

VIBRACIÓN LIBRE DE VIGAS COMPUESTAS DE PARED DELGADA SOMETIDAS A TENSIONES Y DEFORMACIONES INICIALES

Sebastián P. Machado y Víctor H. Cortínez

Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos
Universidad Tecnológica Nacional (FRBB)
11 de Abril 461, 8000, Bahía Blanca, Argentina
E-mail: vcortine@frbb.utn.edu.ar

CONICET, Argentina.

Palabras clave: Vigas de Pared Delgada, Material Compuesto, Dinámica.

Resumen. *En este trabajo se investiga la respuesta dinámica de vigas de pared delgada construidas con material compuesto, utilizando una extensión del modelo geométrico no lineal previamente desarrollado por los autores (Análisis geométrico no-lineal de vigas compuestas de pared delgada, Mecánica Computacional XXIII, 2004). Como aspecto distintivo dicho modelo contempla, entre otros efectos, la flexibilidad de corte en forma completa, la cual ha demostrado tener una influencia crucial en el comportamiento dinámico. La formulación adoptada permite estudiar la respuesta dinámica de la estructura a partir de un modelo no-lineal, y de esta manera, establecer la diferencia que existe con el análisis clásico desarrollado a partir de una teoría lineal. En el análisis se muestra la influencia de términos geométricos no-lineales, debido a grandes desplazamientos, sobre la respuesta dinámica de la viga. A modo de ejemplo se obtienen resultados numéricos para una viga simplemente apoyada sometida a diferentes condiciones de carga, considerando además, diferentes secuencias de laminación.*

1 INTRODUCCIÓN

En el diseño estructural moderno, la utilización de estructuras livianas y rígidas ha aumentado considerablemente en los últimos años. Consecuentemente las vigas de pared delgada se emplean muy frecuentemente. La introducción de materiales compuestos en la tecnología de construcción ha mostrado grandes ventajas desde el punto de vista de la relación entre la rigidez y el peso como también debido a otras propiedades mejoradas, por ejemplo la alta resistencia a la corrosión. En este trabajo se estudia el comportamiento dinámico de vigas compuestas de pared delgada sometidas a un estado inicial de tensiones. La investigación esta parcialmente motivada por el hecho de que el estudio de vibraciones libres es a menudo requerido en el diseño de estructuras tipo vigas, particularmente en el contexto de aplicaciones mecánicas y aeroespaciales. De esta manera, existe un gran interés en estudiar y comprender el comportamiento dinámico de este tipo elementos estructurales.

Es de práctica corriente calcular frecuencias naturales a partir del análisis dinámico lineal. No obstante, dichas estructuras presentan comportamientos no-lineales geométricos, debido a grandes desplazamientos y rotaciones. Estos efectos geométricos no-lineales pueden alterar por completo la respuesta elástica de la estructura. De esta manera, este tipo de comportamiento puede ser solo investigado a partir de una formulación no-lineal.

En la bibliografía se encuentra una serie de trabajos sobre vigas metálicas sometidas a un estado inicial de tensiones. Por ejemplo, Vlasov¹ examinó en detalle el problema de vibraciones de vigas de pared delgada sometidas a una carga de compresión o tracción longitudinal ubicada en el extremo. Años mas tarde Bolotin², consideró en su estudio una viga de pared delgada simplemente apoyada sometida a carga axial y carga lateral. En ambos trabajos el efecto de deformación por corte no fue considerado. Coulter y Miller³ investigaron la vibración de vigas planas de sección variable sujetas a fuerzas axiales distribuidas. Cortínez y Rossi⁴ estudiaron la dinámica de vigas abiertas de pared delgada deformables por corte, sometidas a un estado inicial axial de tensiones. En su trabajo determinaron frecuencias naturales de vibración a partir de una formulación de elementos finitos de primer orden o clásica. Kim et al.⁵ presentaron una formulación mejorada de segundo orden en la cual despreciaron el efecto de corte. Ellos analizaron la vibración libre de vigas de pared delgada de sección variable sometida a una carga axial. La respuesta dinámica de vigas no-simétricas de pared delgada sometidas a cargas axiales concentradas y distribuidas, fue analizada por Jun et al.⁶ a partir de una teoría viga Bernoulli-Euler. Ellos estudiaron el efecto de alabeo y el acoplamiento flexo-torsional de vigas cantilever. Por otro lado, Mohri et al.⁷ presentaron una teoría de orden superior no deformable por corte para investigar el comportamiento dinámico en el estado de pre- y post-pandeo de vigas de pared delgada de sección abierta. Como ejemplos numéricos consideraron vigas simplemente apoyadas sometidas a carga axial y carga distribuida lateral. A pesar del interés práctico y del futuro potencial de los materiales compuestos, en menor proporción son los trabajos en los que se utilizaron dichos materiales para estudiar el comportamiento dinámico de vigas sometidas a un estado inicial de tensiones. Cortínez y Piovan⁸ desarrollaron un modelo teórico lineal para vigas compuestas de pared delgada de sección abierta y cerrada. Estudiaron la variación de la primera frecuencia de vibración de una viga simplemente apoyada, en función de un estado inicial de tensión axial y

lateral. Además, analizaron la influencia de la deformación por corte cuando las fibras están orientadas en la dirección longitudinal de la viga. Li et al.⁹ estudiaron la respuesta dinámica flexional-torsional de vigas cargadas axialmente, a partir de un modelo Timoshenko para vigas de pared delgada de sección cerrada.

Son muy escasos los trabajos presentados en los cuales se ha considerado un estado de precarga lateral. Además, no ha sido investigado hasta este momento la dinámica de vigas compuestas considerando grandes desplazamientos asociados a un estado inicial de tensiones. El estudio en este trabajo es orientado a determinar la influencia de términos no-lineales, debido a grandes desplazamientos, sobre la respuesta dinámica de la viga. Se analiza la diferencia que existe entre un análisis clásico desarrollado a partir de una teoría lineal^{1,10}, y otro de orden superior, en el cual se utiliza una formulación geométrica no-lineal. Se estudia dicho efecto considerando diferentes condiciones de borde, de carga y secuencias de laminación. También se analiza la influencia de la deformación por corte. Finalmente, a fin de validar la formulación se compara los resultados obtenidos contra los obtenidos por el método de elementos finitos.

2 TEORÍA

2.1 Cinemática

Se considera una viga recta de paredes delgadas construida con material compuesto (Fig. 1). Los puntos del elemento estructural son referidos a un sistema cartesiano ortogonal (x, \bar{y}, \bar{z}) donde el eje x es paralelo al eje longitudinal de la viga, mientras que \bar{y} y \bar{z} son los ejes principales de la sección. Por otra parte y y z son paralelos a los principales pero teniendo su origen en el centro de corte, definido de acuerdo a la teoría de Vlasov¹ de vigas isótropas. Las coordenadas correspondientes a puntos ubicados sobre la línea media de la sección se denotan mediante letras mayúscula Y y Z (o \bar{Y} y \bar{Z}). También se utilizan las coordenadas curvilíneas s (coordenada circunferencial) y n (coordenada normal) sobre la superficie media de la sección.

