

ANÁLISIS DE POST-PANDEO LATERAL DE VIGAS COMPUESTAS DE PARED DELGADA

Sebastián P. Machado^{†,*}, Víctor H. Cortínez^{†,*}

[†] Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos
Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional
11 de abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-0291-4555220 FAX: 0291 4555311
e-mail: smachado@frbb.utn.edu.ar, web page: <http://www.frbb.utn.edu.ar/gasm>

* CONICET, Argentina

Palabras clave: Vigas Compuestas, Flexibilidad de Corte, Post-pandeo lateral.

Resumen. *En el presente trabajo se estudia la respuesta elástica de post-pandeo lateral de vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos. Dicho estudio se realiza a partir de una teoría geoméricamente no-lineal desarrollada para vigas compuestas de pared delgada con sección transversal arbitraria (abierta o cerrada) y teniendo en cuenta la incorporación de varios aspectos no convencionales tal como la flexibilidad de corte asociada a los movimientos flexionales y torsionales. Mediante la presente formulación se analiza la influencia de las deformaciones de pre-pandeo de la viga sobre las cargas críticas y el comportamiento de post-pandeo de una viga bisimétrica, simplemente apoyada, y sometida a una carga distribuida. Se obtienen curvas de equilibrio de pos-pandeo para diferentes estados de carga.*

1 INTRODUCCION

En el diseño estructural moderno, la utilización de estructuras livianas y rígidas crece día a día. Consecuentemente las vigas de pared delgada se emplean muy frecuentemente. La introducción de materiales compuestos en la tecnología de construcción ha mostrado grandes ventajas desde el punto de vista de la relación entre la rigidez y el peso como también debido a otras propiedades mejoradas, por ejemplo la alta resistencia a la corrosión. Muy frecuentemente las estructuras de material compuesto adquieren la forma de vigas de pared delgada. Por otra parte, este tipo de estructuras presenta problemas particulares en su análisis que están siendo investigadas intensamente. En particular, el problema de inestabilidad es de interés corriente (Vlassov¹) y existen varios estudios concentrados en la determinación de cargas críticas de pandeo para diferentes configuraciones de uso habitual. Es de práctica corriente calcular dichas cargas críticas a partir del análisis de estabilidad lineal. Actualmente, dichas estructuras trabajan en el rango no lineal. De esta manera, un análisis no-lineal es necesario para tener en cuenta los grandes desplazamientos y el acoplamiento de las ecuaciones diferenciales. Además, el comportamiento de estructuras de pared delgada en el rango de pos-pandeo es importante por varias razones. Este permite tener en cuenta el cambio en la geometría inducida por la deformación de pre-pandeo. Este efecto es ignorado por el análisis de estabilidad lineal, y para algunas estructuras la influencia de este último sobre el cálculo de las cargas críticas puede ser importante. Por otro lado, si bien estas magnitudes son de necesidad fundamental desde el punto de vista del diseño, no brindan información sobre la capacidad de carga adicional en el régimen de pos-pandeo. Por tales motivos, esta información debe obtenerse a partir de un análisis geométrico no lineal que ha sido el objeto de numerosos artículos en el caso de vigas construidas con materiales isótropos^{2,3,4,5}. Por otra parte, estudios similares para el caso de vigas de paredes delgadas de materiales compuestos son relativamente escasos⁶.

En el presente trabajo se orienta al desarrollo de una teoría geoméricamente no lineal para vigas compuestas de pared delgada con secciones abiertas o cerradas considerando efectos de flexibilidad por corte. Como ejemplo particular se estudia la influencia de las deflexiones de pre-pandeo sobre la resistencia al pandeo lateral de una viga I simplemente apoyada para diferentes estados de carga distribuida. Las ecuaciones de equilibrio gobernantes se transforman en un sistema algebraico fuertemente no-lineal utilizando el método de Galerkin. Se aplica un método basado en el algoritmo de Newton-Raphson para obtener resultados numéricos. En la respuesta de pos-pandeo y carga crítica de pandeo se señala el efecto de los diferentes estados de carga para dos tipos de secuencia de laminación simétrica balanceada y tres longitudes de la viga.

2 TEORÍA

2.1 Definiciones e hipótesis

Se considera una viga compuesta con sección transversal arbitraria (ver Figura 1). Los puntos del elemento estructural son referidos a un sistema de coordenadas cartesianas (x, \bar{y}, \bar{z}) , donde el eje x es paralelo al eje longitudinal de la viga, mientras que \bar{y} y \bar{z} son los

ejes principales de la sección transversal. Los ejes y, z son paralelos a los principales pero tienen su origen en el centro de corte (definido de acuerdo a la teoría de Vlasov¹ de vigas isótropas). Las coordenadas correspondientes a los puntos que se encuentran sobre la línea media son denotados como Y y Z (o \bar{Y} y \bar{Z}). Además, una coordenada circunferencial s y una normal n son introducidas sobre la línea media de la sección transversal. Por otro lado y_0 y z_0 son las coordenadas del centroide medidas desde el centro de corte.

El presente modelo se basa en las siguientes hipótesis:

- 1) La sección es indeformable en su plano.
- 2) La distribución de alabeo está dada por la función de Saint-Venant para vigas isótropas.
- 3) Se desprecia las resultantes de tensión correspondientes a la tensión circunferencial σ_{ss} y el esfuerzo resultante correspondiente a γ_{ns} .
- 4) Los radios de curvatura de cualquier punto de la membrana son despreciados.
- 5) La curvatura torsional lineal se expresa de acuerdo a la teoría clásica de placas.
- 6) Se supone una secuencia de laminación simétrica y balanceada, o especialmente ortótropa⁷ (las ecuaciones constitutivas correspondientes a las resultantes de tensiones laminares se indican en el Apéndice I).

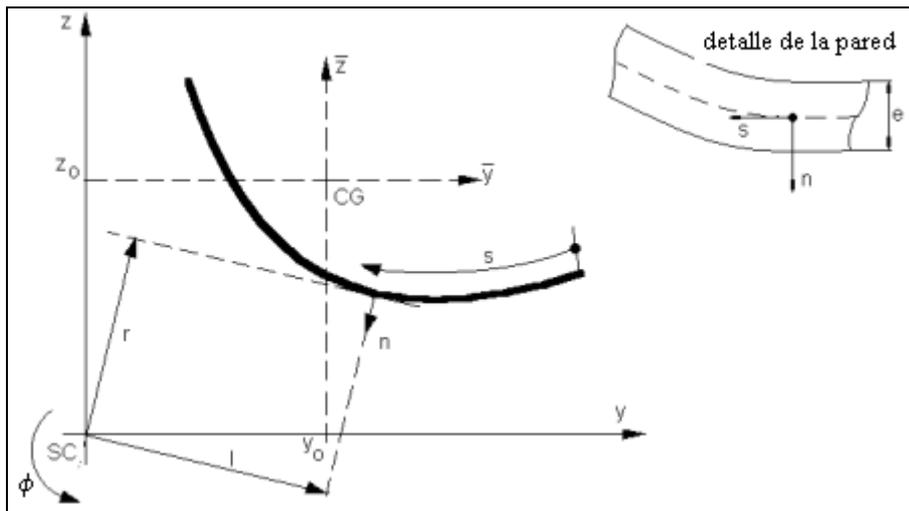


Figura 1: Sistema de coordenadas de la sección transversal

3 FORMULACIÓN VARIACIONAL

Teniendo en cuenta las hipótesis adoptadas, el principio de Trabajos Virtuales para una lámina compuesta puede ser expresada en la forma⁸:

