

MÉTODO APROXIMADO PARA EL ESTUDIO DE VIBRACIONES LIBRES DE PLACAS CON CONDICIONES DE CONTORNO MIXTAS

Mariano Febbo*, Patricio A. A. Laura*, and Sergio A. Vera*

*Departamento de Ingeniería y Física, Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
e-mail: svera@criba.edu.ar, web page: <http://www.uns.edu.ar>

Key Words: Condiciones de borde mixtas, Perturbación de las condiciones de borde, vibraciones.

Abstract. *En este trabajo se presenta un método simple para calcular, en forma aproximada, las frecuencias de vibración de placas sujetas a condiciones de borde mixtas. Este problema, que se presenta cuando el borde está en parte empotrado y en parte simplemente apoyado, conduce a la resolución de un determinante infinito para obtener la solución exacta. El método presentado se basa en la utilización de una de las identidades de Green; con él se estudiaron placas circulares, obteniéndose un buen acuerdo con datos previamente calculados mediante otros métodos. También se presenta el cálculo de la frecuencia fundamental de vibración por el clásico método de Galerkin.*

1 INTRODUCCIÓN

El estudio de las vibraciones transversales de placas sujetas a diferentes condiciones de contorno ha recibido considerable interés debido a su importancia tecnológica. Una gran variedad de datos se pueden encontrar en clásico libro de Leissa.¹

Es bien conocido el hecho que cuando las condiciones de contorno son uniformes a lo largo de un borde, se pueden aplicar los métodos de resolución conocidos y aún en estos casos pueden surgir severas dificultades matemáticas. En el caso que una de las condiciones de contorno no sea constante a lo largo de un borde la dificultad matemática del problema se incrementa drásticamente (figura 1).

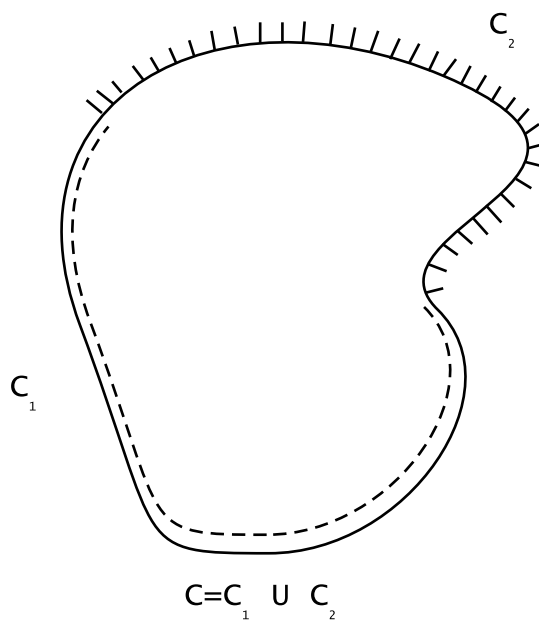


Figure 1: Placa con condiciones de contorno mixtas | | | empotrada - - - simplemente apoyada

El problema que se aborda aquí pertenece al área conocida como condiciones de contorno mixtas para cuya solución uno debe recurrir a métodos aproximados.

Varios autores han tratado el problema previamente, utilizando diferentes técnicas. Entre los que estudiaron el caso de placas circulares podemos citar el trabajo de Bartlett² que utiliza un método variacional. En él se tratan las vibraciones transversales de placas empotradas en parte del contorno y simplemente apoyadas en el resto; con este método se obtienen límites superior e inferior para los autovalores.

También debemos destacar la solución aproximada para este tipo de problemas que fue desarrollada por Noble,³ quien mostró que una buena aproximación para la frecuencia fundamental puede obtenerse de las raíces de una ecuación trascendental.

Narita y Leissa⁴ obtuvieron las frecuencias naturales y las formas modales para el modo fundamental y modos superiores. Su método es una extensión de un procedimiento analítico desarrollado previamente por Leissa et al.⁵ Éste consiste en considerar una solución en series trigonométricas de un problema donde se simulan las condiciones de contorno mixtas con resortes rotacionales.

Rossi y Laura⁶ trataron el problema utilizando el método de elementos finitos, calculando las primeras nueve frecuencias. Allí se tratan tres combinaciones de condiciones de contorno: simplemente apoyado-empotrado, simplemente apoyado-libre y empotrado-libre.