Las coordenadas cartesianas de un punto arbitrario de la sección transversal pueden relacionarse con las correspondientes coordenadas curvilíneas s y n mediante las expresiones

$$\bar{y}(s, n) = \bar{Y}(s) - n \frac{dZ}{ds}, \quad \bar{z}(s, n) = \bar{Z}(s) + n \frac{dY}{ds} \quad (1)$$

$$y(s, n) = Y(s) - n \frac{dZ}{ds}, \quad z(s, n) = Z(s) + n \frac{dY}{ds} \quad (2)$$

Por otra parte y_0 y z_0 son las coordenadas del centroide con respecto al centro de corte

$$\begin{aligned} \bar{y}(s, n) &= y(s, n) - y_0 \\ \bar{z}(s, n) &= z(s, n) - z_0 \end{aligned} \quad (3)$$

El modelo estructural utilizado en este trabajo está basado en las siguientes hipótesis:

- a) El contorno de la sección transversal es rígida en su propio plano

- b) La distribución de alabeo se representa mediante la función de Saint-Venant de vigas isótropas.
- c) Las rotaciones flexionales son moderadas, el giro de la sección transversal pueden ser arbitrariamente grande y las deformaciones son pequeñas.
- d) Los esfuerzos y momentos resultantes sobre el espesor de la pared, correspondientes a la tensión circunferencial σ_{ss} se suponen despreciables. Asimismo se desprecia la fuerza resultante sobre el espesor relacionada con γ_{ns} .
- e) La curvatura de superficie media de la sección transversal es despreciable
- f) Se idealiza la sección de la viga, formada por una secuencia de placas de espesor constante.

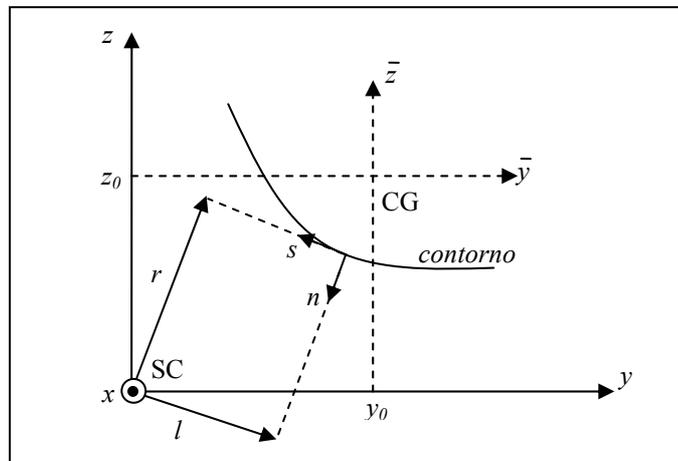


Figura 1: Sistema de coordenadas de la sección transversal

De acuerdo a las hipótesis enunciadas, el campo de desplazamiento adoptado se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_o - \bar{y}(\theta_z \cos \phi + \theta_y \sin \phi) - \bar{z}(\theta_y \cos \phi - \theta_z \sin \phi) + \omega \left[\theta - \frac{I}{2}(\theta_y' \theta_z - \theta_y \theta_z') \right] + (\theta_z z_o - \theta_y y_o) \sin \phi \\
 u_y &= v - z \sin \phi - y(1 - \cos \phi) - \frac{I}{2}(\theta_z^2 \bar{y} + \theta_z \theta_y \bar{z}) \\
 u_z &= w + y \sin \phi - z(1 - \cos \phi) - \frac{I}{2}(\theta_y^2 \bar{z} + \theta_z \theta_y \bar{y})
 \end{aligned} \tag{4}$$

Así pues, el comportamiento cinemático de una viga puede representarse adecuadamente por medio de siete variables o desplazamientos generalizados. Estos desplazamientos generalizados corresponden a tres corrimientos $\{u_o, v, w\}$ y tres rotaciones $\{\theta_z, \theta_y, \phi\}$ como magnitudes vectoriales y a una magnitud θ que pondera el alabeo no uniforme a lo largo del eje de la viga. Estos desplazamientos generalizados determinan los cuatro movimientos básicos desacoplados de una viga recta: *extensional* (u_o), *flexional lateral* (v, θ_z), *flexional transversal* (w, θ_y) y *torsional* (ϕ, θ). Los casos en que se pueda verificar desacoplamiento de

los cuatro movimientos en una viga, son por ejemplo en secciones con doble simetría y con materiales especialmente ortótropos. Por otra parte el superíndice “prima” indica derivación con respecto a x .

El campo de desplazamientos adoptado (4) se basa principalmente en la expresión obtenida por Fraternali y Feo¹¹, en su teoría de vigas compuestas de pared delgada considerando rotaciones moderadas, en la cual generalizan la teoría infinitesimal de áreas sectoriales de Vlasov. Fraternali y Feo modelaron la cinemática de la viga asumiendo que la sección transversal puede experimentar rotaciones moderadamente grandes, acompañadas por un alabeo fuera del plano infinitesimal. Utilizaron una matriz de transformación de rotaciones de segundo orden definida por Argyris¹², basada en el principio de rotación semitangencial para evitar la dificultad debida a la naturaleza no conmutativa de las rotaciones. En la presente formulación, en primer lugar, se generaliza el campo de desplazamiento de Fraternali y Feo para considerar el efecto de flexibilidad de corte. Luego, y en cumplimiento a la tercer hipótesis, se reemplaza al giro torsional ϕ de forma de considerar rotaciones arbitrariamente grandes ($\sin\phi$ y $\cos\phi$, según corresponda). De esta manera, la expresión para el campo de desplazamientos es una generalización de otras propuestas previamente en la literatura^{7,8,11}.

La función de alabeo de la sección transversal se define mediante la expresión

$$\omega(s, n) = \omega_p(s) + \omega_s(s, n) \quad (5)$$

donde ω_p y ω_s son las funciones de alabeo en el contorno y en el espesor respectivamente, las cuales se definen en la forma (Cortínez y Rossi⁴)

$$\omega_p(s) = \frac{I}{S} \left[\int_0^s \left(\int_{s_0}^s [r(s) - \psi(s)] ds \right) ds \right] - \int_{s_0}^s [r(s) - \psi(s)] ds \quad (6)$$

$$\omega_s(s, n) = -n l(s)$$

donde

$$r(s) = -Z(s) \frac{dY}{ds} + Y(s) \frac{dZ}{ds} \quad (7)$$

$$l(s) = Y(s) \frac{dY}{ds} + Z(s) \frac{dZ}{ds} \quad (8)$$

$r(s)$ representa la distancia perpendicular del centro de corte a la tangente a cualquier punto de la superficie media, y $l(s)$ representa la distancia del centro de corte a la normal a la superficie media (Fig.1). En la expresión (6) Ψ es la deformación de corte en la superficie media obtenida mediante la teoría de torsión pura de Saint-Venant y normalizada con respecto a $d\phi/dx$. Para secciones abiertas $\Psi = 0$.

2.1 Campo de Deformación

Los desplazamientos con respecto al sistema curvilíneo (x, s, n) puede ser expresado de la siguiente manera

$$\bar{U} = u_x(x, s, n) \quad (9)$$

$$\bar{V} = u_y(x, s, n) \frac{dY}{ds} + u_z(x, s, n) \frac{dZ}{ds} \quad (10)$$

$$\bar{W} = -u_y(x, s, n) \frac{dZ}{ds} + u_z(x, s, n) \frac{dY}{ds} \quad (11)$$

Las tres componentes ε_{xx} , ε_{xs} , ε_{xn} no nulas del tensor de deformación de Green Lagrange son dadas por

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (12)$$

$$\varepsilon_{xs} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial s} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial s} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial s} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial s} \right] \quad (13)$$

$$\varepsilon_{xn} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} \right] \quad (14)$$

Sustituyendo las expresiones (4) en (9-11) y luego en (12-14), empleando las relaciones (1-3) y (5-8), después de simplificar algunos términos de orden superior, se llega a las siguientes expresiones para el tensor de deformación