$$\begin{aligned}
 & \iint (N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx} \delta \kappa_{xx}^{(1)} + N_{xs} \delta \gamma_{xs}^{(0)} + M_{xs} \delta \kappa_{xs}^{(1)} + N_{xn} \delta \gamma_{ns}^{(0)}) ds dx \\
 & - \iint (\bar{q}_x \delta \bar{u}_x + \bar{q}_y \delta \bar{u}_y + \bar{q}_z \delta \bar{u}_z) ds dx - \iint (\bar{p}_x \delta u_x + \bar{p}_y \delta u_y + \bar{p}_z \delta u_z) \Big|_{x=0}^{x=L} ds dn \quad (1) \\
 & - \iiint (\bar{f}_x \delta u_x + \bar{f}_y \delta u_y + \bar{f}_z \delta u_z) ds dn dx
 \end{aligned}$$

donde N_{xx} , N_{xs} , M_{xx} , M_{xs} y N_{xn} son las resultantes de tensión laminares, y se definen como sigue:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xx} \, dn & , & & M_{xx} &= \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{xx} n) \, dn & , & & M_{xs} &= \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{xs} n) \, dn \\ N_{xs} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xs} \, dn & , & & N_{xn} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xn} \, dn \end{aligned} \quad (2)$$

además, se considera que la viga está sujeta a las fuerzas superficiales \bar{q}_x , \bar{q}_y y \bar{q}_z especificadas por unidad de área de la superficie media indeformada y actuando a lo largo de las direcciones x , y y z respectivamente. De la misma manera, \bar{p}_x , \bar{p}_y y \bar{p}_z son las fuerzas aplicadas en los extremos en $x = 0$ y $x = L$, donde L es la longitud de la viga. Asimismo \bar{f}_x , \bar{f}_y y \bar{f}_z son las fuerzas por unidad de volumen. Cabe aclarar que \bar{u}_x , \bar{u}_y y \bar{u}_z corresponden a los desplazamientos de la línea media.

4 EXPRESIONES CINEMÁTICAS

El campo de desplazamientos⁹ (compatible con las hipótesis 1 y 2) se adopta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_x &= u_x^L + u_x^{NL} \\ u_y &= u_y^L + u_y^{NL} \\ u_z &= u_z^L + u_z^{NL} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_x^L = u_o(x) - \theta_z(x) \bar{y}(s, n) - \theta_y(x) \bar{z}(s, n) + \theta(x) \omega(s, n) \\ u_y^L = v(x) - \phi(x) z(s, n) \\ u_z^L = w(x) + \phi(x) y(s, n) \end{cases} \quad (4.a)$$

$$\begin{cases} u_x^{NL} = \frac{1}{2} (\phi(x) \theta_z(x) z(s, n) - \phi(x) \theta_y(x) y(s, n)) \\ u_y^{NL} = \frac{1}{2} (-\phi(x)^2 y(s, n) - \theta_z(x)^2 \bar{y}(s, n) - \theta_y(x) \theta_z(x) \bar{z}(s, n)) \\ u_z^{NL} = \frac{1}{2} (-\phi(x)^2 z(s, n) - \theta_y(x)^2 \bar{z}(s, n) - \theta_y(x) \theta_z(x) \bar{y}(s, n)) \end{cases} \quad (4.b)$$

donde, las componentes θ_z , θ_y , y ϕ pueden interpretarse como rotaciones semitangenciales. En las expresiones anteriores se han utilizado las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \bar{y}(s, n) &= y(s, n) - y_0 \\ \bar{z}(s, n) &= z(s, n) - z_0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\bar{y}(s, n) = \bar{Y}(s) - n \frac{dZ}{ds}, \quad \bar{z}(s, n) = \bar{Z}(s) + n \frac{dY}{ds} \quad (6)$$

$$y(s, n) = Y(s) - n \frac{dZ}{ds}, \quad z(s, n) = Z(s) + n \frac{dY}{ds} \quad (7)$$

La función de alabeo de una sección transversal de pared delgada se define como:

$$\omega(s, n) = \omega_p(s) + \omega_s(s, n) \quad (8)$$

donde, ω_p y ω_s son la función de alabeo del contorno y la función de alabeo del espesor, respectivamente. Ellas son definidas en la forma^{10,11} :

$$\begin{aligned} \omega_p(s) &= \frac{1}{S} \left[\int_0^S \left(\int_{s_0}^s [r(s) - \psi(s)] ds \right) ds \right] - \int_{s_0}^s [r(s) - \psi(s)] ds \\ \omega_s(s, n) &= -n l(s) \end{aligned} \quad (9)$$

donde

$$\begin{aligned} r(s) &= -Z(s) \frac{dY}{ds} + Y(s) \frac{dZ}{ds} \\ l(s) &= Y(s) \frac{dY}{ds} + Z(s) \frac{dZ}{ds} \end{aligned} \quad (10)$$

La función Ψ es la deformación de corte en la línea media, obtenida a partir de la teoría de Saint-Venant de torsión pura para vigas isótropas¹², y normalizadas con respecto a $d\phi/dx$. Siendo $\Psi=0$ para el caso de secciones abiertas.

5 DEFORMACIONES

Los desplazamientos con respecto al sistema curvilíneo (x, s, n) se expresan de la siguiente manera:

$$\bar{U} = u_x(x, s, n) \quad (11)$$

$$\bar{V} = u_y(x, s, n) \frac{dY}{ds} + u_z(x, s, n) \frac{dZ}{ds} \quad (12)$$

$$\bar{W} = -u_y(x, s, n) \frac{dZ}{ds} + u_z(x, s, n) \frac{dY}{ds} \quad (13)$$

El tensor de deformaciones de Green-Lagrange se define como sigue:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (14)$$

$$\varepsilon_{xs} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial s} \right] \quad (15)$$

$$\varepsilon_{xn} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} \right] \quad (16)$$

En el mismo se desprecian las deformaciones correspondientes al término de segundo orden⁶ que involucran al movimiento axial. Sustituyendo las expresiones (3) en (11-13) y luego en (14-16), se obtiene