Por otra parte, el caso de placas rectangulares ha sido tratado cuando uno de los bordes empotrados tiene una parte simplemente apoyada. Ota y Hamada⁷ y Kurata y Okamura⁸ resolvieron el problema suponiendo una función deflexión que satisface la condición de apoyo simple.

A continuación se presentará el tipo de problema y el método de resolución ideado en forma general. En este trabajo se trata la situación donde una parte del borde se encuentra empotrada (C_2) mientras que la otra porción está simplemente apoyada (C_1). Dado que el desplazamiento es nulo sobre el contorno C

$$W|_C = 0 \quad (1)$$

mientras que para la porción empotrada C_1

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)\Big|_{C_1} = 0 \quad (2)$$

donde n es la coordenada normal al contorno.

Para el segmento C_2 , la condición de contorno es

$$(M_n)|_{C_2} = 0 \quad (3)$$

donde M_n es el momento flector normal al contorno, definido como

$$M_n = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \mu\kappa\frac{\partial W}{\partial n} + \mu\frac{\partial^2 W}{\partial s^2}\right)$$

donde se refiere a la coordenada tangencial a lo largo del contorno, κ es la curvatura del contorno C , μ es el coeficiente de Poisson y D la rigidez a la flexión ($Eh^3/12(1 - \mu^2)$, E el módulo de Young y h el espesor de la placa).

La técnica de resolución del problema consiste en una implementación del método de perturbación de las condiciones de contorno.⁹ Se realizaron cálculos de la frecuencia fundamental para los casos de placas circulares pero la metodología puede aplicarse a placas de diferentes geometrías. La técnica también se desarrolla para modos superiores de vibración. Finalmente se comparan los resultados obtenidos con otros previamente publicados por distintos autores.

2 PROCEDIMIENTO MATEMÁTICO

En esta sección se desarrollará el procedimiento para obtener el autovalor k_n a partir del autovalor del problema sin perturbar k_n^0 , la solución del problema sin perturbar W^0 y la solución del problema perturbado W .

Considerando una placa delgada isotrópica de espesor uniforme h , densidad ρ , delimitada por el contorno C y suponiendo un movimiento armónico simple de frecuencia ω , la amplitud del desplazamiento debe satisfacer la ecuación

$$\nabla^4 W - k^4 W = 0 \quad (4)$$

con las condiciones de contorno mixtas dadas por

$$W = 0 \text{ for } C \quad (5)$$

$$\frac{\partial W}{\partial n} = 0 \text{ for } C_1 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \mu\kappa \frac{\partial W}{\partial n} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = 0 \text{ for } C_2 \quad (7)$$

donde $k^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}$ es el autovalor a determinar.

Para desarrollar una ecuación para calcular los autovalores k_n , se hará uso de la bien conocida segunda identidad de Green en dos dimensiones.

$$\int_S (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) da = \oint_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl \quad (8)$$

Tomando $u = \nabla^2 W$ y $v = W^0$ en 8, resulta la expresión

$$\int_S (\nabla^2 W \nabla^2 W^0 - W^0 \nabla^4 W) da = \oint_C \left(\nabla^2 W \frac{\partial W^0}{\partial n} - W^0 \frac{\partial \nabla^2 W}{\partial n} \right) dl \quad (9)$$

Si ahora hacemos $u = W$ y $v = \nabla^2 W^0$ en 8, se tiene

$$\int_S (W \nabla^4 W^0 - \nabla^2 W^0 \nabla^2 W) da = \oint_C \left(W \frac{\partial \nabla^2 W^0}{\partial n} - \nabla^2 W^0 \frac{\partial W}{\partial n} \right) dl \quad (10)$$

dado que W and W^0 satisfacen la ecuación diferencial de la placa 4 con autovalores k y k^0 respectivamente, al sumar las ecuaciones 9 y 10 resulta

$$(k^4 - (k^0)^4) \int_S W^0 W da = \oint_C \left(\nabla^2 W^0 \frac{\partial W}{\partial n} - \nabla^2 W \frac{\partial W^0}{\partial n} + W^0 \frac{\partial \nabla^2 W}{\partial n} - W \frac{\partial \nabla^2 W^0}{\partial n} \right) dl \quad (11)$$

en esta expresión podemos aproximar W en la integral del lado izquierdo de la ecuación anterior por W^0 dado que son similares, siendo el resultado final

$$(k^4 - (k^0)^4) = \frac{\oint_C \left(\nabla^2 W^0 \frac{\partial W}{\partial n} - \nabla^2 W \frac{\partial W^0}{\partial n} + W^0 \frac{\partial \nabla^2 W}{\partial n} - W \frac{\partial \nabla^2 W^0}{\partial n} \right) dl}{\int_S (W^0)^2 da.} \quad (12)$$

