

OTIMIZAÇÃO SIMULTÂNEA DE CONTROLE E POSIÇÃO DE ATUADORES E SENSORES APLICADA À MANIPULADORES ROBÓTICOS COM ELEMENTOS FLEXÍVEIS

Valdecir Bottega [†], Jun S. O. Fonseca [‡]

[†] Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica-Promec, Universidade Federal do Rio Grande do Sul-UFRGS, Porto Alegre, RS,
Centro Universitário La Salle-UNILASALLE, Canoas, RS
CCET/DEME, Universidade de Caxias do Sul-UCS, Caxias do Sul, RS, Brasil.
e-mail bottega@redemeta.com.br

[‡] Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica-Promec, Universidade Federal do Rio Grande do Sul-UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil.
e-mail jun@ufrgs.br

Palavras Chave: Controle robusto, Piezelétrico, Estabilidade assintótica.

Resumo. Neste trabalho, propõe-se um modelo de controle de trajetória para um manipulador constituído de braços flexíveis com atuadores e sensores piezoelétricos. O modelo dinâmico do manipulador é obtido de forma fechada, através da formulação de Lagrange. O controle utiliza o torque dos motores como atuadores para controle da trajetória do ângulo das juntas e também para atenuar as vibrações de baixa frequência induzidas nos braços do manipulador. A estabilidade deste controlador é garantida pela teoria de estabilidade de Lyapunov. Atuadores e sensores piezoelétricos são adicionados para controlar as vibrações de alta frequência não alcançadas pelo controle de torque dos motores. Além disso, uma otimização simultânea do controle e dos atuadores e sensores foi obtida através da maximização da energia dissipada no sistema devido à ação do controle, com otimização do posicionamento e tamanho dos atuadores e sensores piezoelétricos na estrutura. Simulações foram feitas através do Matlab/Simulink para verificar a eficiência do modelo de controle.

1. Introdução

Projetos de manipuladores, caracterizados por flexibilidade nos elementos, exigem ações de controle que incluam a interação do controle do ângulo das juntas e controle dos modos elásticos. Tarefa complicada, devido ao fato de manipuladores robóticos serem caracterizados por variações nos parâmetros, como carga, torques e fricções nas juntas ⁴.

O projeto de controle de um robô com elementos flexíveis é constituído por duas fases: uma ação de controle robusto de posição, atuando no ângulo das juntas e um estabilizador para controlar as oscilações elásticas, induzidas pela ação de controle anterior.

Sistemas robóticos podem ser considerados lineares com respeito a um conjunto de parâmetros, tais como massa, momentos de inércia e fatores de amortecimento, porém não são lineares com respeito ao estado. Por isso, uma lei de controle de posição deve ser definida assegurando uma conveniente estabilidade assintótica do erro de trajetória, obtida através de funções de Lyapunov e do princípio de La Salle ¹.

Um estabilizador é obtido com base em um modelo linearizado sobre o estado estacionário do sistema para controlar as oscilações elásticas dos elementos. No entanto, os modos de alta frequência não podem ser eliminados pela ação dos motores, pois as vibrações de alta frequência têm período menor do que o período do sistema de controle. Assim, o controle das vibrações de alta frequência deve usar atuadores de alta frequência, como atuadores piezelétricos.

Do ponto de vista estrutural, os manipuladores robóticos não primam pela utilização das ferramentas mais adequadas de projeto. Há muito campo para a melhora estrutural de manipuladores robóticos, através da utilização das modernas técnicas de otimização estrutural, especialmente quando incluem o uso de materiais piezelétricos que possibilitem uma reação da estrutura, auxiliando o controle ².

Neste trabalho, propõe-se um modelo de controle de trajetória para um manipulador constituído de braços flexíveis, onde o torque dos motores controle a trajetória do ângulo das juntas e também atenua as vibrações de baixa frequência induzidas nos braços do manipulador. Sensores e atuadores piezelétricos são adicionados para controlar as vibrações de alta frequência não alcançadas pelo controle de torque dos motores, com otimização do seu posicionamento e tamanho. Simulações foram obtidas através do software *Matlab/Simulink*, verificando a eficiência do modelo de controle.

