

## ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE LA SOLUCIÓN ANALÍTICA Y NUMÉRICA DE LAS VIBRACIONES TRANSVERSALES DE PLACAS CIRCULARES CON BORDES ELÁSTICAMENTE RESTRINGIDOS CONTRA ROTACIÓN

Mariano Febbo\*, Sergio A. Vera\* y Carlos A. Rossit\*

\*Departamento de Ingeniería y Física, Universidad Nacional del Sur  
Av. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina  
e-mail: svera@criba.edu.ar, web page: <http://www.uns.edu.ar>

**Key Words:** Placas circulares, Bordes elásticamente restringidos, Frecuencias naturales, Soluciones analíticas y numéricas.

**Abstract.** *En este trabajo se presenta una reseña de estudios sobre las vibraciones de placas circulares macizas y anulares con bordes elásticamente restringidos contra rotación. En primera instancia, se obtiene la solución analítica exacta de la ecuación diferencial gobernante y sus correspondientes autovalores. Luego se calculan los mismos mediante el Método de Elementos Finitos (MEF) implementado a través del programa ALGOR. Por último, se realiza un estudio comparativo entre las soluciones encontradas analíticamente, las obtenidas numéricamente mediante Elementos Finitos y las soluciones obtenidas previamente por medio de métodos variacionales.*

## 1 INTRODUCCIÓN

El análisis de vibraciones transversales de placas sometidas a condiciones de contorno elásticas contra rotación fue primeramente tratado por T. E. Carmichael<sup>1</sup> en el estudio de placas rectangulares usando el Método de Rayleigh-Ritz. Posteriormente el tema fue ampliamente abordado por Laura y colaboradores, entre los cuales pueden citarse los trabajos de Laura<sup>2</sup> y Romanelli, Gianetti<sup>3</sup> *et. al.*, etc.

En placas circulares, esta condición de contorno puede encontrarse en el tratado clásico de Leissa<sup>4</sup> y en los trabajos de Laura<sup>5</sup> Paloto y Santos, Avalos<sup>6</sup> y Laura, entre otros.

La condición de contorno elástica contra rotación es una forma de modelar la condición de borde que resulta ser de índole más 'real' que las clásicas condiciones de borde simplemente apoyado o empotrado puesto que éstas últimas resultan una condición ideal de difícil materialización. A su vez esta forma de modelar el borde permite reproducir las condiciones ideales mencionadas anteriormente introduciendo valores particulares a las constantes elásticas de rotación.

En este trabajo se obtendrán las primeras frecuencias de vibración de placas circulares elásticamente restringidas contra rotación conforme a la teoría de Germain-Lagrange, también conocida como teoría de placas de Kirchhoff. Se calculan los valores analíticamente y en forma numérica usando el Método de los Elementos Finitos (MEF) implementado por el programa ALGOR<sup>7</sup>. Para concluir se presentará la comparación entre los resultados analíticos, numéricos y soluciones obtenidas por otros autores mediante métodos variacionales.

## 2 PROCEDIMIENTO MATEMÁTICO

### 2.1 Ecuación gobernante

La ecuación diferencial clásica de movimiento para el desplazamiento transversal  $w$  de la placa, para el caso de vibraciones libres está dada por la ecuación

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

donde  $\rho$  es la masa por unidad de área y  $D$  es la rigidez a la flexión dada por  $Eh^3/12(1-\mu^2)$  ( $E$  módulo de Young,  $\mu$  coeficiente de Poisson,  $h$  espesor de la placa)

Suponiendo un desplazamiento armónico cosenoidal en el tiempo se tiene

$$w = W \cos(\omega t) \quad (2)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia circular en radianes por segundo y  $W$  es una función sólo de las coordenadas espaciales.

Sustituyendo la ecuación 2 en la ec.1 resulta:

$$(\nabla^4 - k^4)W = 0 \quad (3)$$

donde  $k^4 = \frac{\rho h}{D}\omega^2$  es el autovalor que se desea calcular.

