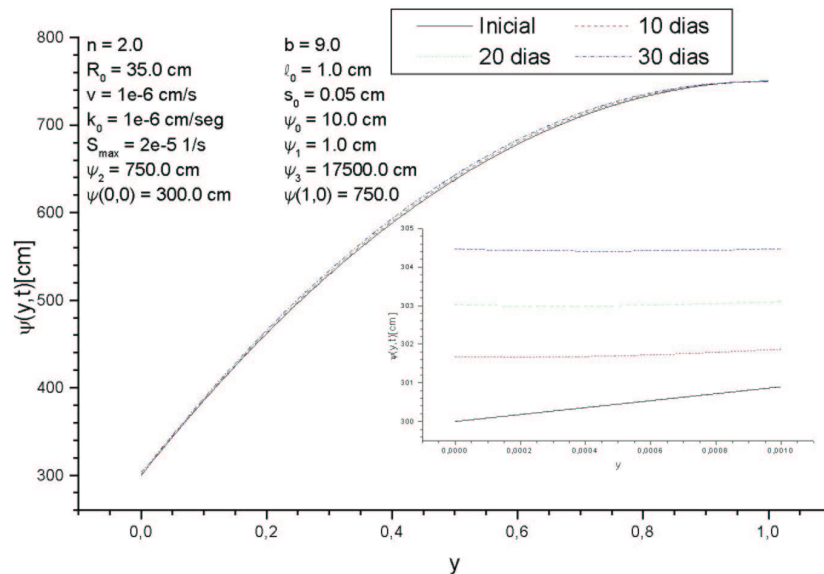


Figura 2: Variaciones de los perfiles del módulo del potencial ( $\Phi(y, t)$ ) en función del tiempo. En el recuadro se puede observar un detalle para la capa más cercana al origen.

## REFERENCIAS

- [1] T.H. Van den Honert. Water transport in plant as a catenary process. *Discuss. Faraday Soc.*, **3**, 146–153 (1948).
- [2] W.R. Gardner. Dinamic aspects of water availability to plants. *Soil. Sci.*, **89**, 63–73 (1960).
- [3] E.I. Newman. Resistance to water flow in soil and plant. i. soil resistance in relation to amounts of root: theoretical estimates. *J. Appl. Ecol.*, **16**, 1–12 (1969).
- [4] W.N. Herkelrath, E.E. Miller, and W.R. Gardner. Water uptake by plants; ii. the root contact model. *Soil. Sci. Soc. Am. J.*, **41**, 1039–1043 (1977).
- [5] P.E. Weatherley. The hydraulic resistance of the soil-root interface: a cause of water stress in plants. In *The soil-root interface symposium, Oxford, England*, (1978).
- [6] J.C. Reginato, Tarzia D.A., and Cantero A. On the free boundary problem for the Michelis-Menten absorption model for root growth. *Soil. Sci.*, **150**(4), 722–729 (1990).
- [7] J.C. Reginato, D.A. Tarzia, and A. Cantero. On the free boundary problem for the Michelis-Menten absorption model for root growth. High concentrations. *Soil. Sci.*, **152**(2), 61–72 (1990).
- [8] J.C. Reginato and D.A. Tarzia. The balance integral method applied to root growth of crops. *Int. J. Engng. Sci.*, **31**(1), 61–70 (1993).
- [9] J.C. Reginato, D.A. Tarzia, and M.A. Dzioba. Analitical study of the effects of some soil plant parameters on root growth owing to absorption of one mobile ions. A free

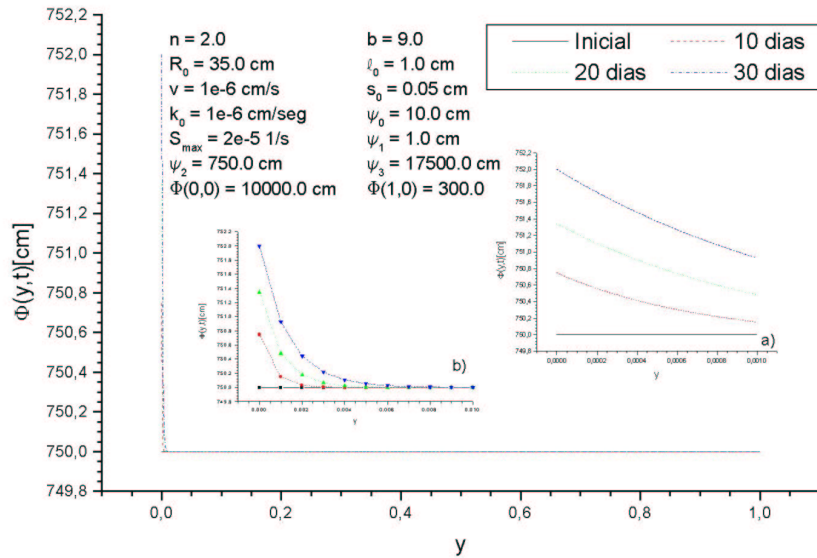


Figura 3: Variaciones de los perfiles del módulo del potencial ( $\Phi(y, t)$ ) en función del tiempo. En el recuadro a) se puede observar un detalle para la capa más cercana al origen, mientras que en el recuadro b) se observa un detalle de la zona cercana al borde, pero con valores de  $y$  que no pertenecen a la otra capa.