2. Modelo Dinâmico

Para determinarmos as técnicas de controle, primeiramente, devemos obter as equações do movimento do robô. Conforme figura (1.a), trata-se de uma estrutura física, constituída por braços flexíveis, juntas, motores e atuadores e sensores piezelétricos fixos aos braços flexíveis do manipulador.

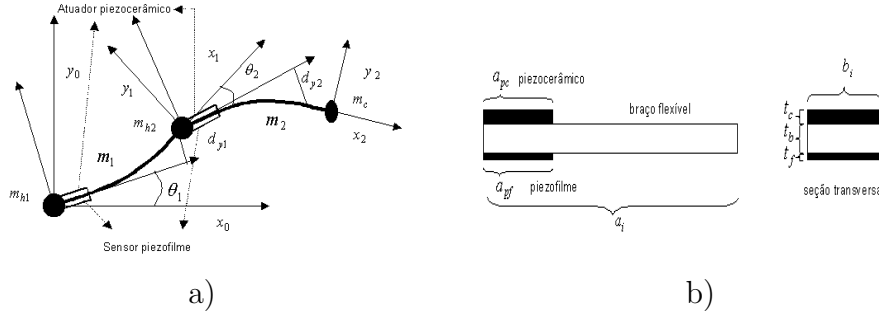


Figura 1: a) Modelo planar de manipulador com atuadores e sensores piezelétricos, b) Braço robótico com atuador e sensor piezelétricos.

O movimento da extremidade final do robô é realizado mediante a composição dos movimentos elementares de cada braço, com respeito ao precedente. Este movimento é descrito através de transformações matriciais homogêneas que representam as translações e rotações decorrentes da variação do ângulo das juntas e das deflexões do braço flexível³. As deflexões são obtidas considerando os braços do robô como barras uniformes de comprimento a_i com um piezocerâmico fixo a sua superfície superior como atuador e um piezofilme fixo a sua superfície inferior como sensor, conforme figura (1.b).

Usando a teoria de Euler-Bernoulli, a deflexão do braço i , $d_{yi}(x_i, t)$ satisfaz a equação

$$(EI)_i \frac{\partial^4 d_{yi}(x_i, t)}{\partial x_i^4} + \rho_i \frac{\partial^2 d_{yi}(x_i, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

onde ρ_i representa a densidade e $(EI)_i$, a rigidez flexural⁹.

Explorando a separabilidade de tempo e espaço da equação da deflexão (2.1), usando a técnica de análise modal, a deflexão de um braço robótico flexível pode ser expresso por

$$d_{yi}(x_i, t) = \sum_{j=1}^{m_i} \phi_{ij}(x_i) \delta_{ij}(t), \quad (2.2)$$

onde cada termo da solução é o produto de uma função harmônica temporal $\delta_{ij}(t) = e^{j\varpi_{ij}t}$, com uma autofunção espacial

$$\phi_{ij}(x_i) = C_{1,ij} \sin(\beta_{ij}x_i) + C_{2,ij} \cos(\beta_{ij}x_i) + C_{3,ij} \sinh(\beta_{ij}x_i) + C_{4,ij} \cosh(\beta_{ij}x_i), \quad (2.3)$$

onde $\beta_{ij}^4 = \varpi_{ij}^2 \rho_i / (EI)_i$, com ϖ_{ij} representando a j -ésima frequência angular natural para o braço i e os coeficientes $C_{k,ij}$ são determinados considerando condições de contorno fixa na base e restrições de inércia rotacional e translacional nas extremidades dos braços⁶.

2.1. Equação do Movimento

O modelo dinâmico completo do robô é determinado através da derivação do Lagrangeano do sistema, obtendo-se as equações do movimento na forma matricial³

$$\mathbf{B}(\theta)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_e \mathbf{q} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{q} = [\theta \ \delta]^T$ é o vetor de coordenadas generalizadas, θ é um vetor $n \times 1$ de coordenadas das juntas, δ é um vetor $m \times 1$ de coordenadas dos modos de deflexões, $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ é matriz de inércia simétrica, positiva definida, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ é o vetor de efeitos centrífugos e de coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ é o vetor de torques gravitacionais, \mathbf{K}_e é matriz de rigidez diagonal, simétrica, positiva definida, \mathbf{D} é matriz de amortecimento diagonal, positiva definida e τ é o vetor de torques aplicado nas juntas.