## 2.2 Solución matemática

En coordenadas polares, la solución general a la ecuación 3 es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 W(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr) + C_n I_n(kr) + D_n K_n(kr)] \cos(n\theta) + \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} [A_n^* J_n(kr) + B_n^* Y_n(kr) + C_n^* I_n(kr) + D_n^* K_n(kr)] \sin(n\theta)
 \end{aligned} \tag{4}$$

Donde  $J_n$  y  $Y_n$  son las funciones de Bessel de orden  $n$ ésimo de primera y segunda clase y  $I_n$  y  $K_n$  son las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda clase respectivamente. Los coeficientes  $A_n, \dots, D_n^*$  determinan la forma de los modos de vibración y son calculados a partir de las condiciones de contorno y las condiciones iniciales.

Esta solución, junto con la dependencia temporal (de la forma  $\cos(\omega t)$ ), dan la evolución en el tiempo del desplazamiento transversal de la placa cuando se la deja oscilar libremente. Las características espaciales de este tipo de ondas estacionarias vienen dadas por las funciones de Bessel  $J_n$  e  $Y_n$  que marcan su carácter oscilatorio (ondas propagantes) y las funciones  $I_n$  y  $K_n$  (ondas no propagantes) que denotan su decaimiento característico. Las primeras permiten el transporte de energía mientras que las segundas dan como consecuencia el carácter dispersivo de las mismas.

La solución general para el caso de placas circulares macizas resulta, suponiendo condiciones de borde uniformes en todo el contorno de la placa

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(kr) + C_n I_n(kr)] \cos(n\theta) \tag{5}$$

donde se han desechado los términos correspondientes a las funciones  $Y_n$  y  $K_n$  por ser funciones no acotadas en el origen de coordenadas.

En el caso de placas circulares anulares la solución resulta:

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr) + C_n I_n(kr) + D_n K_n(kr)] \cos(n\theta) \tag{6}$$

Donde el subíndice  $n$  corresponde al número de diámetros nodales.

## 2.3 Condiciones de Borde

La condición de contorno elástica contra rotación se puede escribir como sigue:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} = -\phi D \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right] \right|_{r=\text{borde}} \tag{7}$$

Esta condición implica que la rotación del borde es restringida por resortes que poseen una constante de flexibilidad uniformemente distribuida en todo el contorno de la placa de  $1/\phi$  (momento/unidad de longitud) .

### 3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Dividiremos esta sección en tres partes. Primeramente mostraremos resultados numéricos que resultan de calcular analíticamente las tres primeras frecuencias tanto de placas circulares macizas como de placas anulares. Los valores han sido obtenidos utilizando el programa de computación MAPLE<sup>8</sup> y Matlab<sup>9</sup>. En una segunda parte mostraremos los resultados obtenidos por el Método de Elementos Finitos implementado por el programa ALGOR y compararemos los mismos con los calculados analíticamente. Por último compararemos los valores analíticos con las soluciones obtenidas anteriormente por otros autores<sup>5</sup> a través del Método de Galerkin (método variacional).

En la tabla 1 se presentan los valores calculados del coeficiente de frecuencia  $\Omega_{sn}$  para la placa circular maciza para el modo fundamental  $\Omega_{00}$  y los dos primeros modos antisimétricos  $\Omega_{01}$  y  $\Omega_{02}$ . El coeficiente de Poisson  $\mu$  fue de 0.3 y 1/3 para los casos propuestos. La constante elástica del resorte  $a/\phi D$  para la condición de contorno se hizo variar entre sus valores extremos de 0 y  $10^5$  para contemplar los casos ideales de apoyo simple ( $a/\phi D = 0$ ) y empotramiento ( $a/\phi D = 10^5$ ) como así también todos los casos intermedios.