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^{(0)} + n\kappa_{xx}^{(1)} \\ \gamma_{xs} &= 2\varepsilon_{xs} = \gamma_{xs}^{(0)} + n\kappa_{xs}^{(1)} \\ \gamma_{xn} &= 2\varepsilon_{xn} = \gamma_{xn}^{(0)} \end{aligned} \quad (15)$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(0)} &= u'_o + \frac{1}{2}(u_o'^2 + v'^2 + w'^2) + \omega_p \left[\theta' - \frac{1}{2}(\theta_z \theta_y'' - \theta_y \theta_z'') \right] + \bar{Z} \left[(-\theta'_y - u'_o \theta'_y) \cos \phi + (\theta'_z + u'_o \theta'_z) \sin \phi \right] \\ &+ \bar{Y} \left[(-\theta'_z - u'_o \theta'_z) \cos \phi - (\theta'_y + u'_o \theta'_y) \sin \phi \right] + \frac{1}{2} \phi'^2 (Y^2 + Z^2) + (z_0 \theta'_z - y_0 \theta'_y) \sin \phi \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{xx}^{(1)} &= -\frac{dZ}{ds} \left[-(\theta'_z + u'_o \theta'_z) \cos \phi - (\theta'_y + u'_o \theta'_y) \sin \phi \right] + \frac{dY}{ds} \left[(-\theta'_y - u'_o \theta'_y) \cos \phi + (\theta'_z + u'_o \theta'_z) \sin \phi \right] \\ &- l \left[\theta' - \frac{1}{2}(\theta_z \theta_y'' - \theta_y \theta_z'') \right] - r \phi'^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xs}^{(0)} &= \frac{dY}{ds} \left[(v' - \theta_z - u'_o \theta_z) \cos \phi - z_0 \frac{1}{2}(\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') + (w' - \theta_y - u'_o \theta_y) \sin \phi \right] + (r - \psi)(\phi' - \theta) \\ &+ \frac{dZ}{ds} \left[(w' - \theta_y - u'_o \theta_y) \cos \phi + y_0 \frac{1}{2}(\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') - (v' - \theta_z - u'_o \theta_z) \sin \phi \right] + \psi \left[\phi' - \frac{1}{2}(\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\kappa_{xs}^{(1)} = -2 \left[\phi' - \frac{1}{2}(\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') \right] \quad (19)$$

$$\gamma_{xn}^{(0)} = \frac{dY}{ds} \left[(w' - \theta_y - u'_0 \theta_y) \cos \phi + y_0 \frac{I}{2} (\theta_z \theta'_y - \theta_y \theta'_z) - (v' - \theta_z - u'_0 \theta_z) \sin \phi \right] - \frac{dZ}{ds} \left[(v' - \theta_z - u'_0 \theta_z) \cos \phi - z_0 \frac{I}{2} (\theta_z \theta'_y - \theta_y \theta'_z) + (w' - \theta_y - u'_0 \theta_y) \sin \phi \right] + l(\phi' - \theta) \quad (20)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(U + V - T) dt = 0 \quad (21)$$

donde U es la energía de deformación de la viga, V el potencial de las cargas externas, T la energía cinética y t el parámetro del tiempo. Las variaciones de la energía cinética y de deformación vienen expresadas:

$$\delta T = -\iiint \rho (\ddot{u}_x \delta u_x + \ddot{u}_y \delta u_y + \ddot{u}_z \delta u_z) ds dn dx \quad (22)$$

$$\delta U = \iint (N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx} \delta \kappa_{xx}^{(l)} + N_{xs} \delta \gamma_{xs}^{(0)} + M_{xs} \delta \kappa_{xs}^{(l)} + N_{xn} \delta \gamma_{ns}^{(0)}) ds dx \quad (23)$$

donde N_{xx} , N_{xs} , M_{xx} , M_{xs} y N_{xn} son las resultantes de tensión definidas mediante las expresiones

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xx} dn, & M_{xx} &= \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{xx} n) dn, \\ N_{xs} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xs} dn, & M_{xs} &= \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{xs} n) dn, \\ N_{xn} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xn} dn \end{aligned} \quad (24)$$

La viga está sometida a la acción de fuerzas superficiales \bar{q}_x , \bar{q}_y y \bar{q}_z definidas por unidad de área de la superficie media indeformada y actuando según las direcciones x , y y z respectivamente. De la misma forma, \bar{p}_x , \bar{p}_y y \bar{p}_z son las fuerzas por unidad de superficie de la sección transversal indeformada, actuando en los extremos de la viga, $x = 0$ y $x = L$, donde L es la longitud de la viga. Además, \bar{f}_x , \bar{f}_y y \bar{f}_z son fuerzas por unidad de volumen, mientras que \bar{u}_x , \bar{u}_y y \bar{u}_z son desplazamientos correspondientes a puntos sobre la línea media de la sección.

$$\begin{aligned} \delta V &= -\iint (\bar{q}_x \delta \bar{u}_x + \bar{q}_y \delta \bar{u}_y + \bar{q}_z \delta \bar{u}_z) ds dx - \iint (\bar{p}_x \delta u_x + \bar{p}_y \delta u_y + \bar{p}_z \delta u_z) \Big|_{x=0} ds dn \\ &\quad - \iint (\bar{p}_x \delta u_x + \bar{p}_y \delta u_y + \bar{p}_z \delta u_z) \Big|_{x=L} ds dn - \iiint (\bar{f}_x \delta u_x + \bar{f}_y \delta u_y + \bar{f}_z \delta u_z) ds dn dx \end{aligned} \quad (25)$$

2.4 Ecuaciones Constitutivas

Las ecuaciones constitutivas para las resultantes de tensión correspondientes a laminados simétricos balanceados pueden expresarse en la forma

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{xs} \\ N_{xn} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{55}^{(H)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \gamma_{xs}^{(0)} \\ \gamma_{xn}^{(0)} \\ \kappa_{xx}^{(I)} \\ \kappa_{xs}^{(I)} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}}, & \bar{A}_{66} &= A_{66} - \frac{A_{26}^2}{A_{22}}, & \bar{A}_{55}^{(H)} &= A_{55}^{(H)} - \frac{(A_{45}^{(H)})^2}{A_{44}^{(H)}} \\ \bar{D}_{11} &= D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}}, & \bar{D}_{66} &= D_{66} - \frac{D_{26}^2}{D_{22}} \end{aligned} \quad (27)$$

Los coeficientes de rigidez tipo placa A_{ij} , D_{ij} y $A_{ij}^{(H)}$ se definen de acuerdo a la teoría de laminación presentada por Barbero¹³. El coeficiente \bar{D}_{16} ha sido despreciado debido a su valor relativamente bajo para la arquitectura de laminación considerada.

2.5 Ecuaciones Variacionales Gobernantes

Sustituyendo (16-20) en (21) e integrando con respecto a s , se obtiene la expresión unidimensional del principio de trabajos virtuales dada por

$$L_M + L_K + L_P = 0 \quad (28)$$

donde

$$\begin{aligned} L_M &= \int_0^L \rho \left[A \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta u_0 + I_z \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \delta \theta_z + I_y \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \delta \theta_y + C_w \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta \theta + A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v - z_0 \phi) \delta v \right. \\ &\quad \left. + A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w + y_0 \phi) \delta w + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (-Az_0 v + Ay_0 w + I_s \phi) \delta \phi \right] dx \end{aligned} \quad (29)$$

donde A es el área, I_y y I_z son los momentos de inercia, C_w la constante de alabeo e I_s el momento de inercia polar de la sección transversal.