2.2. Controle de Trajetória

Apresenta-se aqui uma lei de controle para trajetória de robôs com braços flexíveis, baseada em controladores adaptativos.

A estabilidade da trajetória pode ser provada diretamente usando a teoria de estabilidade de Lyapunov e uma lei de controle robusto para reduzir as vibrações induzidas nos braços devido à flexibilidade.

O controle de trajetória é obtido através de compensações não lineares da planta (2.4),

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\theta)\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_p \mathbf{s}, \quad (2.5)$$

onde \mathbf{K}_p é uma matriz de ganho diagonal, positiva definida, $\dot{\mathbf{q}}_r \equiv \dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda \tilde{\mathbf{q}}$ é o vetor velocidade de referência, com erro de trajetória $\tilde{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$, \mathbf{q} indica a trajetória percorrida pelo robô, \mathbf{q}_d a trajetória desejada e $\mathbf{s} \equiv \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}$ erro de referência.

Pode-se demonstrar, através da teoria de estabilidade de Lyapunov⁸, que o erro de trajetória tende a zero e as deflexões dos braços são limitadas. Porém, fisicamente, o amortecimento do sistema pode ser pequeno, isto é, $\mathbf{D} \simeq 0$, resultando numa convergência lenta das deflexões. Neste caso, pode-se adicionar uma ação de controle $\mathbf{D}'_{\Delta} \dot{\delta}_d$, dependente da dinâmica da trajetória δ_d , obtida a partir de \mathbf{q}_d , onde

$$\mathbf{D}'_{\Delta} \equiv \mathbf{D}_{\Delta} - \text{diag}\{f_{11}, \dots, f_{nm}\}, \quad (2.6)$$

com \mathbf{D}_{Δ} matriz diagonal, positiva definida e f_{ij} funções dependentes da velocidade das deflexões.

Adicionando a equação (2.6) à equação (2.5), obtém-se a lei de controle do sistema (2.4), expressa por

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\theta)\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_p \mathbf{s} + \left[\mathbf{0}^T \left(\mathbf{D}'_{\Delta} \dot{\delta}_d \right)^T \right]^T, \quad (2.7)$$

com $\mathbf{D}'_{\Delta} \dot{\delta}_d$ representando uma ação de controle robusta, amortecendo o sistema, eliminando assim vibrações estacionárias.

3. Sensores e Atuadores Piezelétricos

A utilização do torque produzido pelos motores como atuador para controlar vibrações induzidas nos braços pode não alcançar resultados satisfatórios, principalmente se tratando

de altas frequências, devido a limitações físicas do equipamento, tal como, saturação dos motores, passo de tempo e ruídos. Este problema pode ser resolvido utilizando um controle híbrido constituído de dois atuadores: o motor que aciona as juntas e um atuador piezelétrico fixo à superfície dos braços do robô. Obtém-se, então, um controlador constituído de uma lei de controle de retroalimentação indireta para o torque dos motores e um controle de retroalimentação direta de voltagem para os atuadores piezelétricos.

3.1. Controle de Vibrações

Para os atuadores piezelétricos, é proposto uma lei de controle de retroalimentação em voltagem na forma ⁵

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{C}_a \mathbf{K}_c \mathbf{C}_a^T \dot{\mathbf{P}}_f(t), \quad (3.8)$$

com

$$\mathbf{C}_a = \frac{E_b E_c t_c t_f d_{31}}{\rho_b A_b (E_b t_b + 6 E_c t_c)} (\phi'(x_a + a_{pc}) - \phi'(x_a)), \quad (3.9)$$

onde \mathbf{K}_c é o ganho de retroalimentação, E e E_b são, respectivamente, módulo de elasticidade do piezocerâmico e do braço, t_c , t_f e t_b representam a espessura do piezocerâmico, do piezofilme e do braço, respectivamente, A_b é a área da seção transversal do braço, d_{31} é a constante de tensão piezoelétrica e ρ_b é a densidade do braço. $\mathbf{P}_f(t)$ é a voltagem gerada pelo sensor piezofilme, obtida integrando a carga elétrica produzida pelo piezofilme, ao longo de toda sua superfície, dada por

$$\mathbf{P}_f(t) = \mathbf{C}_s \delta = \frac{k_{31}^2 b_f}{C g_{31}} d_{ni} \delta, \quad (3.10)$$

onde k_{31}^2 representa o fator de acoplamento eletromecânico, C a capacitância do piezofilme, d_{ni} é a distância do piezofilme ao eixo neutro do braço flexível e g_{31} a constante de tensão piezoelétrica ².