Table 1: Coeficientes de frecuencia  $\Omega_{sn}$  de la placa circular maciza

$a/\phi D$	$\Omega_{00}$		$\Omega_{01}$		$\Omega_{02}$	
	$\mu = 0.3$	$\mu = 1/3$	$\mu = 0.3$	$\mu = 1/3$	$\mu = 0.3$	$\mu = 1/3$
0	4.935	4.984	13.898	13.940	21.613	25.653
0.1	5.078	5.124	14.022	14.062	25.730	25.768
0.5	5.573	5.609	14.476	14.511	26.17	26.205
1	6.063	6.092	14.969	14.999	26.665	26.696
2	6.776	6.796	15.767	15.791	27.508	27.530
5	7.935	7.943	17.286	17.298	30.848	30.856
30	9.614	9.614	20.065	20.066	33.012	33.003
$10^2$	10.019	10.019	20.857	20.857	34.226	34.226
$10^3$	10.195	10.195	21.218	21.218	34.801	34.801
$10^4$	10.214	10.214	21.256	21.256	34.870	34.870
$10^5$	10.216	10.216	21.26	21.26	34.877	34.877

Para el caso de placas anulares se muestran los valores obtenidos del coeficiente de frecuencia para los tres primeros modos como en el caso de placas circulares.

En la tabla 2 se contemplan los casos en los cuales tanto el borde interior  $r = a$  como el borde exterior  $r = b$  se encuentran bajo condiciones de apoyo simple y empotramiento. Se muestran los coeficientes de frecuencia para  $a/b = 0.3$  y  $a/b = 0.7$ . En la tabla 3 se exhiben los coeficientes de frecuencia para los casos en que el borde interior este simplemente apoyado y el exterior se encuentre elásticamente restringido.

Table 2: Coeficientes de frecuencia  $\Omega_{sn}$  de la placa circular anular. Condiciones ideales de borde

	<b>Interior</b> ( $r = a$ )	<b>Exterior</b> ( $r = b$ )		
<b>Caso I</b>	Simplemente Apoyado	Simplemente Apoyado		
<b>Caso II</b>	Simplemente Apoyado	Empotrado		
<b>Caso III</b>	Empotrado	Simplemente Apoyado		
<b>Caso IV</b>	Empotrado	Empotrado		

	<b>a/b</b>	$\Omega_{00}$	$\Omega_{01}$	$\Omega_{02}$
<b>Caso I</b>	0.3	21.035	23.287	30.270
	0.7	110.039	111.419	115.564
<b>Caso II</b>	0.3	33.652	35.807	42.666
	0.7	174.241	175.363	178.717
<b>Caso III</b>	0.3	30.036	31.459	36.295
	0.7	168.649	169.614	172.536
<b>Caso IV</b>	0.3	45.346	46.643	51.138
	0.7	248.402	249.164	251.480

Los resultados obtenidos con el Método de Elementos Finitos y su comparación con los resultados analíticos se muestran en las figuras 1 a 3.

Para modelar la condición de contorno elástica contra rotación en el borde se fijó a cada nodo del perímetro un elemento tipo viga, empotrado en su parte final y simplemente apoyado en el nodo fijo a la placa, de constante elástica variable.

Para el caso de placas circulares, la malla usada en la discretización del elemento fue elegida de la siguiente forma:

**Características**

- Placa: Malla de 2400 elementos
- Viga: 144 Vigas perimetrales

y las constantes del material fueron:

**Constantes**

- Material: Aleación de Aluminio 2024-T4

Table 3: Coeficientes de frecuencia  $\Omega_{sn}$  de la placa circular anular. Borde int. simplemente apoyado, ext. elásticamente restringido.