boundary model. *Plant and Soil*, **15**, 185–196 (1993).

- [10] J.C. Reginato, M.C. Palumbo, D.A. Tarzia, Ch.I. Bernardo, and I.S. Moreno. Modeling nutrient uptake using a moving boundary approach. Comparison with the Barber-Cushman model. *Soil Science Society of America Journal*, **64**, 1863–1367 (2000).
- [11] J.C. Reginato and D.A. Tarzia. An alternative formula to compute the nutrient uptake. *Comm. in Soil Sci and Plant An.*, **33**(5&6), 821–830 (2002).
- [12] P.H. Nye and Tinker P.B. Solute movement in soil-root system. In *Studies in Ecology*, volume 4. University of California Press, Berkley, (1977).
- [13] G.S. Campbell. A simple method for determining unsaturated conductivity from moisture retention data. *Soil Sci.*, **117**, 311–314 (1974).
- [14] R.A. Feddes, P.J. Kowalik, and H. Zaradny. *Simulation of field water use and crop yield*. Centre for Agricultural Publishing and Documentation, (1978).
- [15] Molz F.J. Models of water transport in the soil-plant system: a review. *Water Resources Research*, **17**(5), 1245–1260 (1981).



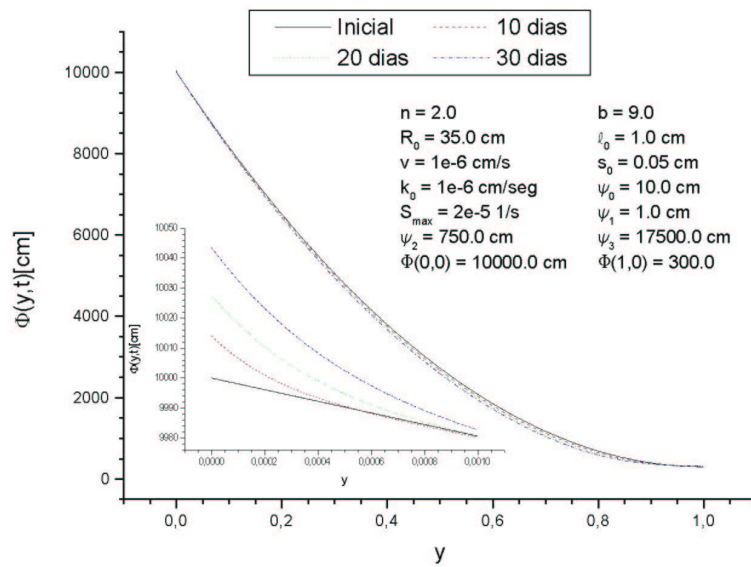


Figura 4: Variaciones de los perfiles del módulo del potencial ( $\Phi(y, t)$ ) en función del tiempo. En el recuadro se puede observar un detalle para la capa más cercana al origen.