O controlador (3.8) é adicionado ao controlador (2.7), obtendo-se então a lei de controle do sistema (2.4), expressa por

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\theta) \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_d + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_p \mathbf{s} + \left[\mathbf{0}^T \left(\mathbf{D}'_{\Delta} \dot{\delta}_d \right)^T + \mathbf{c}_a \mathbf{P}(t) \right]^T. \quad (3.11)$$

Novamente, pode-se provar que, através da teoria de estabilidade de Lyapunov, com a lei de controle (3.11), a trajetória e as deflexões do braço flexível resultam assintoticamente estáveis, isto é, convergem a zero quando t tende a infinito.

3.2. Otimização da Localização e Tamanho dos Atuadores

Controle de vibrações de estruturas não depende apenas da lei de controle, mas também da seleção e localização dos atuadores e sensores. Neste trabalho, propõe-se um método

de otimização para a localização e tamanho do atuador/sensor baseado na maximização da energia dissipada devido à ação do controle. Esta metodologia, leva em consideração os efeitos da mudança da massa e rigidez ocorridos na estrutura, devido à adição dos atuadores e sensores, combinada com o controle para obter uma função objetivo, dependente da posição e localização dos atuadores e do ganho de controle.

3.2.1. Energia Total do Sistema

A dinâmica do braço flexível com m sensores e atuadores piezelétricos em termos das coordenadas modais δ , desconsiderando forças gravitacionais, pode ser expressa por

$$\mathbf{B}_{\delta\delta}\ddot{\delta} + \mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\delta} + \mathbf{D}\dot{\delta} + (\mathbf{K})\delta = \mathbf{C}_a\mathbf{P}(t). \quad (3.12)$$

A energia total do sistema pode ser escrita na forma ⁶

$$W = \mathcal{T} + \mathcal{U} = \frac{1}{2}\dot{\delta}^T\mathbf{B}_{\delta\delta}\dot{\delta} + \frac{1}{2}\delta^T(\mathbf{K})\delta > \mathbf{0}. \quad (3.13)$$

A derivação da equação (3.13), com relação ao tempo, resulta

$$\dot{W} = \dot{\mathcal{T}} + \dot{\mathcal{U}} = \frac{1}{2}\dot{\delta}^T\dot{\mathbf{B}}_{\delta\delta}\dot{\delta} + \dot{\delta}^T\mathbf{B}_{\delta\delta}\ddot{\delta} + \delta^T(\mathbf{K})\dot{\delta}. \quad (3.14)$$

Usando as equações (3.12) e (3.14), com a lei de controle (3.8), obtém-se

$$\dot{W} = \dot{\mathcal{T}} + \dot{\mathcal{U}} = -\dot{\delta}^T\mathbf{D}\dot{\delta} - \dot{\delta}^T(\mathbf{C}_a\mathbf{K}_c\mathbf{C}_a^T\mathbf{C}_s)\dot{\delta} < \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

onde o primeiro e segundo termo do lado direito da igualdade representam a taxa de energia do sistema resultante do amortecimento interno e do controle, respectivamente.

Reintegrando a equação (3.14), obtém-se

$$W(t_0) = W_f + W_c = \int_{t_0}^{\infty} \dot{\delta}^T\mathbf{D}\dot{\delta}dt + \int_{t_0}^{\infty} \dot{\delta}^T(\mathbf{C}_a\mathbf{K}_c\mathbf{C}_a^T\mathbf{C}_s)\dot{\delta}dt, \quad (3.16)$$

onde $W(t_0)$ denota a energia total inicial do sistema e W_f e W_c a energia dissipada do sistema resultante do amortecimento interno e do controle, respectivamente.