Esta ecuación será el punto de partida para calcular k_n para las diferentes geometrías y condiciones de contorno que surgirán en el presente estudio. Para completar los cálculos será necesario realizar algunas aproximaciones específicas en cada caso en particular.

La evaluación de los autovalores a partir de la ecuación anterior podrá realizarse en forma adecuada si se elige una buena aproximación para W , dado que su expresión exacta es desconocida. La aproximación se realiza suponiendo su valor, y el de su derivada, sobre el contorno.

3 PLACAS CIRCULARES

En esta sección se aplicará el método en el caso de una placa circular parcialmente empotrada y parcialmente simplemente apoyada sobre el contorno.

A medida que el ángulo γ varía entre 0 y 2π , el contorno de la placa varía de *quasi* totalmente empotrada con una porción simplemente apoyada, ver figura 2a, a una *quasi* simplemente apoyada con un pequeño segmento empotrado, ver figura 2b. Debido a que el método mejora su precisión a medida que W^0 se parece a W , se divide el estudio en dos casos.

En el primero consideraremos que $W(r, \theta)$ es la solución del problema donde el borde de la placa se encuentra simplemente apoyada dentro de un ángulo 2γ y empotrada en el resto. Con W^0 denotaremos a la solución de la placa circular totalmente empotrada. En

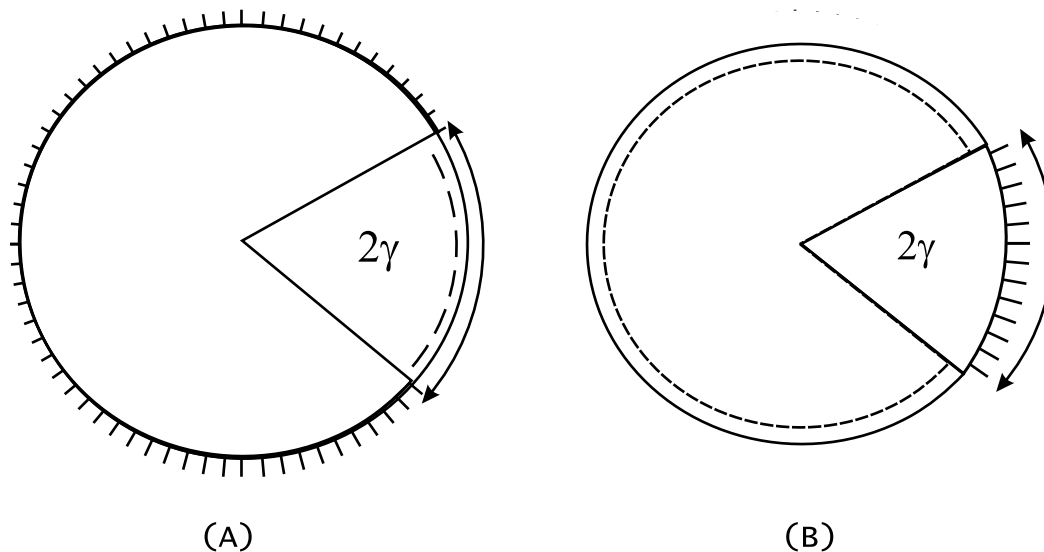


Figure 2: Placas circulares bajo estudio: (a) placa *quasi* totalmente empotrada (b) placa *quasi* simplemente apoyada | | | empotrada - - - simplemente apoyada

la figura 2a se muestra una representación esquemática de este caso.

Como segundo caso tomaremos como $W(r, \theta)$ a la solución de una placa circular donde el borde es empotrado sobre el arco del sector circular de apertura 2γ y simplemente apoyado en el resto, ver figura 2b. En esta ocasión W^0 será la solución exacta de la placa simplemente apoyada en todo el contorno.