	<b>Interior</b> ( $r = a$ )	<b>Exterior</b> ( $r = b$ ) $b/\phi_b D$
<b>Caso V</b>	Simplemente Apoyado	1
<b>Caso VI</b>	Simplemente Apoyado	10
<b>Caso VII</b>	Simplemente Apoyado	30
<b>Caso VIII</b>	Simplemente Apoyado	100

	<b>a/b</b>	$\Omega_{00}$	$\Omega_{01}$	$\Omega_{02}$
<b>Caso V</b>	0.3	22.525	24.704	31.533
	0.7	113.426	114.772	118.818
<b>Caso VI</b>	0.3	28.248	30.310	36.886
	0.7	132.929	134.128	137.747
<b>Caso VII</b>	0.3	31.137	33.226	39.887
	0.7	150.122	151.251	154.664
<b>Caso VIII</b>	0.3	32.778	34.906	41.683
	0.7	164.451	165.558	168.906

- Placa:

$h$ : altura [m]=0.03

$\rho$ : densidad [ $kg/m^3$ ]=2800

$E$ : constante de Young [ $N/m^2$ ]=  $7.51 * 10^{10}$

$a$ : radio [m] =1

$\mu$ : constante de Poisson

- Viga:

$h$ : altura [m]=0.05

$b$ : ancho[m]=0.05

$l$ : longitud=0.1

En la figura 1 se reflejan las diferencias porcentuales obtenidas entre los valores calculados analíticamente y los obtenidos a partir de MEF.

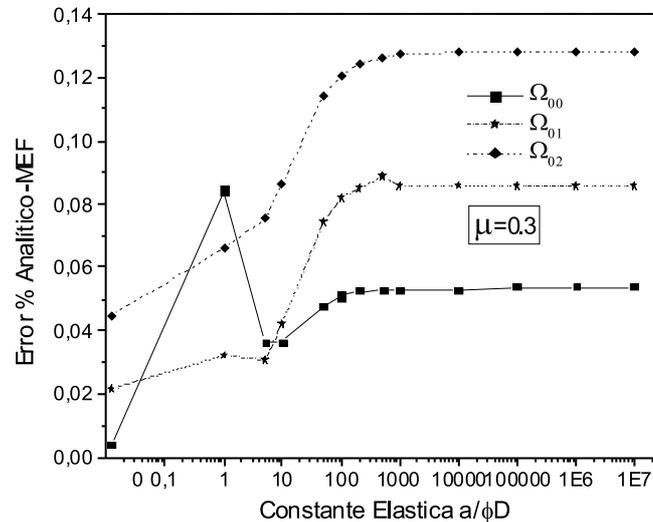


Figure 1: Error porcentual (Analítico-MEF) Placas Circulares  $\mu = 0.3$

Para placas circulares anulares se procedió de la misma forma, las constantes del material y de las vigas del contorno fueron las mismas, excepto que las características de las mallas y cantidad de vigas perimetrales fue diferente:

- Placa:
  - $a/b=0.3$  : 2500 elementos
  - $a/b=0.7$  : 2400 elementos
- Vigas perimetrales
  - $a/b=0.3$  : 100 elementos
  - $a/b=0.7$  : 200 elementos

Estos resultados se reflejan en las figuras 2 y 3.

Como comparación adicional a la realizada con el Método de Elementos Finitos se utilizó el Método clásico de Galerkin cuyos resultados se pueden observar en el trabajo de Laura<sup>5</sup> Paloto y Santos. Los mismos fueron comparados con los valores analíticos presentados en la tabla 1 dando como resultado los valores que se reflejan en las figuras 4 y 5.

#### 4 CONCLUSIONES

En este trabajo se completan resultados obtenidos con anterioridad por otros autores para los tres primeros coeficientes de frecuencia en el caso de placas circulares y anulares con bordes elásticamente restringidos contra rotación. También se presentan distintas