$$\begin{aligned}
 L_K = \int_0^L & \left\{ \delta u'_0 \left[N + u'_0 N - M_z (\theta'_z + \theta'_y \phi) - M_y (\theta'_y + \theta'_z \phi) - Q_y (\theta_z + \theta_y \phi) - Q_z (\theta_y + \theta_z \phi) \right] \right. \\
 & + \delta v' (Q_y - Q_z \phi + v' N) + \delta w' (Q_z + Q_y \phi + w' N) + \delta \theta'_z \frac{I}{2} B \theta_y - \delta \theta'_y \frac{I}{2} B \theta_z \\
 & + \delta \theta_z \left[-Q_y (I + u'_0) + Q_z (I + u'_0) \phi + \frac{I}{2} (Q_z y_0 - Q_y z_0) \theta'_y - \frac{I}{2} T_{sv} \theta'_y - \frac{I}{2} B \theta''_y \right] \\
 & + \delta \theta'_z \left[-M_z (I + u'_0) + M_y (I + u'_0) \phi + N z_0 \phi + \frac{I}{2} (Q_y z_0 - Q_z y_0) \theta_y + \frac{I}{2} T_{sv} \theta_y \right] \\
 & + \delta \theta_y \left[-Q_z (I + u'_0) - Q_y (I + u'_0) \phi + \frac{I}{2} (Q_y z_0 - Q_z y_0) \theta'_z + \frac{I}{2} T_{sv} \theta'_z + \frac{I}{2} B \theta''_z \right] \\
 & + \delta \theta'_y \left[-M_y (I + u'_0) - M_z (I + u'_0) \phi + N y_0 \phi + \frac{I}{2} (Q_z y_0 - Q_y z_0) \theta_z - \frac{I}{2} T_{sv} \theta_z \right] \\
 & + \delta \phi \left[M_y \left((\theta'_y + \theta'_y u'_0) \phi + (\theta'_z + \theta'_z u'_0) \right) + M_z \left((\theta'_z + \theta'_z u'_0) \phi - (\theta'_y + \theta'_y u'_0) \right) \right. \\
 & + Q_y \left((\theta_y - w' + \theta_z u'_0) \phi - (\theta_y - w' + \theta_y u'_0) \right) + N (z_0 \theta'_z - y_0 \theta'_y) + Q_z \left((\theta_y - w' + \theta_y u'_0) \phi \right. \\
 & \left. \left. + (\theta_z - v' + \theta_z u'_0) \right) \right] + \delta \phi' \left[T_w + T_{sv} + B_l \phi' + N (\theta_z z_0 - \theta_y y_0) \right] + \delta \theta' B - \delta \theta T_w \left. \right\} dx \\
 \\
 L_P = \int_0^L & \left\{ -q_x \delta u_0 - q_y \delta v - q_z \delta w - b \delta \theta - \delta \theta'_z \frac{I}{2} b \theta_y + \delta \theta'_y \frac{I}{2} b \theta_z + \delta \theta_z \left[m_z - (m_y + z_0 q_x) \phi \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{I}{2} b \theta'_y + \frac{I}{2} \lambda_{mx} \theta_y + \lambda_y \theta_z \right] + \delta \theta_y \left[m_y + (m_z + y_0 q_x) \phi - \frac{I}{2} b \theta'_z + \frac{I}{2} \lambda_{mx} \theta_z + \lambda_z \theta_y \right] \right. \\
 & \left. + \delta \phi \left[-m_x - (m_z \theta_z + m_y \theta_y) \phi - (m_y + z_0 q_x) \theta_z + (m_z + y_0 q_x) \theta_y + \phi (\lambda_y + \lambda_z + z_0 q_z + y_0 q_y) \right] \right\} dx \\
 & + \left[-\bar{N} \delta u_0 - \bar{Q}_y \delta v - \bar{Q}_z \delta w - \bar{B} \delta \theta - \delta \theta'_z \frac{I}{2} \theta_y \bar{B} + \delta \theta'_y \frac{I}{2} \theta_z \bar{B} + \delta \theta_z \left[\bar{M}_z - (\bar{M}_y + \bar{N} z_0) \phi + \frac{I}{2} \theta'_y \bar{B} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \theta_z \bar{\lambda}_y + \frac{I}{2} \theta_y \bar{\lambda}_{mx} \right] + \delta \theta_y \left[\bar{M}_y + (\bar{M}_z + \bar{N} y_0) \phi - \frac{I}{2} \theta'_z \bar{B} + \theta_y \bar{\lambda}_z + \frac{I}{2} \theta_z \bar{\lambda}_{mx} \right] \right. \\
 & \left. + \delta \phi \left[-\bar{M}_x - \phi (\bar{M}_z \theta_z + \bar{M}_y \theta_y) - (\bar{M}_y \theta_z - \bar{M}_z \theta_y + \bar{N} z_0 \theta_z - \bar{N} y_0 \theta_y) + \bar{B}_l \phi \right] \right]_{x=0}^{x=L}
 \end{aligned} \tag{31}$$

donde $q_x, q_y, q_z, m_x, m_y, m_z, b, \lambda_y, \lambda_z$ y λ_{mx} representan las resultantes de las fuerzas aplicadas en la viga, y $\bar{N}, \bar{Q}_y, \bar{Q}_z, \bar{M}_z, \bar{M}_y, \bar{B}, \bar{M}_x, \bar{\lambda}_y, \bar{\lambda}_z, \bar{\lambda}_{mx}, \bar{B}_l$ representan las resultantes de las fuerzas aplicadas en los extremos de la viga¹⁴. En las expresiones anteriores se han efectuado las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
 N &= \int N_{xx} ds, \quad M_y = \int \left(N_{xx} \bar{Z} + M_{xx} \frac{dY}{ds} \right) ds, \quad M_z = \int \left(N_{xx} \bar{Y} - M_{xx} \frac{dZ}{ds} \right) ds \\
 B &= \int \left(N_{xx} \omega_p - M_{xx} l \right) ds, \quad Q_z = \int \left(N_{xs} \frac{dZ}{ds} + N_{xn} \frac{dY}{ds} \right) ds, \quad Q_y = \int \left(N_{xs} \frac{dY}{ds} - N_{xn} \frac{dZ}{ds} \right) ds \\
 T_w &= \int \left(N_{xs} (r - \psi) + N_{xn} l \right) ds, \quad T_{sv} = \int \left(N_{xs} \psi - 2M_{xx} \right) ds, \quad B_l = \int \left[N_{xx} (Y^2 + Z^2) - 2M_{xx} r \right] ds
 \end{aligned} \tag{32}$$

donde $N, Q_y, Q_z, M_y, M_z, B, T_w$ y T_{sv} corresponden a la fuerza axial, fuerzas de corte,

momentos flectores, bimomento, momento flexotorsional y momento torsional de Saint Venant respectivamente. Adicionalmente B_I representa una resultante de tensión de orden superior.

Sustituyendo (16-20) en (23) y luego en (25) se obtiene la ecuación variacional gobernante cuyas incógnitas vienen dadas por los desplazamientos generalizados.

3 METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

Con el propósito de analizar el problema de vibraciones libres de vigas compuestas de pared delgada sometida a un estado inicial de tensiones, se utiliza las ecuaciones de movimiento (28). En la formulación de este estudio, en la expresión (28) se considera los términos de hasta primer orden de la expansión en series las expresiones trigonométricas $\sin\phi = \phi$, $\cos\phi = 1$. La metodología adoptada en este trabajo considera la influencia de la deflexión, debida a la tensión inicial, sobre el cálculo de vibraciones libres. En el caso de carga lateral en el plano vertical de la viga, las componentes de desplazamiento en el plano de carga son de la siguiente forma $\{u, v, \theta_z, w, \theta_y, \phi, \theta\}^t = \{0, 0, 0, w, \theta_y, 0, 0\}^t$. Los desplazamientos en el plano de carga se resuelven por medio de la teoría estática linealizada, Cortínez y Piovan⁸.