3.1 Primer Caso

Como se mencionó anteriormente, se eligió como W^0 a la solución exacta de la placa totalmente empotrada. Por esta razón debe satisfacer la ecuación diferencial a derivadas parciales

$$\nabla^4 W^0(r, \theta) - (k^0)^4 W^0(r, \theta) = 0 \quad (13)$$

junto con las condiciones de borde de una placa empotrada

$$W^0(r = a, \theta) = 0 \quad \left. \frac{\partial W^0}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (14)$$

mientras que W , la solución del problema perturbado, debe satisfacer

$$\nabla^4 W(r, \theta) - k^4 W(r, \theta) = 0 \quad (15)$$

Las condiciones de contorno para el problema real son 5, 6 and 7. Pero aquí las reemplazaremos por

$$W(r = a, \theta) = 0 \quad (16)$$

y la condición aproximada

$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=a} = c(\theta) \left. \frac{\partial W_{ss}}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (17)$$

donde W_{ss} es la amplitud del desplazamiento de una placa simplemente apoyada y $c(\theta)$ es la función escalón cuyo valor es 1 para $-\gamma < \theta < \gamma$ y 0 en el resto. Esta condición ha sido elegida debido a que es muy similar a la condición de contorno real en cada porción de la placa. Para obtener el autovalor corregido k_n se debe calcular la ecuación 12.

Aplicando las condiciones de borde 14, 16 y 17 en la ecuación 12, la expresión resultante puede escribirse como

$$k^4 - (k^0)^4 = \frac{\oint_C \left(\nabla^2 W^0 c(\theta) \frac{\partial W_{ss}}{\partial r} \right) dl}{\int_S (W^0)^2 da} \quad (18)$$

Al resolver la ecuación 18 se obtiene el autovalor k_n .

3.2 Segundo caso

Para el segundo caso elegiremos como W^0 la solución exacta de una placa circular simplemente soportada en todo su contorno. Esta debe satisfacer la ecuación

$$\nabla^4 W^0(r, \theta) - (k^0)^4 W^0(r, \theta) = 0 \quad (19)$$

y las condiciones de contorno para placas simplemente apoyadas

$$W^0(r = a, \theta) = 0 \quad \left. \frac{\partial^2 W^0}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial W^0}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (20)$$

Para el problema perturbado W se debe satisfacer

$$\nabla^4 W(r, \theta) - k^4 W(r, \theta) = 0 \quad (21)$$

Para este caso se proponen las siguientes condiciones de borde

$$W(r = a, \theta) = 0 \quad \left. \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=a} = c(\theta) \frac{\partial^2 W_c}{\partial r^2} \quad (22)$$

donde W_c representa la amplitud del desplazamiento para una placa circular totalmente empotrada y $c(\theta)$ es una función escalón, definida como 1 para $-\gamma < \theta < \gamma$ y 0 en el resto .

A partir de la expresión 12 y aplicando las condiciones de contorno 20 y 22 resulta

$$(k^4 - (k^0)^4) = \frac{\oint_C \left(\nabla^2 W^0 \frac{\partial W}{\partial r} - \nabla^2 W \frac{\partial W^0}{\partial r} \right) dl}{\int_S (W^0)^2 da} \quad (23)$$

Si se aproxima

$$\nabla^2 W^0|_{r=a} \cong \frac{\partial^2 W^0}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial W^0}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad (24)$$

y

$$\nabla^2 W|_{r=a} \cong \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=a} = c(\theta) \frac{\partial^2 W_c}{\partial r^2} \Big|_{r=a} \quad (25)$$

con lo que la ecuación 12 se puede escribir como

$$(k^4 - (k^0)^4) = - \frac{\oint_C c(\theta) \frac{\partial^2 W_c}{\partial r^2} \frac{\partial W^0}{\partial r} dl}{\int_S (W^0)^2 da} \quad (26)$$

de esta ecuación se puede obtener el autovalor aproximado k

4 RESULTADOS NUMERICOS

4.1 Caso circular

Para obtener el valor numérico de la frecuencia para los diferentes modos, se debe conocer la solución analítica de placas circulares simplemente apoyadas y de placas empotradas

$$W_{ss} = (A_{nss} J_n(k_{nss} r) + C_{nss} I_n(k_{nss} r)) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{Bmatrix} \quad (27)$$

$$W_c = (A_c J_n(k_{nc} r) + C_{nc} I_n(k_{nc} r)) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{Bmatrix} \quad (28)$$

donde n denota el número de diámetros nodales y k_{nss} y k_{nc} corresponden a los autovalores de placas simplemente apoyadas y empotradas respectivamente.