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^{(0)} + n\kappa_{xx}^{(1)} \\ \gamma_{xs} &= 2\varepsilon_{xs} = \gamma_{xs}^{(0)} + n\kappa_{xs}^{(1)} \\ \gamma_{xn} &= 2\varepsilon_{xn} = \gamma_{xn}^{(0)}\end{aligned}\quad (17)$$

donde

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(0)} &= u'_o + \frac{l}{2} \left[(v'^2 + w'^2) + \phi'^2 (Y^2 + Z^2) \right] - \frac{l}{2} y_0 (\theta_y \phi' + \theta'_y \phi - 2w' \phi') + \frac{l}{2} z_0 (\theta_z \phi' + \theta'_z \phi - 2v' \phi') \\ &+ \bar{Y} \left(-\theta'_z + \phi' w' - \frac{\phi' \theta_y}{2} - \frac{\theta'_y \phi}{2} \right) + \bar{Z} \left(-\theta'_y - v' \phi' + \frac{\theta_z \phi'}{2} + \frac{\theta'_z \phi}{2} \right) + \theta' \omega_p\end{aligned}\quad (18)$$

$$\kappa_{xx}^{(1)} = -\frac{dZ}{ds} \left(-\theta'_z + \phi' w' - \frac{\phi' \theta_y}{2} - \frac{\theta'_y \phi}{2} \right) + \frac{dY}{ds} \left(-\theta'_y - v' \phi' + \frac{\theta_z \phi'}{2} + \frac{\theta'_z \phi}{2} \right) - \theta' l - \phi'^2 r \quad (19)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xs}^{(0)} &= \frac{dY}{ds} \left(v' - \theta_z + w' \phi - \frac{l}{2} \theta_y \phi \right) + \frac{dZ}{ds} \left(w' - \theta_y - v' \phi + \frac{l}{2} \theta_z \phi \right) + (\phi' - \theta)(r - \psi) + \psi \phi' \\ &- \bar{Y} \frac{dY}{ds} \theta_z \theta'_z - \bar{Z} \frac{dZ}{ds} \theta_y \theta'_y - \frac{l}{2} \left(\frac{dZ}{ds} \bar{Y} + \frac{dY}{ds} \bar{Z} \right) (\theta_z \theta'_y + \theta_y \theta'_z)\end{aligned}\quad (20)$$

$$\kappa_{xs}^{(1)} = -2\phi' + \frac{l}{2} \left[\left(\frac{dZ}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dY}{ds} \right)^2 \right] (\theta_z \theta'_y + \theta_y \theta'_z) + \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} (\theta_z \theta'_z - \theta_y \theta'_y) \quad (21)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xn}^{(0)} &= \frac{dY}{ds} \left(w' - \theta_y - v' \phi + \frac{l}{2} \theta_z \phi \right) - \frac{dZ}{ds} \left(v' - \theta_z + w' \phi - \frac{l}{2} \theta_y \phi \right) + (\phi' - \theta)l \\ &+ \frac{l}{2} \left(\bar{Z} \frac{dZ}{ds} - \bar{Y} \frac{dY}{ds} \right) (\theta_z \theta'_y + \theta_y \theta'_z) - \bar{Z} \frac{dY}{ds} \theta_y \theta'_y + \bar{Y} \frac{dZ}{ds} \theta_z \theta'_z\end{aligned}\quad (22)$$

6 ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Las ecuaciones constitutivas de un laminado simétrico balanceado pueden ser expresadas en términos de resultantes de tensión laminares, de la siguiente forma⁷:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{xs} \\ N_{xn} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{55}^{(H)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \gamma_{xs}^{(0)} \\ \gamma_{xn}^{(0)} \\ \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{xs}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \quad , \quad \bar{A}_{66} = A_{66} - \frac{A_{26}^2}{A_{22}} \quad , \quad \bar{A}_{55}^{(H)} = A_{55}^{(H)} - \frac{(A_{45}^{(H)})^2}{A_{44}^{(H)}} \\ \bar{D}_{11} &= D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}} \quad , \quad \bar{D}_{66} = D_{66} - \frac{D_{26}^2}{D_{22}} \end{aligned} \quad (24)$$

donde A_{ij} , D_{ij} y $A_{ij}^{(H)}$ son coeficientes de rigidez definidos de acuerdo a la teoría de laminación presentada en⁷. El coeficiente \bar{D}_{16} ha sido despreciado, debido a su bajo valor por la secuencia de laminación considerada.

6 ESFUERZOS TIPO VIGA

Se define los esfuerzos tipo viga de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} N &= \int N_{xx} ds \quad , \quad M_Y = \int \left(N_{xx} \bar{Z} + M_{xx} \frac{dY}{ds} \right) ds \quad , \quad M_Z = \int \left(N_{xx} \bar{Y} - M_{xx} \frac{dZ}{ds} \right) ds \\ Q_Z &= \int \left(N_{xs} \frac{dZ}{ds} + N_{xn} \frac{dY}{ds} \right) ds \quad , \quad Q_Y = \int \left(N_{xs} \frac{dY}{ds} - N_{xn} \frac{dZ}{ds} \right) ds \\ B &= \int (N_{xx} \omega_p - M_{xx} l) ds \quad , \quad T_W = \int [N_{xs}(r - \psi) + N_{xn} l] ds \quad , \quad T_{SV} = \int (N_{xs} \psi - 2M_{xs}) ds \end{aligned} \quad (25)$$

Los parámetros que se encuentran en las ecuaciones (25) tienen el siguiente significado: el esfuerzo normal (N), los esfuerzos de corte (Q_y y Q_z), los momentos flectores (M_y y M_z), el bimomento (B), el momento torsor de Saint-Venant (T_{sv}), el momento flexotorsor (T_w). También han surgido otras resultantes generalizadas de alto orden: B_1 , T_1 , T_2 , T_3 carentes de significado físico simple. Estas son las siguientes:

$$\begin{aligned} B_1 &= \int [N_{xx}(Y^2 + Z^2) - 2M_{xx}r] ds \\ T_1 &= \int \left[-N_{xn} \bar{Z} \frac{dY}{ds} - N_{xs} \bar{Z} \frac{dY}{ds} - M_{xs} \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} \right] ds \\ T_2 &= \int \left[-N_{xs} \left(\bar{Z} \frac{dY}{ds} + \bar{Y} \frac{dZ}{ds} \right) + N_{xn} \left(\bar{Z} \frac{dZ}{ds} - \bar{Y} \frac{dY}{ds} \right) + M_{xs} \left(\frac{dZ^2}{ds} - \frac{dY^2}{ds} \right) \right] ds \\ T_3 &= \int \left[-N_{xs} \bar{Y} \frac{dY}{ds} + N_{xn} \bar{Y} \frac{dZ}{ds} + M_{xs} \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} \right] ds \end{aligned} \quad (26)$$

donde la integración se realiza sobre el total de la longitud de la línea media del contorno. Las deformaciones generalizadas correspondientes a los esfuerzos definidos anteriormente, pueden identificarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \text{Correspondiente a } N : & \quad u'_o + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) - \frac{1}{2}y_0(\theta_y \phi' + \theta'_y \phi - 2w' \phi') + \frac{1}{2}z_0(\theta_z \phi' + \theta'_z \phi - 2v' \phi') \\
 \text{Correspondiente a } M_y : & \quad -\theta'_y - v' \phi' + \frac{\theta_z \phi'}{2} + \frac{\theta'_z \phi}{2} \\
 \text{Correspondiente a } M_z : & \quad -\theta'_z + \phi' w' - \frac{\phi' \theta_y}{2} - \frac{\theta'_y \phi}{2} \\
 \text{Correspondiente a } B : & \quad \theta' \\
 \text{Correspondiente a } Q_y : & \quad v' - \theta_z + w' \phi - \frac{1}{2} \theta_y \phi \\
 \text{Correspondiente a } Q_z : & \quad w' - \theta_y - v' \phi + \frac{1}{2} \theta_z \phi \\
 \text{Correspondiente a } T_w : & \quad \phi' - \theta \\
 \text{Correspondiente a } T_{sv} : & \quad \phi' \\
 \text{Correspondiente a } B_I : & \quad \frac{\phi'^2}{2} \\
 \text{Correspondiente a } T_1 : & \quad \theta_y \theta'_y \\
 \text{Correspondiente a } T_2 : & \quad \frac{1}{2}(\theta_z \theta'_y + \theta_y \theta'_z) \\
 \text{Correspondiente a } T_3 : & \quad \theta_z \theta'_z
 \end{aligned} \tag{27}$$