Luego se reemplazan estas últimas expresiones halladas para el estado inicial de tensiones en la ecuación variacional, y se utiliza el método de Ritz en la discretización del sistema resultante. Finalmente, la solución del problema de autovalores para distintos valores de carga permite determinar las frecuencias naturales y sus correspondientes modos de vibración. En el análisis de vibraciones libres de vigas compuestas de pared delgada se consideran vigas bi-simétricas con laminación simétrica balanceada

3.1 Viga Simplemente Apoyada

Con el propósito de analizar el problema de vibraciones libres de una viga simplemente apoyada y sometida a un estado inicial de tensiones se desarrolla a continuación el procedimiento adoptado, considerando una viga sometida a flexión uniforme, como ejemplo. Los desplazamientos en el estado inicial de tensiones se obtienen a partir de la versión linealizada del funcional despreciando los términos dinámicos. De esta manera, aplicando cálculo variacional en las expresiones (30) y (31), se obtienen las ecuaciones diferenciales de equilibrio. Estas últimas se resuelven fácilmente para obtener las expresiones de los desplazamientos en el plano de carga.

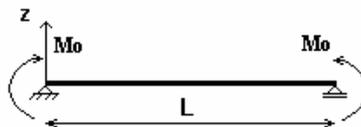


Figura 2. Viga simplemente apoyada sometida a flexión uniforme

En este ejemplo, la expresión de los desplazamientos en el plano de carga para el caso de una viga simplemente apoyada sometida a flexión uniforme (Figura 2), es la siguiente:

$$w = \frac{Mo}{2\widehat{EI}_y}(Lx - x^2); \quad \theta_y = \frac{Mo}{2\widehat{EI}_y}(L - 2x); \quad (33)$$

La ecuación variacional (28) es discretizada utilizando las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} v &= v_0(t) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right); & \theta_z &= \theta_{z_0}(t) \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right); \\ \phi &= \phi_0(t) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right); & \theta &= \theta_0(t) \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right); \end{aligned} \quad (34)$$

donde $v_0(t)$, $\theta_{z_0}(t)$, $\phi_0(t)$ y $\theta_0(t)$ representan las amplitudes asociadas a los desplazamientos, las cuales son dependientes del tiempo. Estas relaciones son comúnmente adoptadas como aproximaciones para modos de vigas simplemente apoyadas tanto en análisis dinámicos como estáticos. Reemplazando las expresiones (33) y (34) en la ecuación variacional (28) y ensamblando de manera usual puede escribirse:

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_G \mathbf{M}_0) \mathbf{U} = 0 \quad (35)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa proveniente de la expresión (29), \mathbf{U} es el vector global de desplazamientos, \mathbf{K} es la matriz de rigidez elástica lineal y \mathbf{K}_G es la matriz de rigidez geométrica que considera la deflexión correspondiente al estado inicial de tensión.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho I_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho C_w \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\widehat{GS}_y \pi^2}{L^2} & -\frac{\widehat{GS}_y \pi}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{\widehat{GS}_y \pi}{L} & \widehat{GS}_y + \frac{\widehat{EI}_z \pi^2}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\widehat{GJ} + \widehat{GS}_w) \frac{\pi^2}{L^2} & -\frac{\widehat{GS}_w \pi}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{\widehat{GS}_w \pi}{L} & \widehat{GS}_w + \frac{\widehat{EC}_w \pi^2}{L^2} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 - \frac{\widehat{EI}_z}{\widehat{EI}_y} - \frac{\widehat{GJ}}{4\widehat{EI}_y}\right) \frac{\pi}{L} & \frac{\widehat{EC}_w \pi^2}{4\widehat{EI}_y L^2} \\ 0 & -\left(1 - \frac{\widehat{EI}_z}{\widehat{EI}_y} - \frac{\widehat{GJ}}{4\widehat{EI}_y}\right) \frac{\pi}{L} & -\frac{Mo}{\widehat{EI}_y} \left(1 - \frac{\widehat{EI}_z}{\widehat{EI}_y}\right) & 0 \\ 0 & \frac{\widehat{EC}_w \pi^2}{4\widehat{EI}_y L^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

donde \widehat{EI}_z , \widehat{EI}_y representan la rigidez flexional, \widehat{GS}_w y \widehat{GS}_y son rigideces de corte de una viga de material compuesto. Asumiendo un movimiento armónico con frecuencia Ω , la ecuación (35) es reducida a un problema de autovalores⁴:

$$[-\Omega^2 \mathbf{M} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_G M_0)] \mathbf{U} = 0 \quad (39)$$

De esta manera, la solución de esta ecuación permite hallar las frecuencias naturales de vibración y las correspondientes formas modales.

4 APLICACIONES Y RESULTADOS NUMÉRICOS

El propósito de esta sección es aplicar la metodología descrita anteriormente para estudiar el comportamiento dinámico de vigas compuestas de pared delgada. Como aspecto fundamental de dicho análisis se puntualiza la influencia de las deflexiones iniciales en la determinación de las frecuencias naturales de vibración. El estudio contempla diferentes condiciones de borde sometidas a diferentes condiciones de carga, teniendo en cuenta además, diferentes relaciones de esbeltez de la viga y diferentes configuraciones de laminación.

En las tablas y figuras presentadas a continuación, (FL) representa a los valores de frecuencias naturales determinadas a partir de la teoría clásica o lineal (sin considerar deformación inicial) y (FNL) representa a los valores de frecuencias naturales obtenidas por medio de la presente formulación (teniendo en cuenta deflexiones iniciales). Por otro lado, se analiza la influencia del efecto de deformación por corte y finalmente se estudia el efecto de la no-linealidad sobre el comportamiento dinámico de la viga.

4.1 Viga Simplemente Apoyada sometida a carga uniforme de Momentos

El ejemplo considerado es una viga I simplemente apoyada sometida a cargas de momentos M_0 aplicadas en el centroide como se muestra en la Figura 1. Las propiedades geométricas de la viga son $L = 6$ m, $h = 0.6$ m, $b = 0.6$ m, $e = 0.03$ m (ver Figura 3). El material analizado es grafito-epoxy (AS4/3501) cuyas propiedades son $E_1 = 144$ GPa, $E_2 = 9.65$ GPa, $G_{12} = 4.14$ GPa, $G_{13} = 4.14$ GPa, $G_{23} = 3.45$ GPa, $\nu_{12} = 0.3$, $\nu_{13} = 0.3$, $\nu_{23} = 0.5$, $\rho = 1389$ kg/m³.

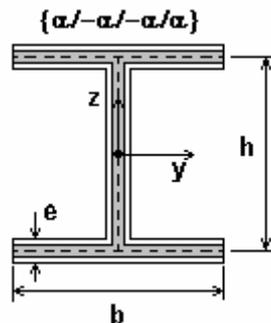


Figura 3. Sección transversal de una viga I compuesta.

En las Figuras 4-6 se muestra los valores de las frecuencias naturales (Hz) en función del parámetro de carga λ , para las secuencias de laminación $\{0/0/0/0\}$, $\{0/90/90/0\}$ y $\{45/-45/-45/45\}$, respectivamente. La carga de momentos M_0 es escalada con el valor de la carga crítica de pandeo, $M_0 = \lambda M_{cr}$. En las figuras se compara los valores de la presente formulación (FNL) con aquellos que no tienen en cuenta la deflexión inicial (FL - Teoría clásica), estudiando además la influencia del efecto de corte.