4.1.1 Modo fundamental

En este caso se introduce $n = 0$ en las ecuaciones 27 y 28 que resultan en

$$W_{0ss} = A_{0ss}J_0(k_{0ss}r) + C_{0ss}I_0(k_{0ss}r) \quad (29)$$

$$W_{0c} = A_{0c}J_0(k_{0c}r) + C_{0c}I_0(k_{0c}r) \quad (30)$$

Al reemplazar las soluciones anteriores en la ecuación 18 para el primer caso (sección 3.1) y en la ecuación 26 para el segundo caso (sección 3.2) se obtiene el valor del autovalor perturbado k_0 .

4.1.2 Modos superiores ($n > 0$)

Es un hecho bien conocido que al considerar modos superiores de vibración con condiciones de borde homogéneas ($\gamma = 0$) surge una doble degeneración en los modos de vibración. Si $\gamma \neq 0$, como en nuestro caso, que significa que aparece una discontinuidad en el borde, la degeneración se rompe apareciendo dos modos claramente distinguibles con distintas frecuencias. Estos modos serán nombrados de aquí en adelante para su fácil identificación como "simétrico" y "antisimétrico". Es importante destacar que, obviamente, no existen modos puramente simétricos o antisimétricos debido a la geometría del problema.

En este trabajo se analizará el caso $n = 1$, por lo que se obtiene la solución analítica de las ecuaciones 27 and 28, sustituyendo $n = 1$. Claramente, la expresión que contiene $\cos(\theta)$ corresponde a la solución simétrica mientras que el que lleva $\sin(\theta)$ es el modo antisimétrico.

4.2 Frecuencia fundamental por el método de Galerkin

En esta sección se presenta el desarrollo del método de Galerkin modificado para obtener la frecuencia fundamental para una placa circular empujada entre $-\gamma < \theta < \gamma$ y simplemente apoyada en el resto, ver figura 2. El procedimiento se puede extender para analizar modos de vibración superiores.

El modo fundamental se aproxima por un polinomio simple que satisface idénticamente las condiciones de contorno en cada porción del borde de la placa

$$W = 0 \text{ for } 0 < \theta < 2\pi \quad (31)$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} = 0 \text{ for } -\gamma < \theta < \gamma \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = 0 \text{ for } \gamma \leq \theta < 2\pi - \gamma \quad (33)$$

dado que el problema bajo estudio posee "quasi" simetría radial para el modo fundamental, se propone aproximar W por un polinomio de la forma¹⁰

$$W_a = A_1(\alpha r^4 + \beta r^2 + 1) \quad (34)$$

Las ecuaciones 32 y 33 pueden ser condensadas en una de la siguiente forma

$$\left. \frac{dW_a}{dr} \right|_{r=a} = -\phi(\theta)D \left(\frac{d^2W_a}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dW_a}{dr} \right) \Big|_{r=a} \quad (35)$$

donde $\phi(\theta)$ es la función escalón

$$\phi(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\gamma < \theta < \gamma \\ \infty & \text{for } \gamma \leq \theta < 2\pi - \gamma \end{cases} \quad (36)$$

y ∞ será reemplazado por $10^7 \sim 10^8$ en los cálculos numéricos.