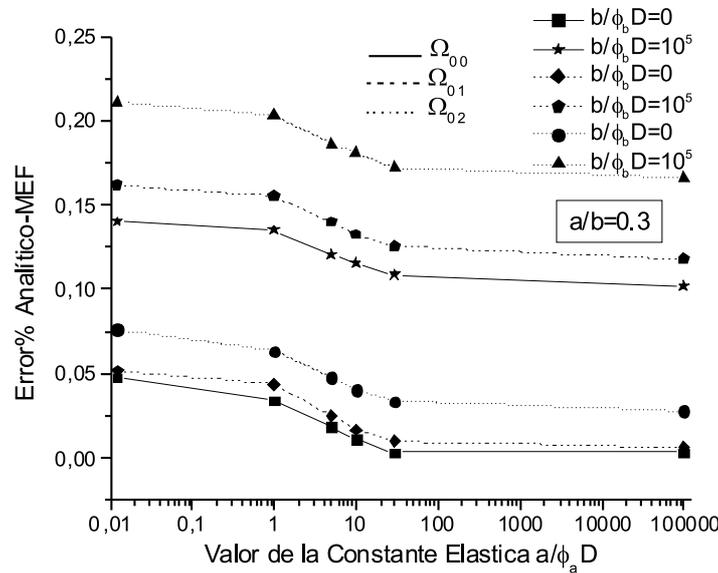


Figure 2: Error porcentual (Analítico-MEF) Placas Anulares  $a/b=0.3$

comparaciones entre los valores analíticos y numéricos, éstos últimos calculados a través del Método de Elementos Finitos y el Método clásico de Galerkin.

A raíz de los resultados presentados se puede concluir que los distintos coeficientes de frecuencia para placas circulares macizas y anulares hallados analíticamente coinciden, salvo en una diferencia menor al 0.5 por ciento, con los valores calculados a partir de MEF y al 1.5 por ciento con los hallados con el Método clásico de Galerkin. Por lo tanto, dado que es bien conocido que ambos métodos (MEF y Galerkin) proporcionan resultados correctos (en principio tan precisos como se quiera), podemos asegurar que los valores analíticos calculados, utilizando rutinas de cálculo de softwares matemáticos específicos (MAPLE<sup>8</sup> y Matlab<sup>9</sup>) dan los valores exactos de las frecuencias de vibración de los sistemas considerados. Finalmente, el hecho de que los valores analíticos y numéricos coincidan, revela que la condición de contorno elástica contra rotación introducida en el programa ALGOR a través de vigas perimetrales de constante elástica variable proporciona una forma correcta de modelar tal condición.

## 5 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue auspiciado por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional del Sur a través del proyecto: Investigaciones Básicas y aplicadas del comportamiento dinámico de sistemas mecánicos N<sup>o</sup> 24/F032 (director C.A.Rossit) y por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

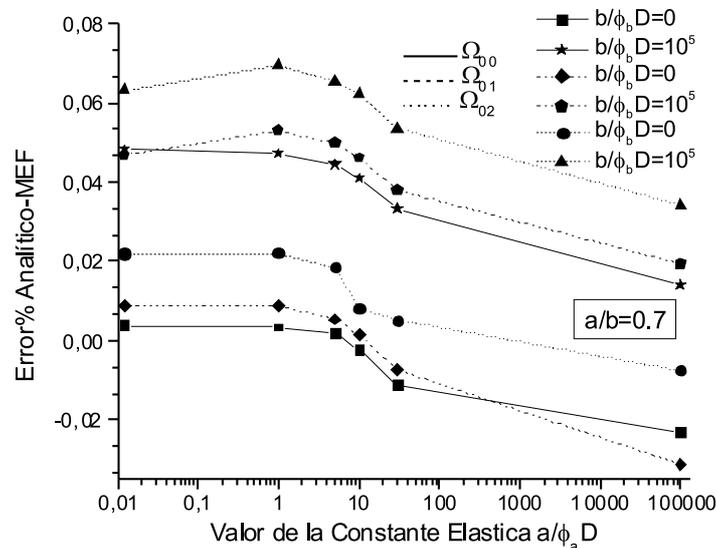


Figure 3: Gráfico del error porcentual (Analítico-MEF) Placas Anulares  $a/b=0.7$