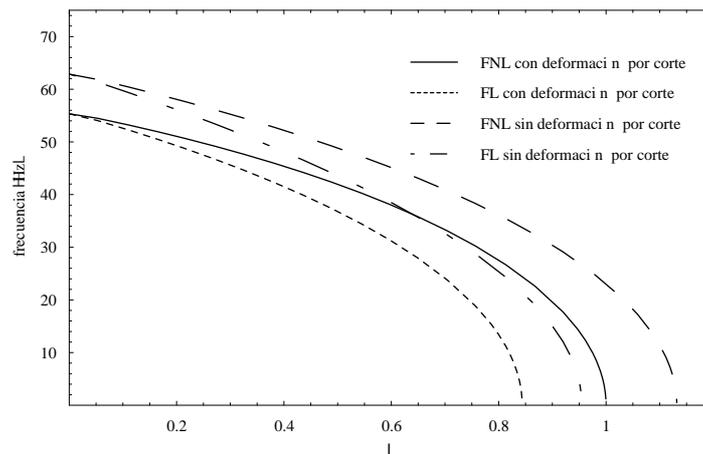


Figura 4. Frecuencias natural versus parámetro de carga, laminación $\{0/0/0/0\}$.

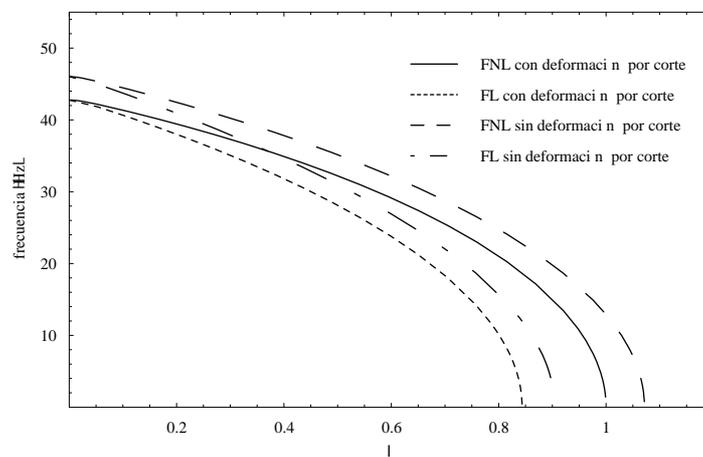


Figura 5. Frecuencias natural versus parámetro de carga, laminación $\{0/90/90/0\}$.

De las figuras se observa como disminuye las frecuencias naturales a medida que aumenta el parámetro de carga. Las frecuencias calculadas a partir del análisis lineal (FL) son menores comparadas con aquellas calculadas a partir del modelo no-lineal (FNL), este efecto se hace más notorio a medida que aumenta deflexión inicial. Se observa que el efecto de las deflexiones debido a las tensiones iniciales es constante para todas las secuencias de

laminación analizadas. Por el contrario, el efecto de corte es muy significativo cuando las fibras están orientadas en la dirección longitudinal de la viga. Por otro lado, cuando el valor del parámetro de carga es igual a cero, la frecuencia natural corresponde al primer modo flexional (ver Figura 7a). Luego para cualquier valor de la carga, la frecuencia corresponde a un modo flexo-torsional con deflexión inicial en la dirección vertical (ver Figura 7b). El acoplamiento entre ambos modos viene dado exclusivamente por el efecto de la carga lateral M_0 .

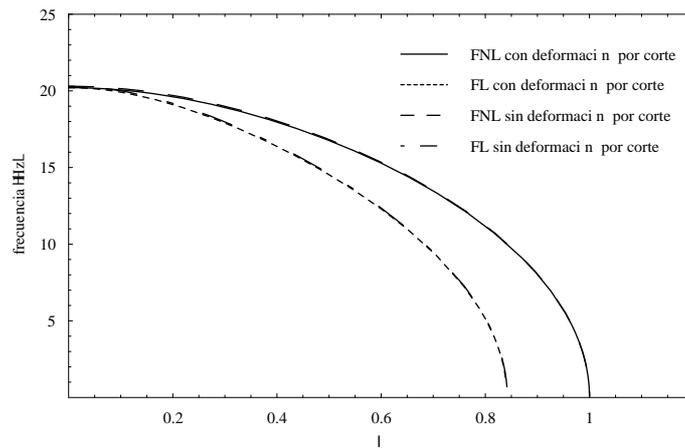


Figura 6. Frecuencias natural versus parámetro de carga, laminación $\{45/-45/-45/45\}$.

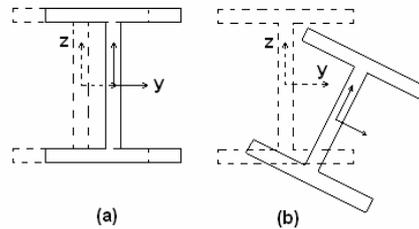


Fig 7. Primer modo flexional(a) y flexo-torsional (b).

Es curioso observar que para un valor determinado del parámetro de carga la frecuencia natural hallada con la presente formulación coincide con aquella hallada a partir de la teoría lineal sin corte, este efecto se observa para la secuencia de laminación $\{0/0/0/0\}$ y $\{0/90/90/0\}$. Es claro que este efecto solo se presenta para un determinado valor de carga y a medida que nos alejamos de este valor, la discrepancia entre ambas teorías se hace muy notoria.

En la Tabla 1, puede observarse los resultados hallados para diferentes estados de carga, considerando las tres secuencias de laminación. La denominación CC representa a los valores calculados con la presente formulación considerando el efecto de corte (CC = con corte), mientras que SC representa a los resultados que fueron hallados sin considerar la deformación por corte (SC = sin corte). Cuando el valor de la carga es la mitad de la carga crítica, la

diferencia porcentual entre ambas teorías (FNL y FL) alcanza aproximadamente un 12% (tomando al valor de la presente formulación como referencia). A medida que aumentan las deflexiones en el plano de carga, esta diferencia aumenta pudiendo llegar hasta un 50% cuando el valor de la carga es el 80% de la carga de pandeo.

Tabla 1. Frecuencias naturales en Hz, viga simplemente apoyada.

λ	Análisis	{0/0/0/0}		{0/90/90/0}		{45/-45/-45/45}	
		CC	SC	CC	SC	CC	SC
0	FNL FL	55.34	62.87	42.77	46.03	20.21	20.30
0.5	FNL FL	41.96 36.79	48.84 43.58	32.21 28.12	35.15 31.01	16.77 14.54	16.83 14.59
0.8	FNL FL	27.56 13.42	36.13 25.42	21.04 10.15	24.77 15.73	11.18 5.14	11.22 5.20

4.2 Viga Simplemente Apoyada sometida a una carga distribuida

En este ejemplo, se estudia el comportamiento de pandeo de una viga I simplemente apoyada sometida a una carga distribuida ubicada en tres diferentes posiciones, como se muestra en la Figura 8. La carga puede ser aplicada sobre el ala superior (caso a), en el centro de corte (case b), y en el ala inferior de la viga (case c). El estudio es orientado principalmente en determinar la importancia del parámetro de ubicación de la carga sobre el efecto de deflexión inicial. Las propiedades geométricas de la viga y el material utilizado son las mismas que en el ejemplo anterior.

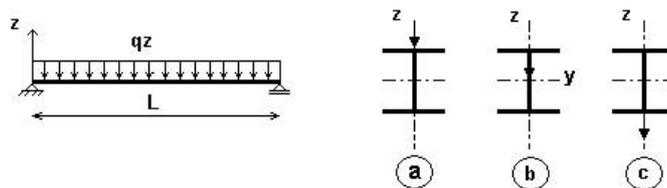


Figura 8. Diferente ubicación de la carga distribuida de una viga simplemente apoyada.