para determinar los valores de α y β , la ecuación 34 debe ser reemplazada en la condición de contorno 35, resultando

$$\alpha = \frac{(\phi D/a)(1 + \mu) + 1}{a^4(\phi D/a(5 + \mu) + 1)} \quad \beta = \frac{-2}{a^2} \left[\frac{(\phi D/a)(3 + \mu) + 1}{(\phi D/a(5 + \mu) + 1)} \right] \quad (37)$$

aplicando 37 y la definición de $\phi(\theta)$ dada en 36 W_a resulta en:

$$W_a = \begin{cases} A_{1c}(\alpha_c r^4 + \beta_c r^2 + 1) & \text{for } -\gamma < \theta < \gamma \\ A_{1s}(\alpha_s r^4 + \beta_s r^2 + 1) & \text{for } \gamma \leq \theta < 2\pi - \gamma \end{cases} \quad (38)$$

donde

$$\alpha_c = \alpha(\phi = 0); \beta_c = \beta(\phi = 0); \alpha_s = \alpha(\phi \rightarrow \infty); \beta_s = \beta(\phi \rightarrow \infty)$$

y denotando $(\alpha_{c(s)}r^4 + \beta_{c(s)}r^2 + 1)$ como la función coordenada .

Sustituyendo 38 en la ecuación diferencial 4 se obtiene la función error, $\epsilon_c(r, A_{1c}, k(\omega))$ y $\epsilon_s(r, A_{1s}, k(\omega))$ para las secciones empotradas y simplemente apoyadas respectivamente. En el método de Galerkin es necesario que cada función error sea ortogonal con respecto a cada función coordenada sobre el dominio en consideración. Esta condición lleva a

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} \int_0^a \epsilon_c(r, \omega)(\alpha_c r^4 + \beta_c r^2 + 1)r dr d\theta + \int_{\gamma}^{2\pi-\gamma} \int_0^a \epsilon_s(r, \omega)(\alpha_s r^4 + \beta_s r^2 + 1)r dr d\theta = 0 \quad (39)$$

donde $\epsilon_{c(s)}(r, \omega)$ resulta de

$$D\nabla^4 W_a(r) - \rho h \omega^2 W_a(r) = \epsilon_{c(s)}(r, \omega)$$

La raíz de la expresión 39, ω_{00} , es la frecuencia natural aproximada del problema. El coeficiente de frecuencia fundamental $\Omega_{00} = \sqrt{(\rho h/D)} \omega_{00} a^2$, queda entonces

$$\Omega_{00} = 64 \left[\frac{\gamma \eta_c + (\pi - \gamma) \eta_s}{\gamma \delta_c + (\pi - \gamma) \delta_s} \right] \quad (40)$$

donde

$$\eta_{c(s)} = \alpha_{c(s)} \left(\alpha_{c(s)} \frac{a^6}{6} + \beta_{c(s)} \frac{a^4}{4} + \frac{a^2}{2} \right)$$

$$\delta_{c(s)} = \alpha_{c(s)}^2 \frac{a^{10}}{10} + \alpha_{c(s)} \beta_{c(s)} \frac{a^8}{8} + \beta_{c(s)}^2 \frac{a^6}{6} + \alpha_{c(s)} \frac{a^6}{3} + \beta_{c(s)} \frac{a^4}{2} + \frac{a^2}{2}$$

el método de Galerkin original arroja límites superiores para las frecuencias, sin embargo, los resultados obtenidos por este método "modificado" de Galerkin no puede asegurarse que lo sean.

4.3 Discusión y Resultados

En la tabla 1 se presentan los resultados del coeficiente de frecuencia del modo fundamental, $\Omega_{00} = k_0^2 a^2 = \sqrt{(\rho h/D)} \omega_{00} a^2$, para diferentes valores de γ que determina la porción del borde empotrado. Todo los valores referenciados fueron calculados para un coeficiente de Poisson de 0,25, salvo la referencia.⁴

Ambos métodos presentan excelente acuerdo con los valores referenciados. Obviamente, los casos extremos donde la placa se encuentra totalmente empotrada $\gamma = \pi$ o simplemente apoyada $\gamma = 0$ son reproducidos en forma exacta debido a la formulación matemática del método de perturbación de las condiciones de borde PCB.

La tabla 2 ilustra los valores numéricos del coeficiente de frecuencia para el primer modo "simétrico" ($n = 1$) Ω_{1s} y el primer "antisimétrico" Ω_{1a} . Los cálculos realizados por PCC presentados aquí muestran un muy buen acuerdo con los referenciados. Los valores calculados por PCB para $\gamma > \pi/2$ son los de la formulación presentada en 3.1 mientras que para $\gamma \leq \pi/2$ se consideró la formulación presentada en 3.2.