Para eliminar as vibrações do braço, é conveniente desenvolver um método que maximize a energia dissipada através do sistema de controle. Observa-se que a energia resultante do controle W_c depende da localização e tamanho dos atuadores e também da matriz de ganho de retroalimentação \mathbf{K}_c . Portanto, W_c pode ser usada como um critério de otimização do sistema de controle para determinar a localização e tamanho dos atuadores e também a matriz ganho de retroalimentação.

Para determinar W_c , escrevemos a equação (3.12) na forma de estado

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{z}, \quad (3.17)$$

onde $\mathbf{z} = [\delta, \dot{\delta}]^T$ e

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_{\delta\delta}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{B}_{\delta\delta}^{-1}(\mathbf{C}_{\delta\delta} + \mathbf{D} + \mathbf{C}_a\mathbf{K}_c\mathbf{C}_a^T\mathbf{C}_s) \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Agora, a energia dissipada do sistema resultante do amortecimento interno W_c pode ser escrita como

$$W_c = \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} dt, \quad (3.19)$$

onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{C}_a\mathbf{K}_c\mathbf{C}_a^T\mathbf{C}_s) \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

é uma matriz $2m \times 2m$, correspondente à forma quadrática da energia dissipada do sistema resultante do controle.

Aplicando apropriadas transformações, à expressão (3.19) obtém-se

$$W_c = \mathbf{z}_0^T \mathbf{P} \mathbf{z}_0, \quad (3.21)$$

onde \mathbf{P} é simétrica positiva definida, representando a solução da função de Lyapunov $\tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \tilde{\mathbf{H}} = -\mathbf{Q}$.

Observa-se que W_c depende das condições iniciais da estrutura flexível. Para eliminar esta dependência, assume-se que o estado inicial de \mathbf{z} satisfaça $W_a^{-1}\mathbf{z}_0$, onde $W_a = \text{diag}(\lambda_i)$, com valores aleatórios para $\lambda_i > 0$.

Assim, obtém-se uma função custo $J_0 = \text{tr}(W_a \mathbf{P} W_a)$ para a energia dissipada do sistema devido à ação do controle, dependente apenas do ganho \mathbf{K}_c e do controle \mathbf{C}_a que, por sua vez, depende da posição e tamanho dos atuadores piezelétricos.

Para obter uma estrutura eficiente, tanto na precisão, quanto na agilidade, é importante uma função custo que considere o peso do material piezelétrico utilizado como atuador. Para isso, adiciona-se à função custo, um termo quadrático dependente do tamanho do atuador a_{pc} , resultando no seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \min_{x_a, a_{pc}, K_c} J &= \alpha a_{pc}^2 - J_0 \\ 0 &\leq x_a \leq a_i \\ 0 &< a_{pc} + x_a \leq a_i \\ K_c &\leq K_{max}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde α depende do custo do material piezelétrico e K_{max} depende da limitação de potência dos atuadores.

4. Resultados

Para testar as leis de controle obtidas anteriormente, considera-se um modelo simplificado de robô com o primeiro braço rígido e o segundo braço flexível ($a_1 = 0.3$ m $a_2 = 0.7$ m), com dois modos de deformação, desconsiderando efeitos gravitacionais ⁷. Assim, o vetor de coordenadas Lagrangeanas se reduz a $\mathbf{q} = (\theta_1, \theta_2, \delta_{21}, \delta_{22})^T$.

Utilizou-se trajetórias de velocidade trapezoidal, com amplitude $\pi/2$ para o ângulo das juntas 1 e 2, com erro de traçado inicial zero, conforme mostrado na figura (2.a).