Las Figuras 9-11 muestran los resultados comparativos entre el análisis de pandeo no –lineal (PNL) y lineal (PL) (considerando deformación por corte) en términos de la cargas críticas, para una secuencia de laminación {0/0/0/0}, {0/90/90/0} y {45/-45/-45/45}, respectivamente. La carga distribuida q_z es escalada con el valor de la carga crítica de pandeo correspondiente al caso ⑥ (carga aplicada en el centro de corte), $q_z = \lambda q_{cr}$.

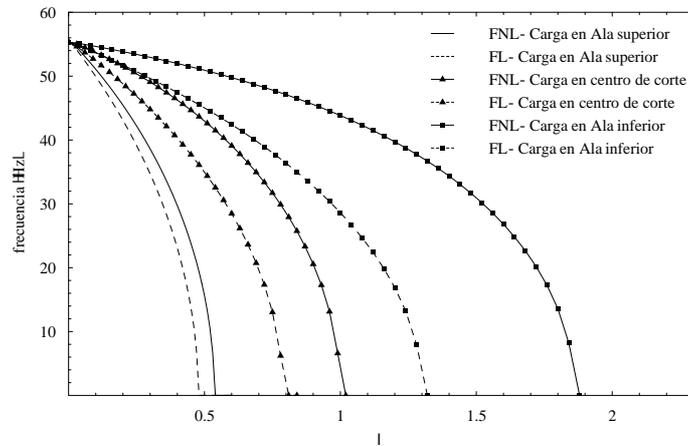


Figura 9. Frecuencias natural versus parámetro de carga, laminación $\{0/0/0/0\}$.

En las Figuras se analiza el efecto de la deflexión, correspondiente al estado inicial de tensiones, para diferentes ubicaciones de la carga. Se aprecia en las figuras que el efecto de la carga distribuida provoca la reducción del valor de las frecuencias naturales con respecto al estado sin carga. Además, esta disminución es más pronunciada cuando la carga es aplicada sobre el ala superior de la viga. Por otro lado, se observa que la consideración de la deflexión inicial aumenta considerablemente los valores de frecuencias naturales en comparación con la teoría clásica, a medida que aumenta la carga. Este efecto es mayor cuando la carga es aplicada sobre el ala inferior de la viga y cuando se utiliza la secuencia de laminación $\{0/0/0/0\}$. Cuando la carga es aplicada en el centro de corte, la influencia de la deflexión es similar a la obtenida en el ejemplo anterior, para la viga sometida flexión uniforme. Por último, en las tres secuencias de laminación analizadas, puede observarse que cuando la carga es ubicada sobre la parte superior de la viga, la diferencias entre ambas teorías (FNL y FL) es menor que en los otros dos casos de carga.

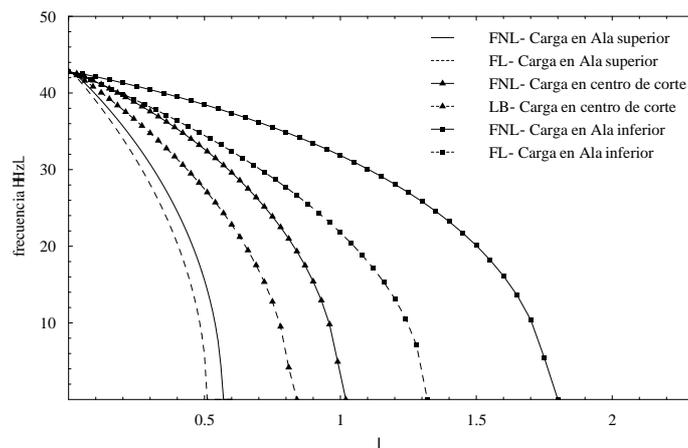


Figura 10. Frecuencias natural versus parámetro de carga, laminación $\{0/90/90/0\}$.

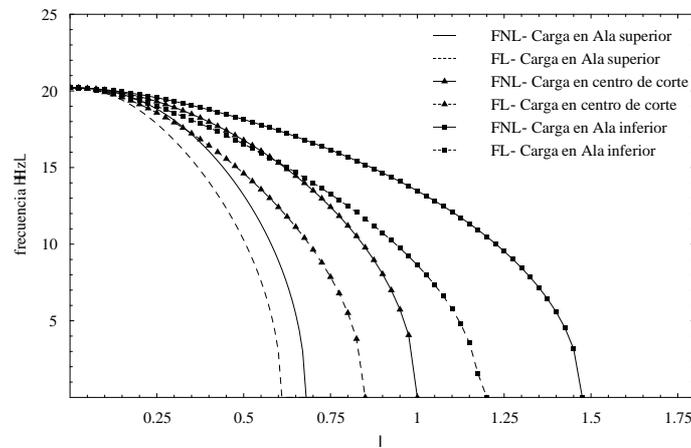


Figura 11. Frecuencias natural versus parámetro de carga, laminación $\{45/-45/-45/45\}$.

4.3 Validación con Elementos Finitos

El propósito de esta sección es realizar una serie de cálculos tendientes a la verificación del comportamiento dinámico de vigas compuestas, a partir del programa de elementos finitos llamado Abaqus/Standard¹⁵. La geometría de la viga es modelada a partir de un modelo tridimensional deformable tipo *shell*. La malla utilizada en la discretización esta compuesta por elementos lineales cuadriláteros, denominados *S4*. La longitud característica del elemento es de 0.3, y la malla resultante se compone de 240 elementos y 287 nodos.

En los cálculos numéricos se estudia el comportamiento dinámico de una viga I bisimétrica de material compuesto vidrio-epoxi, cuyas propiedades son: $E_1 = 48.3$ GPa, $E_2 = 19.8$ GPa, $G_{12} = 8.96$ GPa, $G_{13} = 8.96$ GPa, $G_{23} = 6.19$ GPa, $\nu_{12} = 0.27$, $\nu_{13} = 0.27$, $\nu_{23} = 0.6$, $\rho = 1389$ kg/m³. Se consideran dos condiciones de borde: simplemente apoyada y empotrada en los extremos, sometidas a cargas puntuales ubicadas en la mitad de la viga. Las propiedad geométricas de la viga son $L = 12$ m, $h = 0.6$ m, $b = 0.6$ m, $e = 0.03$ m y la secuencia de laminación utilizadas son $\{0/0/0/0\}$, $\{0/90/90/0\}$ y $\{45/-45/-45/45\}$.

4.3.1 Viga Simplemente Apoyada sometida a una carga puntual

Se considera una viga simplemente apoyada y sometida a una carga puntual aplicada en tres diferentes alturas de la sección media de la viga: en el ala superior, en el centro de corte y en el ala inferior de la viga (ver Figura 12). En la Tabla 2, se muestra los valores de frecuencias naturales en *Hz* para diferentes condiciones de laminado y de carga. En la misma se comparan los valores hallados la presente formulación (FNL), aquellos obtenidos sin considerar la deflexión inicial (FL) y los calculados con el modelo tridimensional de elementos finitos (Abaqus). La carga es escalada con el valor de la carga crítica de pandeo según corresponda a la viga analizada, $P = \lambda P_{cr}$. En la Figura 13, se muestra la configuración deformada obtenida con elementos finitos (Abaqus) de una viga con laminación $\{0/90/90/0\}$ correspondiente al modo flexional sin precarga y al modo flexo-torsional con precarga ubicada en el centro de corte.

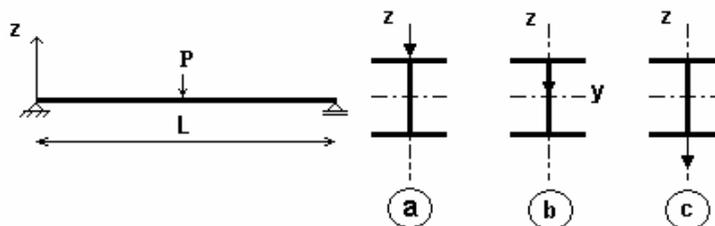


Fig. 12. Viga simplemente apoyada, diferentes ubicaciones de la carga.