Las relaciones entre los esfuerzos tipo viga y las deformaciones generalizadas determinan el comportamiento de la viga. Reemplazando las expresiones (18-22) en las ecuaciones constitutivas para las resultantes de tensión laminares (23) y reemplazando en (25) y (26), se obtienen las relaciones constitutivas entre los esfuerzos de la viga y las deformaciones generalizadas. En el apéndice I se define la ley constitutiva en términos de la matriz de rigidez de la viga.

7 ECUACIONES DE MOVIMIENTO Y CONDICIONES DE BORDE

Sustituyendo las expresiones (3) y (18-22) en (1) e integrando con respecto a s , se obtiene la siguiente expresión unidimensional para el trabajo virtual:

$$L_K + L_P = 0 \tag{28}$$

donde

$$\begin{aligned}
 L_K = \int_0^L & \left\{ \delta u'_0 N + \delta \theta_z \left(-Q_y + Q_z \frac{\phi}{2} + (M_y + N z_0) \frac{\phi'}{2} + \theta'_y \frac{T_2}{2} + \theta'_z T_3 \right) \right. \\
 & + \delta \theta'_z \left(-M_z + (M_y + N z_0) \frac{\phi}{2} + \theta_y \frac{T_2}{2} + \theta_z T_3 \right) + \delta v' (Q_y - Q_z \phi + v' N - (M_y + N z_0) \phi') \\
 & + \delta \theta_y \left(-Q_z - Q_y \frac{\phi}{2} - (M_z + N y_0) \frac{\phi'}{2} + \theta'_y T_1 + \theta'_z \frac{T_2}{2} \right) \\
 & + \delta \theta'_y \left(-M_y - (M_z + N y_0) \frac{\phi}{2} + \theta_y T_1 + \theta_z \frac{T_2}{2} \right) + \delta w' (Q_z + Q_y \phi + w' N + (M_z + N y_0) \phi') \\
 & + \delta \phi' \left(T_w + T_{sv} - (M_z + N y_0) \frac{\theta_y}{2} + (M_y + N z_0) \frac{\theta_z}{2} - (M_y + N z_0) v' + (M_z + N y_0) w' + \phi' B_1 \right) \\
 & \left. + \delta \phi \left(-Q_y \left(\frac{\theta_y}{2} + w' \right) + Q_z \left(\frac{\theta_z}{2} - v' \right) - (M_z + N y_0) \frac{\theta'_y}{2} + (M_y + N z_0) \frac{\theta'_z}{2} + \delta \theta' B - \delta \theta T_w \right) \right\} dx
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 L_P = \int_0^L & \left[-q_x \delta u_0 - q_y \delta v - q_z \delta w - b \delta \theta + \delta \theta_z \left(m_z - m_{y1} \frac{\phi}{2} + \lambda_y \theta_z + \lambda_{mx} \frac{\theta_y}{2} \right) \right. \\
 & + \delta \theta_y \left(m_y + m_{z1} \frac{\phi}{2} + \lambda_z \theta_y + \lambda_{mx} \frac{\theta_z}{2} \right) + \delta \phi \left(-m_x - m_{y1} \frac{\theta_z}{2} + m_{z1} \frac{\theta_y}{2} + \lambda_{yz} \phi \right) \Big] dx \\
 & + \left[-\bar{N} \delta u_0 - \bar{Q}_y \delta v - \bar{Q}_z \delta w - \bar{B} \delta \theta + \delta \theta_z \left(\bar{M}_z - \frac{\phi}{2} (\bar{M}_y + \bar{N} z_0) + \bar{\lambda}_y \theta_z + \bar{\lambda}_{mx} \frac{\theta_y}{2} \right) \right. \\
 & \left. + \delta \theta_y \left(\bar{M}_y + (\bar{M}_z + \bar{N} y_0) \frac{\phi}{2} + \bar{\lambda}_z \theta_y + \bar{\lambda}_{mx} \frac{\theta_z}{2} \right) + \delta \phi \left(-\bar{M}_x - \frac{\theta_z}{2} (\bar{M}_y + \bar{N} z_0) + \frac{\theta_y}{2} (\bar{M}_z + \bar{N} y_0) + \bar{B}_1 \phi \right) \right] \Bigg]_{x=0}^{x=L}
 \end{aligned} \tag{30}$$

Tomando variaciones con respecto a los desplazamientos generalizados u_0 , θ_z , v , θ_y , w , θ , ϕ como se indica en las ecuaciones (29) y (30), se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$-N' = q_x \tag{31}$$

$$M'_z - Q_y - \frac{\phi}{2} (M_y + N z_0)' - \theta_z T'_3 - \theta_y \frac{T'_2}{2} + \phi \frac{Q_z}{2} = -m_z + m_{y1} \frac{\phi}{2} - \lambda_y \theta_z - \lambda_{mx} \frac{\theta_y}{2} \tag{32}$$

$$- [Q_y - \phi' (M_y + N z_0) - Q_z \phi + N v'] = q_y \tag{33}$$

$$M'_y - Q_z + \frac{\phi}{2} (M_z + N y_0)' - \theta_y T'_1 - \frac{\theta_z}{2} T'_2 - \frac{\phi}{2} Q_y = -m_y - m_{z1} \frac{\phi}{2} - \lambda_z \theta_y - \lambda_{mx} \frac{\theta_z}{2} \tag{34}$$

$$- [Q_z + \phi' (M_z + N y_0) + Q_y \phi + N w'] = q_z \tag{35}$$

$$-B' - T_w = b \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & -[T_w + T_{sv}]' + \frac{\theta_y}{2} [(M_z + N y_0)' - Q_y] - \frac{\theta_z}{2} [(M_y + N z_0)' - Q_z] + w' Q_y - v' Q_z \\ & - [\phi' B_1 - v' (M_y + N z_0) + w' (M_z + N y_0)] = m_x + m_{y1} \frac{\theta_z}{2} - m_{z1} \frac{\theta_y}{2} - \lambda_{yz} \phi \end{aligned} \quad (37)$$

con las siguientes condiciones de contorno (en $x = 0, L$)

$$N - \bar{N} = 0 \quad \text{ó} \quad \delta u_0 = 0 \quad (38)$$

$$-M_z + \frac{\phi}{2} (M_y + N z_0) + \theta_z T_3 + \theta_y \frac{T_2}{2} + \bar{M}_z - \frac{\phi}{2} (\bar{M}_y + \bar{N} z_0) + \bar{\lambda}_y \theta_z + \bar{\lambda}_{mx} \frac{\theta_y}{2} = 0 \quad \text{ó} \quad \delta \theta_z = 0 \quad (39)$$

