

## IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ EN EL ESTUDIO DE LA VIBRACIÓN TRANSVERSAL DE PLACAS RECTANGULARES CON COMPLEJIDADES ADICIONALES

D. H. Felix<sup>†</sup>, D. V. Bambill<sup>†\*</sup>, C. A. Rossit<sup>†\*</sup> y P. A. A. Laura<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Universidad Nacional del Sur  
Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595156–Interno 3219,  
E-mail: dhfelix@criba.edu.ar  
dambill@criba.edu.ar  
carossit@criba.edu.ar  
ima@criba.edu.ar

\* Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

**Palabras clave:** Vibraciones, Rayleigh-Ritz, Placas rectangulares, Paneles reparados.

**Resumen** *La solución exacta del problema de vibración transversal de placas rectangulares isótropas resulta de difícil obtención, salvo en el caso en que dos bordes opuestos de la misma sean simplemente apoyados, y los otros dos no sean ambos libres. El problema se torna aún más complejo, cuando en la placa existen agujeros para el paso de conductos, o zonas de la placa que poseen propiedades mecánicas diferentes, causadas por defectos de fabricación, o por daños localizados o por reparaciones. En estos casos, cobra vigencia la utilización de métodos aproximados para determinar los parámetros dinámicos. En el presente trabajo, se presenta una reseña de resultados obtenidos para placas vibrantes rectangulares con diversas complejidades en su dominio. El método utilizado es el de Rayleigh – Ritz, implementado a través de un algoritmo que facilita la construcción de las matrices de energía involucradas en el determinante – ecuación, para obtener los autovalores asociados con las frecuencias naturales del problema. Se recurrió a conjuntos de funciones viga para aproximar la amplitud de la deformación. Cabe recordar, que la primera vez que se utilizaron funciones viga en forma intensiva para calcular autovalores de placas homogéneas vibrando transversalmente fue en el ya clásico trabajo de Dana Young: “Vibrations of rectangular plates by the Ritz Method” publicado en 1950 en el Journal of Applied Mechanics <sup>1</sup>.*

## 1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el auge de los materiales compuestos, y de materiales homogéneos con características ortótropas e incluso anisótropas <sup>2</sup>, hace que sean muy adecuadas para el análisis dinámico, las metodologías aproximadas de cálculo. No obstante es conveniente la adaptación y mejoramiento de tales metodologías tanto a las posibilidades de cálculo actuales, como a los requerimientos de los nuevos materiales.

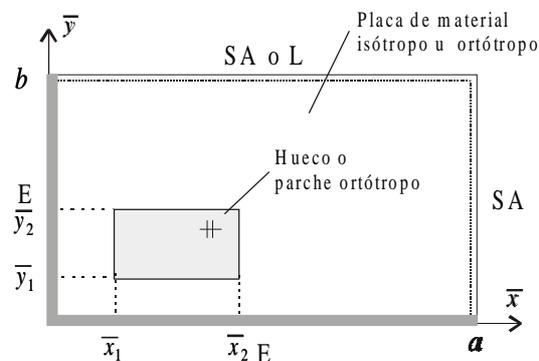
El presente trabajo presenta el análisis del comportamiento dinámico de placas rectangulares ortótropas que contienen inclusiones de materiales diferentes, tienen diversas condiciones de borde y la presencia de agujeros.

Puede hallarse abundante bibliografía relacionada con el análisis de placas llenas construidas de materiales isótropos <sup>3,4</sup>, pero resultan escasos los trabajos encontrados cuando se presentan características como las mencionadas en el párrafo anterior <sup>5</sup>.

Basta con recordar brevemente el gran uso de estos elementos estructurales, en casi todos los campos de la ingeniería, citando a modo de ejemplo el uso de placas con perforaciones para el paso de conductos, la reparación de paneles navales <sup>6</sup> con materiales de características diferentes, o construidas con material ortótropo, la utilización de placas de circuito impreso perforadas, el análisis indirecto del deterioro por corrosión entre otros.

### 1.1 Presentación del modelo

El esquema simplificado de la figura 1 presenta el modelo estructural a analizar, una placa rectangular con un agujero o con un parche de material ortótropo, con dos de sus lados empotrados, uno simplemente apoyado y el otro simplemente apoyado o libre.



Figuran 1: Placa rectangular E-E-SA-SA o E-E-SA-L sometida a vibraciones transversales libres, analizada para dos relaciones de lado: a)  $\lambda = a/b = 1$ , b)  $\lambda = a/b = 1.5$ .