Se observa que las frecuencias halladas con el modelo viga (FNL) concuerdan bastante bien con los valores de elementos finitos (Abaqus). En el caso de carga nula, los valores calculados con estas dos modelos son prácticamente iguales. En el caso de precarga (la mitad de la carga de pandeo), los valores del presente modelo están siempre apenas por encima de los hallados con Abaqus. Para este estado de carga, la teoría clásica (FL) arroja valores de frecuencia por debajo en comparación con los modelos no-lineales.

Tabla 2. Frecuencias naturales en Hz, carga puntual.

Laminación	Condición de Carga	FNL	FL	Abaqus	
{0/0/0/0}	$\lambda = 0$	9.05	9.05	9.03	
	$\lambda = 0.5$	caso (a)	7.62	7.04	7.45
		caso (b)	7.24	6.18	6.83
		caso (c)	7.00	5.50	6.83
{0/90/90/0}	$\lambda = 0$	7.63	7.63	7.62	
	$\lambda = 0.5$	caso (a)	6.44	5.88	6.31
		caso (b)	6.21	5.32	5.96
		caso (c)	6.04	4.76	5.83
{45/-45/-45/45}	$\lambda = 0$	6.51	6.51	6.51	
	$\lambda = 0.5$	caso (a)	5.78	5.25	5.66
		caso (b)	5.52	4.76	5.34
		caso (c)	5.29	4.26	5.12

Puede observarse que el estado de precarga provoca una disminución en los valores de frecuencia, y este efecto es mayor cuando se utiliza una secuencia de laminación {0/0/0/0}. Además, esta disminución es mayor cuando la carga es aplicada en el ala inferior de la viga (caso (c)). Por otro lado, la influencia de la deflexión inicial (no-linealidad geométrica) es mayor para esta condición de carga y se mantiene constante para las tres secuencias de laminación analizadas.

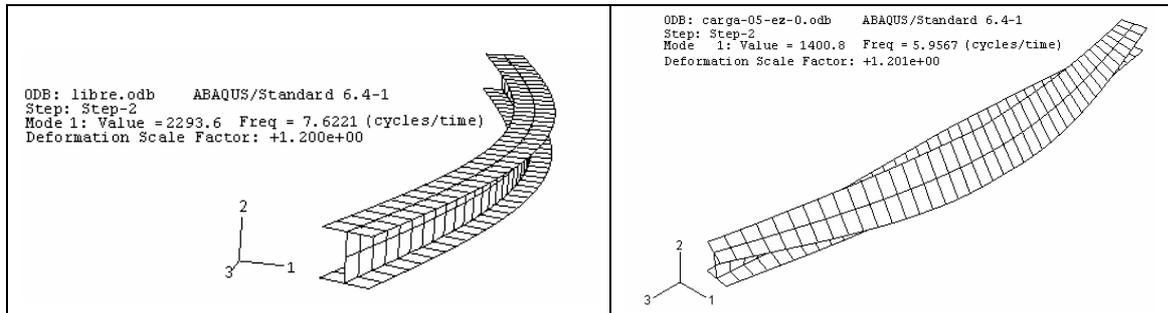


Fig. 13. Grafico de la izquierda (derecha) corresponde al modo flexional (flexo-torsional) de una viga simplemente apoyada sin (con) precarga, obtenido con el programa Abaqus.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó el comportamiento dinámico de vigas compuestas de pared delgada, a partir de una formulación geométrica no-lineal la cual considera aspectos no convencionales. El enfoque utilizado consiste en la linealización del problema de manera de considerar el acoplamiento no-lineal entre las deflexiones iniciales y las incrementales. De esta manera, se evita el análisis completo no-lineal. En el estudio de autovalores se investigó principalmente el efecto de la no-linealidad geométrica proveniente del estado inicial de tensiones. De los ejemplos numéricos se pudo determinar, en forma preliminar, el comportamiento dinámico de estas estructuras:

- i. Los valores de frecuencia de vibración disminuyen a medida que aumenta la carga. Además, esta disminución depende de la ubicación de la carga, por ejemplo, la disminución es más pronunciada cuando la carga es aplicada en el ala superior de la viga.
- ii. El efecto geométrico no-lineal provoca un aumento en los valores de frecuencia en comparación con la teoría clásica que no considera la deflexión inicial en el estado de precarga. Además, este efecto tiene mayor influencia a medida que aumenta la carga y por consiguiente la deflexión, correspondiente al plano de carga.
- iii. La influencia de las deflexiones sobre el comportamiento dinámico de la estructura es altamente dependiente de la ubicación de la carga. En la mayoría de los casos, este efecto es más importante cuando la carga es aplicada sobre el ala inferior de la viga.
- iv. La secuencia de laminación utilizada también juega un papel importante sobre el comportamiento dinámico de la viga. La secuencia de laminación $\{0/0/0/0\}$ presenta un comportamiento algo más rígido que los otros laminados, tanto en el estado sin carga como en el de precarga.
- v. La deformación por corte tiene una gran influencia sobre el comportamiento dinámico de vigas compuestas. La formulación sin corte sobreestima los valores de frecuencia.

En futuros trabajos extenderemos la presente formulación con el fin de analizar todo tipo de laminación de materiales compuestos.

6 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue realizado gracias a Secretaría de Ciencia y Tecnología, Universidad Tecnológica Nacional, Universidad Nacional del Sur y al CONICET.

7 REFERENCIAS

- [1] Vlasov V. *Thin Walled Elastic Beams*, Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation, (1961).
- [2] Bolotin V. *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, San Francisco: HD (1964).
- [3] Coulter BA, Miller RE. Vibration and buckling of beam-columns subjected to non-uniform axial loads. *Int J Num Meth Engng* 23:1739–55, (1986).
- [4] Cortínez VH, Rossi RE. Dynamics of shear deformable thin-walled open beams subjected to initial stresses. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 14 (3), 293-316 (1998).
- [5] Kim SB, Kim MY. Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames, *Engineering Structures* 22 446–458 (2000).
- [6] Jun L, Hongxing H, Rongying S y Xianding J, Dynamic response of axially loaded monosymmetrical thin-walled Bernoulli–Euler beams, *Thin-Walled Structures* 42 1689–1707 (2004).
- [7] Mohri F, Azrar L y Potier-Ferry M. Vibration análisis of buckled thin-walled beams with open sections. *J Sound and Vibration*, (2005).
- [8] Cortínez VH y Piovan MT. Vibration and Buckling of Composite Thin-Walled Beams with Shear Deformability. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4), 701-723 (2002).
- [9] Jun L, Rongying S, Hongxing H y Xianding J. Bending–torsional coupled dynamic response of axially loaded composite Timosenko thin-walled beam with closed cross-section. *Composite Structures* 64, 23–35 (2004).
- [10] Timoshenko SP y Gere JM, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York. (1961).
- [11] Fraternali F y Feo L. On a moderate rotation theory of thin-walled composite beams. *Composites, Part B: engineering*, 31, 141-158 (2000).
- [12] Argyris JH. An excursion into large rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 32, 85-155 (1982).
- [13] Barbero EJ. *Introduction to Composite Material Design*. Taylor and Francis Inc, (1999).
- [14] Cortínez VH, Machado SP y Piovan MT. Post-Pandeo de Vigas Compuestas de Pared Delgada. First South-American Congress on Computational Mechanics, 1713-1729 (2002).
- [15] Abaqus standard user's manuel, v. 5.6. Pawtucket (RI): Hibbit Karlsson and Sorensen, Abaqus, (1999).