5 CONCLUSIONES

En primer lugar es importante remarcar el hecho de que ésta es una metodología novedosa para resolver problemas de vibraciones con condiciones de contorno discontinuas y que resulta se más simple y requiere un menor esfuerzo matemático que otras metodologías seguidas por otros autores. En este sentido, la formulación mediante el método de elementos finitos para este problema⁶ necesita de una malla muy densa para obtener resultados de precisión similar a la presentada aquí.

Table 1: Coeficiente de frecuencia Ω_{00} para el modo *fundamental* para una placa circular empotrada sobre $-\gamma < \theta < \gamma$ and simplemente apoyada en el resto $\mu = 0.25$ * $\mu = 0.3$

	γ								
	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
Ref ²	4.860	5.871	6.350	6.880	7.508	8.231	9.120	9.885	10.216
		5.842	6.335	6.864	7.480	8.162	8.880	9.126	
Ref ^{4*}	4.937		6.487		7.673		9.284		10.216
Ref ⁶	4.868	5.859	6.351	6.878	7.511	8.272	9.118	9.88	10.216
PCB	4.860	5.6806	6.397	7.040	7.630	8.415	9.055	9.653	10.216
Galerkin	4.872	5.572	6.245	6.905	7.563	8.228	8.905	9.604	10.328

Table 2: Coeficientes de frecuencia para los primeros modos '*simétrico*' Ω_{1s} y '*antisimétrico*' Ω_{1a} de una placa circular empotrada en $-\gamma < \theta < \gamma$ y simplemente apoyada en el resto ; $\mu = 0.25$ * $\mu = 0.3$

Mode	Type	γ								
		0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
Ref ⁶	S	13.842	15.939	16.904	17.404	17.485	17.590	18.276	19.980	21.262
	A	13.842	14.070	14.748	15.886	17.550	19.493	20.833	21.232	21.262
Ref ^{4*}	S	13.898		17.065		17.506		18.533		21.252
	A	13.898		14.946		17.910		20.960		21.252
PCB	S	13.835	15.690	16.902	17.429	17.511	17.803	18.403	19.652	21.260
	A	13.835	13.938	14.572	15.871	17.511	19.475	20.660	21.180	21.260

Por otra parte cabe mencionar que el método puede extenderse para calcular modos superiores de vibración sin ninguna modificación sustancial del procedimiento matemático.

Se ha demostrado excelente acuerdo para los dos primeros modos de vibración de placas circulares.

Otra característica importante es que el método puede aplicarse a placas que poseen distintas geometrías.

6 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado gracias a la financiación del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (Director del PGI Dr. Carlos Rossit).

REFERENCES

- [1] A.W. Leissa. *Vibration of Plates*. Acoustical Society of America, (1993).
- [2] C. C. Bartlett. The vibration and buckling of a circular plate clamped on part of its boundary and simply supported on the remainder. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **16**, 431–440 (1963).
- [3] B. Noble. The vibration and buckling of a circular plate clamped on part of its boundary and simply supported on the remainder. *Proc. 9 th. Midwest Conf. Solid and Fluid Mech*, (1965).
- [4] Y. Narita and A. W. Leissa. Transverse vibration of simply supported circular plates having partial elastic constraints. *Journal of Sound and Vibration*, **70**, 103–116 (1980).
- [5] A. W. Leissa, P. A. A. Laura, and R. H. Gutierrez. Transverse vibration of circular plates having non-uniform edge constraints. *Journal of Acoustical Society*, **66**, 180–184 (1979).
- [6] R.E. Rossi and P. A. A. Laura. Transverse vibration of thin, elastic circular plates with mixed boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, **255**, 983–986 (2002).
- [7] T. Ota and M. Hamada. Fundamental frequencies of simply supported but partially clamped square plates. *Bull. JSME* **6**, **23**, 397–403 (1963).
- [8] M. Kurata and H. Okamura. Natural vibrations of partially clamped plates. *J. Eng. Mech. Div., Proc. Am. Soc. Civil Eng.*, (1963).
- [9] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons. Third Ed., (1999).
- [10] P. A. A. Laura, J. C. Paloto, and R. D. Santos. A note on vibrations and stability of a circular plate elastically restrained against rotation. *Journal of Sound and Vibration*, **41**, 177–180 (1975).