## REFERENCES

- [1] T. E. Carmichael. The vibration of a rectangular plate with edges elastically restrained against rotation. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **12**, 29–42 (1959).
- [2] P. A. A. Laura and E. Romanelli. Vibration of rectangular plates elastically restrained against rotation and subjected to a bi-axial state of stress. *Jour. of Sound and Vib.*, **37**, 367–377 (1974).
- [3] C. E. Gianetti, L. Diez, and P. A. A. Laura. Transverse vibrations of rectangular plates with elastically restrained edges and subject to in-plane shear forces. *Jour. of Sound and Vib.*, **54**, 409–417 (1977).
- [4] A.W. Leissa. *Vibration of Plates*. Acoustical Society of America, (1993).
- [5] P. A. A. Laura, J. C. Paloto, and R. D. Santos. A note on the vibration and stability of a circular plate elastically restrained against rotation. *Jour. of Sound and Vib.*, **41**, 177–180 (1975).
- [6] D. R. Avalos and P. A. A. Laura. A note on transverse vibration of annular plates elastically restrained against rotation along the edges. *Jour. of Sound and Vib.*, **66**, 63–67 (1979).
- [7] ALGOR. *ALGOR, Inc.* (2000).
- [8] MAPLE VII. *Waterloo Maple, Inc.* (2001).
- [9] Matlab VI. *The MathWorks, Inc.* (2000).

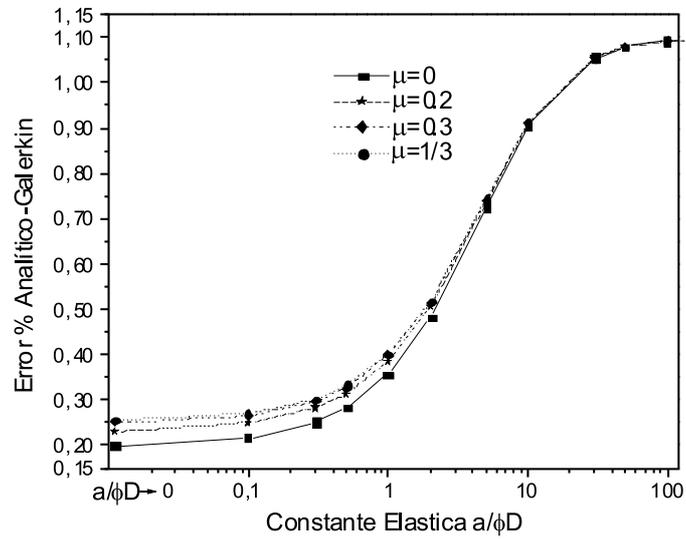


Figure 4: Error porcentual (Analítico-Galerkin) Placas Circulares  $a/\phi D \leq 100$

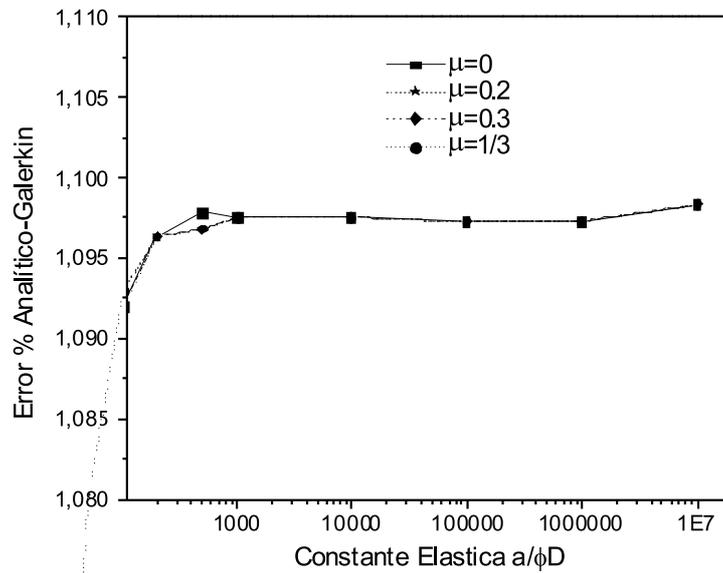


Figure 5: Error porcentual (Analítico-Galerkin) Placas Circulares  $a/\phi D \geq 100$