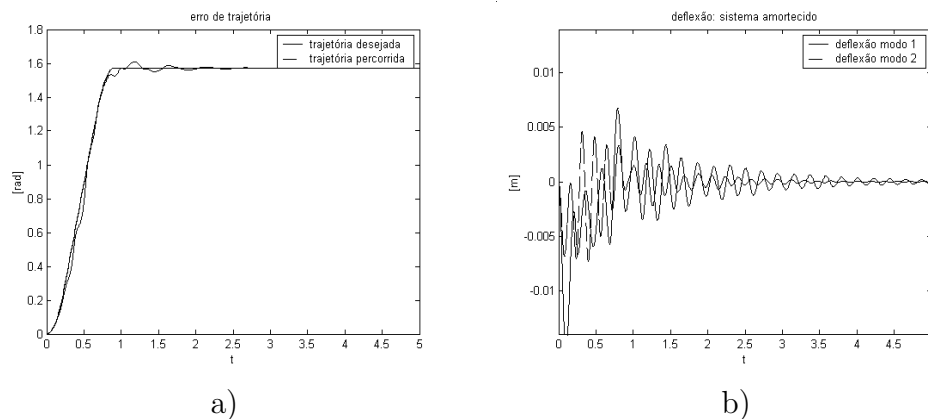


Figura 2: a) Trajetória do ângulo das juntas desejada e percorrida pela junta 2, b) Deflexão do primeiro e segundo modo do braço 2 para sistema amortecido.

Os resultados comparativos foram obtidos através de simulações utilizando *Simulink*, com $\Delta t = 1$ ms, com o método numérico Runge Kutta de quarta ordem, por um período de 5 segundos.

Primeiramente, simulou-se um sistema amortecido com a lei de controle (2.5). Observa-se, na figura (2.b), que as deflexões tendem a zero e são limitadas devido ao amortecimento natural do sistema. Na figura (2.a), pode-se observar que o erro de trajetória do sistema também tende a zero.

Na segunda simulação, utilizou-se a lei de controle (2.7), sobre o mesmo sistema da simulação anterior. Pode-se observar, na figura (3.a), um aumento no amortecimento do sistema e uma convergência a zero mais rápida das deflexões, decorrente da adição do controlador $\mathbf{D}'_{\Delta} \dot{\delta}_a$.

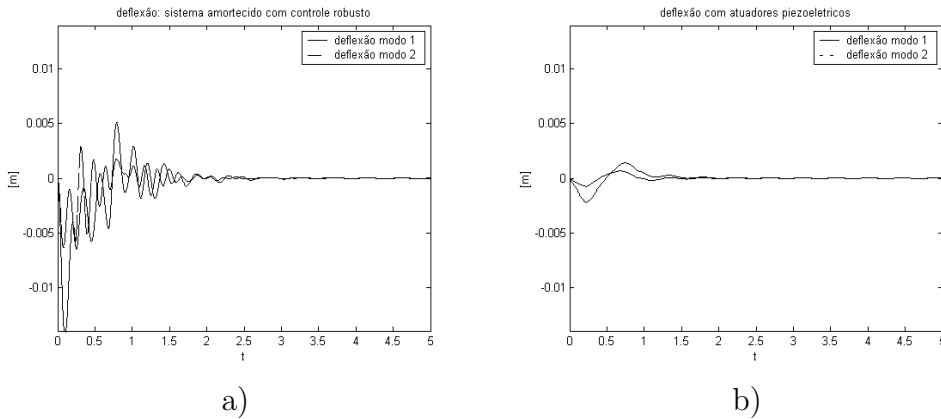


Figura 3: Deflexão do primeiro e segundo modo para: a) sistema amortecido com controle robusto e b) sistema amortecido com atuadores e sensores piezoelétricos.

Para simulações do sistema anterior com a lei de controle (3.11), onde são adicionados atuadores e sensores piezoelétricos, primeiramente determinou-se a posição e tamanho dos atuadores resolvendo o problema de minimização da função custo (3.22), usando *Matlab*. Na figura (4.a, 4.b), temos o gráfico da função custo (3.22), dependente das variáveis a_{pc} e x_a , com $\alpha = 300$, que resulta num valor mínimo em $x_a = 0.12m$ e $a_{pc} = 0.4m$, representando a posição e tamanho do atuador piezoelétrico fixo ao braço do robô. O valor ótimo para o ganho de controle acontece em $k_{ci} = k_{max} = 20$. Observa-se, na figura (3.b), uma redução na frequência e amplitude das deflexões induzidas pelo controle de trajetória quando adicionados atuadores e sensores piezoelétricos.