$$Q_y - \phi' (M_y + N z_0) - \phi Q_z + v' N - \bar{Q}_y = 0 \quad \text{ó} \quad \delta v = 0 \quad (40)$$

$$-M_y - \frac{\phi}{2} (M_z + N y_0) + \theta_z \frac{T_2}{2} + \theta_y T_1 + \bar{M}_y + \frac{\phi}{2} (\bar{M}_z + \bar{N} y_0) + \bar{\lambda}_z \theta_y + \bar{\lambda}_{mx} \frac{\theta_z}{2} = 0 \quad \text{ó} \quad \delta \theta_y = 0 \quad (41)$$

$$Q_z + \phi' (M_z + N y_0) + \phi Q_y + w' N - \bar{Q}_z = 0 \quad \text{ó} \quad \delta w = 0 \quad (42)$$

$$B - \bar{B} = 0 \quad \text{ó} \quad \delta \theta = 0 \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & T_w + T_{sv} - \frac{\theta_y}{2} (M_z + N y_0) + \frac{\theta_z}{2} (M_y + N z_0) + \phi' B_1 - v' (M_y + N z_0) + w' (M_z + N y_0) \\ & - \bar{M}_x - \frac{\theta_z}{2} (\bar{M}_y + \bar{N} z_0) + \frac{\theta_y}{2} (\bar{M}_z + \bar{N} y_0) + \bar{B}_1 \phi = 0 \quad \text{ó} \quad \delta \phi = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

donde $(q_x, q_y, q_z, m_x, m_y, m_z, m_{y1}, m_{z1}, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_{mx}, \lambda_{yz})$ representan las resultantes de las fuerzas aplicadas en la viga, y se encuentran definidas en el Apéndice II. De igual forma $(\bar{N}, \bar{Q}_y, \bar{Q}_z, \bar{M}_z, \bar{M}_y, \bar{B}, \bar{M}_x, \bar{\lambda}_y, \bar{\lambda}_z, \bar{\lambda}_{mx}, \bar{B}_1)$ se encuentran definidos en el Apéndice II y representan las resultantes de las fuerzas aplicadas en los extremos de la viga

8 ANALISIS DE POS-PANDEO DE UNA VIGA I SIMPLEMENTE APOYADA

Con el propósito de analizar el problema de post-pandeo de una viga I (abierta) de pared delgada, se considera que la misma se encuentra simplemente apoyada y con una carga distribuida aplicada en tres diferentes posiciones: a.- en la parte superior del ala, b.- en el centro de corte y c.- en la parte inferior del ala de la viga (figura 2).

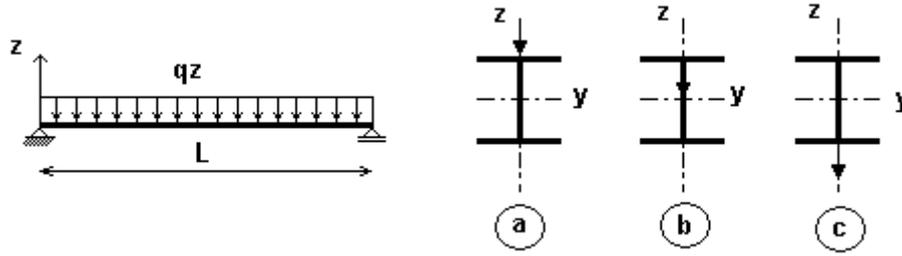


Figura 2: Diferentes estados de carga

A continuación se describe el procedimiento adoptado en el cálculo tanto de las cargas críticas de pandeo como en el análisis de camino de equilibrio de pos-pandeo.

En primer lugar se reemplaza los esfuerzos tipo viga en las ecuaciones de equilibrio (32-37). De la ecuación (31) se obtiene que el esfuerzo normal es igual a cero. Luego para resolver este sistema diferencial no-lineal, se aplica el método aproximado de Galerkin donde se reemplaza a los desplazamientos por funciones aproximados (45) que cumplen con las condiciones de borde.

$$\begin{aligned}
 v &= v_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L} x\right) & , & & \theta_z &= \theta_{z0} \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) \\
 w &= w_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L} x\right) & , & & \theta_y &= \theta_{y0} \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) \\
 \phi &= \phi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L} x\right) & , & & \theta &= \theta_0 \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right)
 \end{aligned} \tag{45}$$

donde $v_0, \theta_{z0}, w_0, \theta_{y0}, \phi_0, \theta_0$ representan las amplitudes asociadas a los desplazamientos. De esta manera, realizando algunos cálculos de integración se obtienen las seis ecuaciones de equilibrio algebraicas fuertemente no-lineales y totalmente acopladas. Para el estudio del comportamiento no-lineal se calcula la matriz tangente para ser utilizada con un procedimiento basado en el algoritmo de Newton-Raphson.

8.1 Cálculo de cargas críticas de pandeo

En el estudio de las cargas críticas de pandeo, el momento flector máximo generado por la carga distribuida q_z viene dado por M_0 (46). Cuando se aplica la carga q_z o el momento flector equivalente M_0 , la viga se mueve verticalmente (dirección z), lo cual corresponde al estado de pre-pandeo, también llamado *estado fundamental*.

$$M_0 = \frac{q_z L^2}{8} \tag{46}$$

Cuando la carga de pandeo es alcanzada, el comportamiento de la viga es flexional-torsional. Las componentes del desplazamiento en el *estado fundamental* son de la siguiente forma:

$$\{v_0, \theta_{z0}, w_0, \theta_{y0}, \phi_0, \theta_0\}^T = \{0, 0, w_0, \theta_{y0}, 0, 0\} \tag{47}$$

Para el cálculo del momento crítico de pandeo se obtiene en primer lugar w_0 , y $\theta_{y,0}$ a partir de las ecuaciones de equilibrio linealizadas (y discretizadas) correspondientes a la dirección de carga (z). Los valores hallados son posteriormente introducidos en la ecuación determinante que surge de eliminar de la matriz tangente, evaluada en el *estado fundamental*, las filas correspondientes a la dirección de carga previamente analizada. Resolviendo dicha ecuación se obtiene el momento crítico. De esta manera, se han considerado implícitamente los desplazamientos de pre-pandeo para la obtención de dicho valor crítico M_0 . Este procedimiento difiere del cálculo linealizado del momento crítico de pandeo lateral.

9 APLICACIONES Y RESULTADOS NUMÉRICOS

La aplicación está orientada a determinar la importancia de los diferentes estados de carga, las diferentes secuencias de laminación, la influencia del pre-pandeo sobre la carga crítica y los estados de equilibrio en el pos-pandeo.

Con el fin de evaluar el comportamiento no-lineal del miembro estructural analizado, se considera una viga I de pared delgada con las siguientes características: $h = 0.6$ m, $b = 0.6$ m, $e = 0.03$ m y $L = 6$ m (ver figura 3). El material es grafito-epoxy (AS4/3501) cuyas propiedades son: $E_1 = 144$ GPa, $E_2 = 9.65$ GPa, $G_{12} = 4.14$ GPa, $G_{13} = 4.14$ GPa, $G_{23} = 3.45$ GPa, $\nu_{12} = 0.3$, $\nu_{13} = 0.3$, $\nu_{23} = 0.5$, $\rho = 1389$ kg/m³. La secuencia de laminación considerada son $\{0/0/0/0\}$ y $\{0/90/90/0\}$.