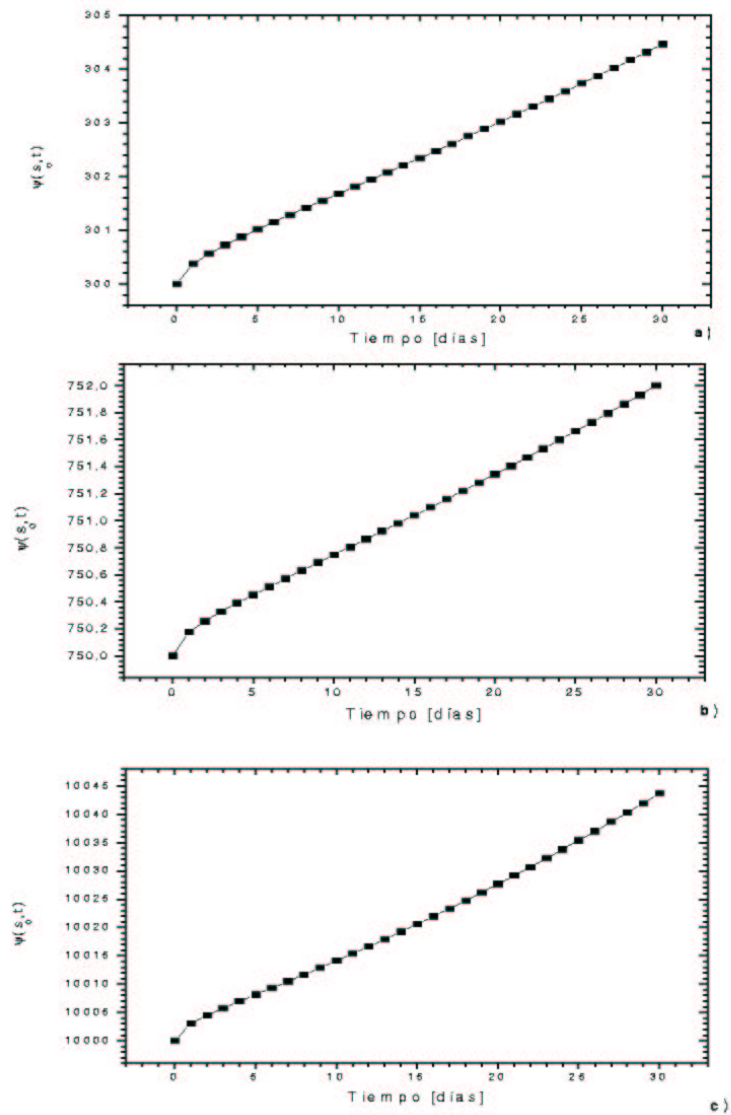


Figura 5: Comparación de los potenciales en el borde de la raíz ( $\Phi(0, t) = \Psi(s_0, t)$ ) en los casos mostrados anteriormente.

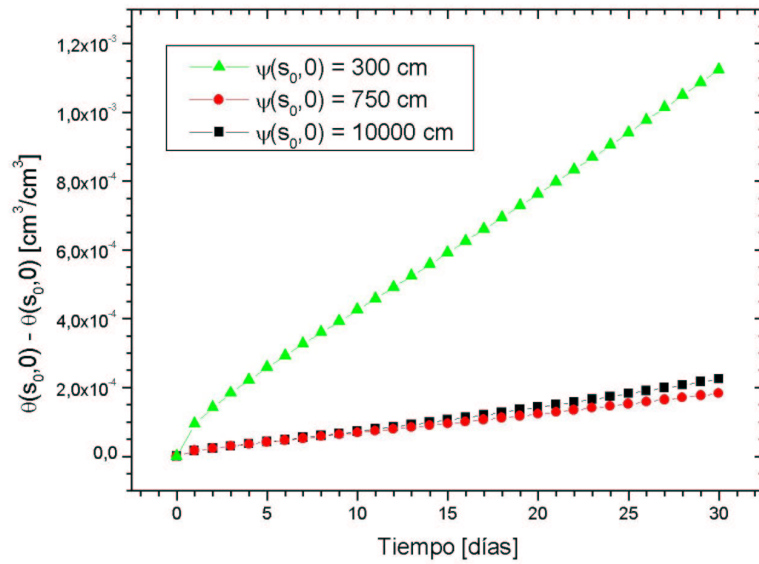


Figura 6: Comparación de la variación del contenido de agua ( $\theta(s_0, t)$ ) en el borde de la raíz en los casos mostrados anteriormente.

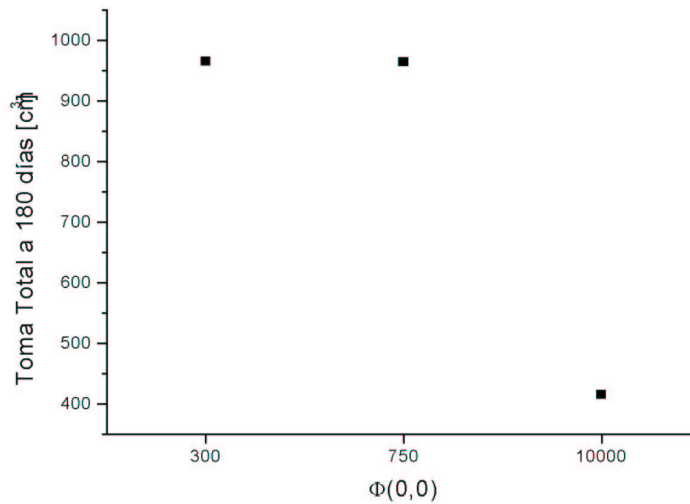


Figura 7: Comparación de las tomas totales de agua luego de 180 días.