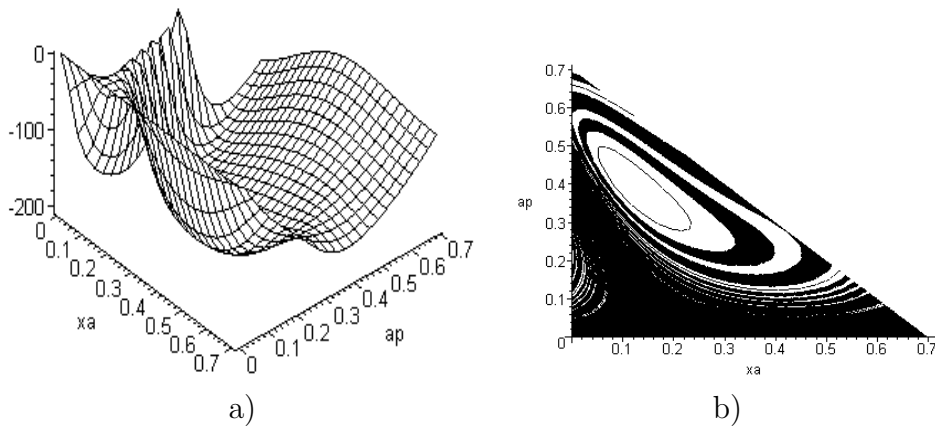


Figura 4: a) Função custo energia dissipada pelo sistema devido à ação do controle piezoelétrico e b) Curvas de nível da função custo restrita em $0 < a_{pc} + x_a \leq a_i$.

5. Conclusões e Considerações

Neste trabalho, obteve-se uma técnica de controle de trajetória e vibrações de um robô com braços flexíveis. Esta técnica, utiliza o torque dos motores para o controle do ângulo das juntas e também para controlar as vibrações de baixa frequência, induzidas nos braços do robô. Atuadores e sensores piezelétricos são adicionados ao sistema, com a finalidade de controlar as vibrações de alta frequência não alcançadas pela ação do controle dos motores. Além disso, foi determinado, através da energia dissipada pelo sistema, devido à ação do controle, uma posição e tamanho ótimos para os atuadores e sensores piezelétricos.

Assim, obtém-se um melhor aproveitamento do torque dos motores e uma redução do tamanho dos atuadores e sensores. Desta forma, pode-se construir manipuladores com braços flexíveis, utilizando materiais leves, preservando a força e precisão. Isto aumenta a agilidade e diminui o consumo de energia, para o uso em missões espaciais ou tarefas que exijam precisão e agilidade.

Referências

- [1] ARIMOTO, S., Control Theory of Non-Linear Mechanical Systems, Oxford Clarendon Press, London, (1996).
- [2] BANKS, H. T., SMITH, R. C. e WANG, Y., Smart Material Structures: Modeling, Estimation and Control, John Wiley & Sons, Paris, 1996.
- [3] BOOK, W. J., Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms, Int. J. Robotics Res., vol. 3, no. 3, pp. 87-101, 1984.
- [4] BOTTEGA, V., Controle de Sistemas Mecânicos Não Lineares Aplicado a Um Manipulador Robótico, Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre, 1998.
- [5] CRAWLEY, E. F. e DE LUIS, J., Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures, AIAA Journal, vol. 25, pp. 1373-1385, 1987.
- [6] DE LUCA, A., LUCIBELLO, P. e NICOLO, F., Automatic Symbolic Modeling and Nonlinear Control of Robots with Flexible Links. In Proc. IEEE Work on Robot Control, Oxford, UK, Apr. 1988, pp. 62-70.
- [7] DE LUCA, A. LANARI, L., LUCIBELLO, S. e PANZIERI, S., Control Experiments on a two-link Robot with a Flexible Forearm, 29th IEEE conf. Decision and Control, Honolulu, HI, pp 5-7, 1990.
- [8] LA SALLE, J. P. e LEFSCHETZ, S., Stability by Lyapunov's Direct Method, Academic Press, New York, 1961.
- [9] MEIROVITCH, L., Analitical Methods in Vibration. Macmillan, New York, (1967).