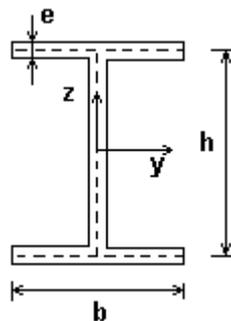


Figura 3. Sección transversal analizada

9.1 Influencia del pre-pandeo sobre el cálculo de cargas críticas de pandeo

En el estudio de las cargas críticas de pandeo se realizaron cálculos para los tres estados de carga variando el tipo de laminación y la longitud de la viga. En la tabla 1 se observan los valores de carga crítica de pandeo para una longitud de viga de 12 metros, considerando dos casos de análisis. Caso I corresponde a los valores de carga crítica M_0 teniendo en cuenta la deformación de pre-pandeo (procedimiento explicado en la sección 8.1). Caso II corresponde a los valores de M_0 hallados a partir de la teoría de estabilidad lineal^{13,14}, sin considerar la deflexión de pre-pandeo.

Tabla 1: Cargas críticas de pandeo $M_0 \times 10^6$ (en Nm), para una longitud de 12m.

Secuencia de laminación →	{0/0/0/0}		{0/90/90/0}	
Estado de carga	Caso I	Caso II	Caso I	Caso II
a (parte superior)	2.84	2.49	1.63	1.37
b (centro de corte)	5.21	4.02	2.98	2.14
c (parte inferior)	9.55	6.49	5.45	3.33

De la tabla 1 se observa que las cargas críticas de pandeo calculados de la teoría lineal (Caso II) son conservativas comparadas con aquellas provenientes del cálculo no-lineal (Caso I).

Tabla 2: Cargas críticas de pandeo $M_0 \times 10^6$ (en Nm), para una longitud de 6m.

Secuencia de laminación →	{0/0/0/0}		{0/90/90/0}	
Estado de carga	Caso I	Caso II	Caso I	Caso II
a (parte superior)	10.10	8.80	5.70	5.05
b (centro de corte)	20.06	14.87	10.75	8.38
c (parte inferior)	39.90	25.13	20.32	13.92

En la tabla 2 y 3 se encuentran los valores de carga crítica de pandeo para una longitud de viga de 6 y 4 metros, respectivamente. La importancia del efecto de pre-pandeo es superior a medida que disminuye la longitud de la viga. También notamos que la secuencia de laminación {0/0/0/0} presenta mayor resistencia al pandeo que la secuencia de laminación {0/90/90/0}.

Tabla 3: Cargas críticas de pandeo $M_0 \times 10^6$ (en Nm), para una longitud de 4m.

Secuencia de laminación →	{0/0/0/0}		{0/90/90/0}	
Estado de carga	Caso I	Caso II	Caso I	Caso II
a (parte superior)	22.12	16.93	12.06	10.25
b (centro de corte)	64.08	29.62	25.11	17.43
c (parte inferior)	196.17	51.84	52.76	29.64

Finalmente, el punto de bifurcación depende sobre la altura donde el parámetro de carga es aplicado. El ejemplo considerado muestra que la resistencia al pandeo lateral es mayor cuando la carga es aplicada en el ala inferior (c) de la viga I. Se puede observar que por esta razón los momentos de pandeo de la viga son mas importantes cuando la carga se encuentra sobre la parte inferior del ala que cuando la misma se halla sobre la parte superior de la misma.

9.2 Comportamiento de pos-pandeo

Se grafica el camino de equilibrio de pos-pandeo en la figuras 4, 5, 6 y 7 para los desplazamientos v_0 , θ_{z0} , ϕ_0 y θ_0 respectivamente, en función del momento crítico M_0 , para una longitud de viga de 6 metros y una secuencia de laminación {0/0/0/0}. Del mismo se observa que las bifurcaciones coinciden con aquellos valores críticos hallados en el caso I (tabla 2).

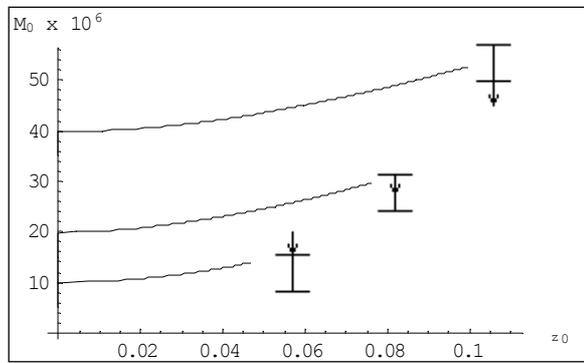
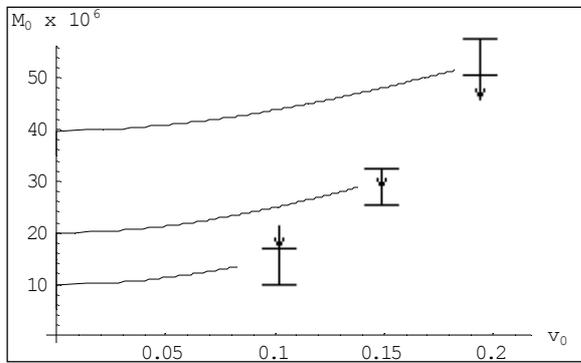


Figura 4: Camino de equilibrio de pos-pandeo de v_0 . Figura 5: Camino de equilibrio de pos-pandeo de θz_0

Los caminos de equilibrio de pos-pandeo calculados son estables y son similares para las distintas longitudes como así también para las distintas secuencias de laminación. Por tal motivo no son presentados todos los gráficos en el presente trabajo.

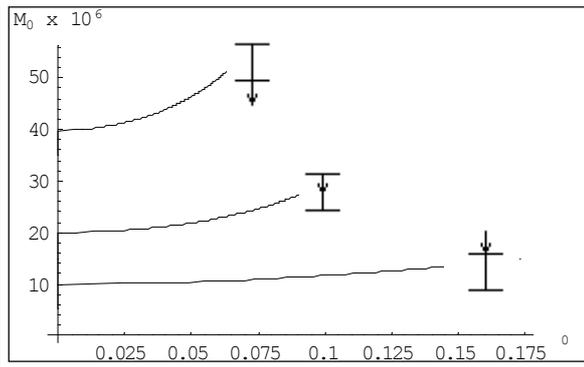
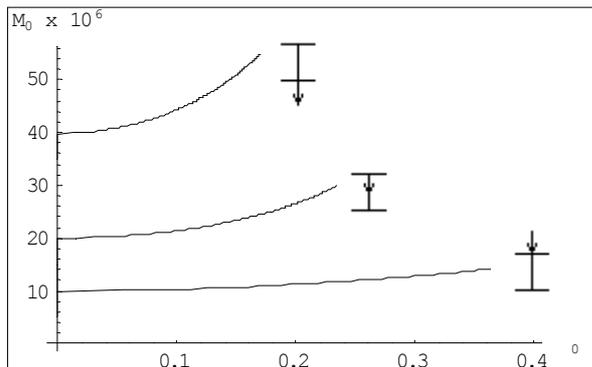


Figura 6: Camino de equilibrio de pos-pandeo de ϕ_0 . Figura 7: Camino de equilibrio de pos-pandeo de θ_0 .

En general puede notarse que la estructura presenta una capacidad de carga remanente de pos-pandeo mayor cuando la carga se encuentra ubicada en la parte inferior de la viga (c). Cuando la carga distribuida se halla en la parte superior de la viga (a), la capacidad de carga luego del pandeo es de escasa aplicabilidad debido a la rapidez de crecimiento de los desplazamientos.

9 CONCLUSIONES

En este artículo se desarrolló una teoría no lineal para vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos. Las ecuaciones de equilibrio se dedujeron en el contexto de grandes desplazamientos y teniendo en cuenta flexibilidad por corte tanto en la flexión como en el alabeo torsional. La misma puede ser utilizada para vigas de sección transversal

arbitraria y diferentes secuencias de laminación simétrica balanceada. Este modelo permitió el estudio de cargas críticas de pandeo y pos-pandeo lateral de vigas. Se determinó la gran influencia de la deflexión de pre-pandeo sobre las cargas de pandeo para una viga I simplemente apoyada. También se estableció la alta dependencia de las cargas de pandeo sobre la ubicación de la carga distribuida. Por último, se utilizó un método basado en el algoritmo de Newton-Raphson en la determinación de los caminos de equilibrio de pos-pandeo. Verificando la coincidencia con los puntos de bifurcación hallados en el análisis no lineal de pre-pandeo.

11 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue realizado gracias a Secretaría de Ciencia y Tecnología, Universidad Tecnológica Nacional, y al CONICET.

12 REFERENCIAS

- [1] V. Vlasov, *Thin Walled Elastic Beams*, Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation, (1961).
- [2] G.I Ioannidis, A.N. Kounadis, "Flexural-torsional postbuckling analysis of centrally compressed bars with open thin-walled cross-section", *Engineering Structures*, 21, 55-61 (1999).
- [3] A.N. Kounadis y G.I Ioannidis, "Lateral Postbuckling Analysis of Beam Columns", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, 4, 695-706 (1994).
- [4] F. Mohri, L. Azrar y M. Potier-Ferry, "Flexural-torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections", *Thin Walled Structures*, Vol. 39, 907-938 (2001).
- [5] F. Mohri, L. Azrar y M. Potier-Ferry, "Lateral post-buckling analysis of thin-walled open sections beams", *Thin Walled Structures*, Vol. 40, 1013-1036 (2002).
- [6] K. Bhaskar y L. Librescu, "A Geometrically Non-Linear Theory for Laminated Anisotropic Thin-Walled Beams", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 33, 9, 1331-1344 (1995).
- [7] E.J. Barbero, *Introduction to Composite Material Design*. Taylor and Francis Inc, (1999).
- [8] K. Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, (1968).
- [9] M-Y Kim, B-C Min y M-W Suh, "Spatial Stability of Nonsymmetric Thin-Walled Curved Beams. I: Analytical Approach", *Journal of Engineering Mechanics*, 126, 497-505 (2000).
- [10] V.H. Cortínez y R.E. Rossi, "Dynamics of shear deformable thin-walled open beams subjected to initial stresses", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 14, 3, 293-316 (1998).
- [11] V. H. Cortínez, S. P. Machado y M.T. Piovan, "Post-Pandeo de Vigas Compuestas de Pared Delgada", *First South-American Congress on Computational Mechanics (MECOM 2002)*, 1713-1729 (2002).
- [12] S. Krenk y O. Gunneskov, "Statics of Thin-Walled Pretwisted Beams", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 1407-1426 (1981).

- [13] V.H. Cortínez y M.T. Piovan, “Vibration and Buckling of Composite Thin-Walled Beams with Shear Deformability”, *Journal of Sound and Vibration*, 258(4), 701-723, (2002).
- [14] S.P. Timoshenko y J.M. Gere, *Theory of elastic structures*. McGraw-Hill, New York (1961).

APENDICE I

La relación constitutiva entre los esfuerzos viga generalizados y las deformaciones generalizadas puede expresarse:

$$\{f_g\} = [K]\{\Delta\} \quad (\text{A.I.1})$$

$$\{f_g\} = [N \quad M_y \quad M_z \quad B \quad Q_y \quad Q_z \quad T_w \quad T_{sv} \quad B_1 \quad T_1 \quad T_2 \quad T_3]^T \quad (\text{A.I.2})$$

donde $\{f_g\}$ es el vector de esfuerzos viga generalizados, $\{\Delta\}$ el vector de deformaciones generalizadas definido en la sección 6 y arreglado en el correspondiente orden de acuerdo a los elementos de $\{f_g\}$, $[K]$ es una matriz simétrica de 12 x 12 cuyo elementos están representados por las siguientes integrales curvilíneas (los elementos no presentados a continuación son nulos):

$$\begin{aligned} K_{1,1} &= \bar{A}_{11} \int ds, & K_{1,9} &= \bar{A}_{11} \int (Y^2 + Z^2) ds \\ K_{2,2} &= \bar{A}_{11} \int Z^2 ds + \bar{D}_{11} \int Y'^2 ds, & K_{2,9} &= \bar{A}_{11} \int \bar{Z}(Y^2 + Z^2) ds - 2\bar{D}_{11} \int r Y' ds \\ K_{3,3} &= \bar{A}_{11} \int Y^2 ds + \bar{D}_{11} \int Z'^2 ds, & K_{3,9} &= \bar{A}_{11} \int \bar{Y}(Y^2 + Z^2) ds + 2\bar{D}_{11} \int r Z' ds \\ K_{4,4} &= \bar{A}_{11} \int \omega_p^2 ds + \bar{D}_{11} \int l^2 ds, & K_{4,9} &= \bar{A}_{11} \int \omega_p (Y^2 + Z^2) ds + 2\bar{D}_{11} \int r l ds \\ K_{5,5} &= \bar{A}_{55} \int Z'^2 ds + \bar{A}_{66} \int Y'^2 ds, & K_{5,6} &= (\bar{A}_{66} - \bar{A}_{55}) \int Z' Y' ds \\ K_{5,7} &= \bar{A}_{66} \int Y' (r - \psi) ds - \bar{A}_{55} \int Z' l ds, & K_{5,8} &= \bar{A}_{66} \int \psi Y' ds \\ K_{5,10} &= (\bar{A}_{55} - \bar{A}_{66}) \int Y' Z \bar{Z} ds, & K_{5,11} &= -\bar{A}_{66} \int Y' (\bar{Z} Y' + \bar{Y} Z') ds - \bar{A}_{55} \int Z' (\bar{Z} Z' - \bar{Y} Y') ds \\ K_{5,12} &= -\bar{A}_{66} \int Y'^2 \bar{Y} ds - \bar{A}_{55} \int Z'^2 \bar{Y} ds, & K_{6,6} &= \bar{A}_{55} \int Y'^2 ds + \bar{A}_{66} \int Z'^2 ds \\ K_{6,7} &= \bar{A}_{66} \int Z' (r - \psi) ds + \bar{A}_{55} \int Y' l ds, & K_{6,8} &= \bar{A}_{66} \int \psi Z' ds \\ K_{6,10} &= -\bar{A}_{66} \int \bar{Z} Z'^2 ds - \bar{A}_{55} \int Y'^2 \bar{Z} ds, & K_{6,11} &= -\bar{A}_{66} \int Z' (\bar{Z} Y' + \bar{Y} Z') ds + \bar{A}_{55} \int Y' (\bar{Z} Z' - \bar{Y} Y') ds \\ K_{6,12} &= (\bar{A}_{55} - \bar{A}_{66}) \int Z' Y \bar{Y} ds, & K_{7,7} &= \bar{A}_{66} \int (r - \psi)^2 ds + \bar{A}_{55} \int l^2 ds \\ K_{7,8} &= \bar{A}_{66} \int \psi (r - \psi) ds, & K_{7,11} &= -\bar{A}_{66} \int (r - \psi) (\bar{Z} Y' + \bar{Y} Z') ds + \bar{A}_{55} \int l (\bar{Z} Z' - \bar{Y} Y') ds \\ K_{7,10} &= -\bar{A}_{66} \int (r - \psi) \bar{Z} Z' ds - \bar{A}_{55} \int l \bar{Z} Y' ds, & K_{7,12} &= -\bar{A}_{66} \int (r - \psi) Y \bar{Y} ds + \bar{A}_{55} \int l \bar{Y} Z' ds \\ K_{8,8} &= \bar{A}_{66} \int \psi^2 ds + 4\bar{D}_{66} \int ds, & K_{8,11} &= -\bar{A}_{66} \int \psi (\bar{Z} Y' + \bar{Y} Z') ds - 2\bar{D}_{66} \int (Z'^2 - Y'^2) ds \\ K_{8,10} &= -\bar{A}_{66} \int \psi \bar{Z} Z' ds + 2\bar{D}_{66} \int Y' Z' ds, & K_{8,12} &= -\bar{A}_{66} \int \psi Y \bar{Y} ds - 2\bar{D}_{66} \int Y' Z' ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{9,9} &= \bar{A}_{11} \int (Y^2 + Z^2)^2 ds + 4\bar{D}_{11} \int r^2 ds \\
 K_{10,10} &= \bar{A}_{66} \int \bar{Z}^2 Z'^2 ds + \bar{A}_{55} \int \bar{Z}^2 Y'^2 ds + \bar{D}_{66} \int Z'^2 Y'^2 ds \\
 K_{10,11} &= \bar{A}_{66} \int \bar{Z} Z' (\bar{Z} Y' + \bar{Y} Z') ds - \bar{A}_{55} \int \bar{Z} Y' (\bar{Z} Z' - \bar{Y} Y') ds - \bar{D}_{66} \int Y Z' (Z'^2 - Y'^2) ds \\
 K_{10,12} &= (\bar{A}_{66} - \bar{A}_{55}) \int \bar{Z} \bar{Y} Z' Y' ds - \bar{D}_{66} \int Y'^2 Z'^2 ds \\
 K_{11,11} &= \bar{A}_{66} \int (\bar{Z} Y' + \bar{Y} Z')^2 ds + \bar{A}_{55} \int (\bar{Z} Z' - \bar{Y} Y')^2 ds + \bar{D}_{66} \int (Z'^2 - Y'^2)^2 ds \\
 K_{11,12} &= \bar{A}_{66} \int (\bar{Z} Y' + \bar{Y} Z') \bar{Y} Y' ds + \bar{A}_{55} \int (\bar{Z} Z' - \bar{Y} Y') \bar{Y} Z' ds + \bar{D}_{66} \int (Z'^2 - Y'^2) Y' Z' ds \\
 K_{12,12} &= \bar{A}_{66} \int \bar{Y}^2 Y'^2 ds + \bar{A}_{55} \int \bar{Y}^2 Z'^2 ds + \bar{D}_{66} \int Y'^2 Z'^2 ds
 \end{aligned} \tag{A.I.3}$$

APENDICE II

Las resultantes de las fuerzas aplicadas a la viga, que aparecen en la ecuación (30), se definen como sigue:

$$\begin{aligned}
 q_x &= \int \bar{q}_x ds + \iint \bar{f}_x ds dn & , & & q_y &= \int \bar{q}_y ds + \iint \bar{f}_y ds dn \\
 q_z &= \int \bar{q}_z ds + \iint \bar{f}_z ds dn & , & & b &= \int \bar{q}_x \omega_p ds + \iint \bar{f}_x \omega ds dn \\
 m_z &= \int \bar{q}_x \bar{Y} ds + \iint \bar{f}_x \bar{y} ds dn & , & & m_y &= \int \bar{q}_x \bar{Z} ds + \iint \bar{f}_x \bar{z} ds dn \\
 m_x &= \int (\bar{q}_z \bar{Y} - \bar{q}_y \bar{Z}) ds + \iint (\bar{f}_z \bar{y} - \bar{f}_y \bar{z}) ds dn + q_z y_0 - q_y z_0 \\
 m_{y1} &= m_y + q_x z_0 & , & & m_{z1} &= m_z + q_x y_0 \\
 \lambda_y &= \int \bar{q}_y \bar{Y} ds + \iint \bar{f}_y \bar{y} ds dn & , & & \lambda_z &= \int \bar{q}_z \bar{Z} ds + \iint \bar{f}_z \bar{z} ds dn \\
 \lambda_{mx} &= \int (\bar{q}_y \bar{Z} + \bar{q}_z \bar{Y}) ds + \iint (\bar{f}_y \bar{z} + \bar{f}_z \bar{y}) ds dn \\
 \lambda_{yz} &= \lambda_y + \lambda_z + q_y y_0 + q_z z_0
 \end{aligned} \tag{A.II.1}$$

Las resultantes de las fuerzas aplicadas en los extremos de la viga, que aparecen en la ecuación (30), son:

$$\begin{aligned}
 \bar{N} &= \iint \bar{p}_x ds dn & , & & \bar{Q}_y &= \iint \bar{p}_y ds dn \\
 \bar{Q}_z &= \iint \bar{p}_z ds dn & , & & \bar{M}_z &= \iint \bar{p}_x \bar{y} ds dn \\
 \bar{M}_y &= \iint \bar{p}_x \bar{z} ds dn & , & & \bar{B} &= \iint \bar{p}_x \omega ds dn \\
 \bar{M}_x &= \iint (\bar{p}_z (\bar{y} + y_0) - \bar{p}_y (\bar{z} + z_0)) ds dn \\
 \bar{\lambda}_y &= \iint \bar{p}_y \bar{y} ds dn & , & & \bar{\lambda}_z &= \iint \bar{p}_z \bar{z} ds dn \\
 \bar{\lambda}_{mx} &= \iint (\bar{p}_y \bar{z} + \bar{p}_z \bar{y}) ds dn \\
 \bar{B}_1 &= \iint (\bar{p}_y (\bar{y} + y_0) + \bar{p}_z (\bar{z} + z_0)) ds dn
 \end{aligned} \tag{A.II.2}$$