En la figura 1,  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  son las coordenadas espaciales en el plano de la placa,  $a$  y  $b$  las dimensiones de lados y  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$ ,  $\bar{y}_1$  e  $\bar{y}_2$  definen las coordenadas de los vértices del rectángulo que corresponde al agujero de borde libre o al parche. Según el caso, se plantean los modelos estructurales que corresponden a la placa E-E-SA-SA, y a la placa E-E-SA-L. Se comparan los resultados obtenidos en ambos casos de vinculación, con el fin de analizar el cambio en el

comportamiento dinámico del sistema cuando el vínculo simplemente apoyado falla o es eliminado por razones de rediseño, produciéndose la transición del primer al segundo modelo.

## 2 SOLUCIÓN ANALÍTICA

El tratamiento clásico utilizado en la determinación de las frecuencias naturales de vibración transversal de una placa rectangular, empleando el método energético de Rayleigh-Ritz<sup>1</sup>, comienza con la definición de la amplitud de desplazamiento transversal  $W(x,y)$ . En este trabajo las funciones coordenadas que definen la amplitud de desplazamiento de la placa vibrante son las expresiones de las funciones viga<sup>7</sup>, que satisfacen idénticamente las condiciones de borde esenciales o geométricas en el contorno exterior de la placa. Si las coordenadas de posición, y las variables que las involucran, son convenientemente expresadas en forma adimensional, se puede escribir la función amplitud de desplazamiento como:

$$W(x,y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (1)$$

donde

$$x = \bar{x}/a \quad ; \quad y = \bar{y}/b \quad (2)$$

Las relaciones funcionales  $X_m(x)$  e  $Y_n(y)$  son las funciones viga elegidas de acuerdo a las condiciones de borde de la placa; y  $A_{mn}$  son coeficientes indeterminados. Para los casos resueltos en el presente estudio, fue necesario emplear las funciones coordenadas correspondientes a una viga *Empotrada - Simplemente Apoyada* en la dirección  $x$ , y las correspondientes a una viga *Empotrada - Simplemente Apoyada* o *Empotrada - Libre* en la dirección  $y$  según el caso, y que tienen las siguientes expresiones generales<sup>7</sup>:

$$X_m(x) = \cosh(k_m x) - \cos(k_m x) - r_m [\sinh(k_m x) - \sin(k_m x)] \quad (3.a)$$

$$Y_n(y) = \cosh(k_n y) - \cos(k_n y) - r_n [\sinh(k_n y) - \sin(k_n y)] \quad (3.b)$$

Las constantes  $r_m$  y  $r_n$ , así como los autovalores  $k_m$  y  $k_n$ , del problema de vibración libre de la viga, dependen de sus condiciones de vinculación.

En el caso de la viga *Empotrada - Simplemente Apoyada* es

$$r_m = \frac{\cosh(k_m) - \cos(k_m)}{\sinh(k_m) - \sin(k_m)} \quad ; \quad r_n = \frac{\cosh(k_n) - \cos(k_n)}{\sinh(k_n) - \sin(k_n)} \quad (4)$$

y los autovalores  $k_m$  y  $k_n$ , son las raíces de la ecuación característica

$$\tan(k) \tanh(k) = 1 \quad (5)$$

En el caso de la viga *Empotrada - Libre*, los coeficientes de las funciones viga correspondientes son:

$$r_m = \frac{\cosh(k_m) + \cos(k_m)}{\sinh(k_m) + \sin(k_m)} \quad ; \quad r_n = \frac{\cosh(k_n) + \cos(k_n)}{\sinh(k_n) + \sin(k_n)} \quad (6)$$

y sus autovalores  $k_m$  y  $k_n$ , son las raíces de la ecuación trascendente:

$$\cos(k) \cosh(k) = -1 \quad (7)$$

## 2.1 Método de Rayleigh-Ritz

La funcional energética que gobierna el sistema estructural propuesto resulta de plantear la diferencia entre la máxima energía de deformación y la máxima energía cinética.

$$J[W] = U_{max} - T_{max} \quad (8)$$

Considerando que los materiales, tanto de la placa como del parche, pueden tener características ortotrópicas, de acuerdo a la clásica la notación de Lekhnitskii <sup>2</sup>, la funcional se expresa como:

$$\begin{aligned} J[W] = & \frac{1}{2} \int_{A-A_h} \left[ \frac{b}{a^3} D_1 W_{xx}^2 + \frac{2 D_1 \nu_2}{a b} W_{xx} W_{yy} + \frac{a}{b^3} D_2 W_{yy}^2 + \frac{4 D_k}{a b} W_{xy}^2 \right] dx dy \\ & + \frac{1}{2} \int_{A_p} \left[ \frac{b}{a^3} D_1^* W_{xx}^2 + \frac{2 D_1^* \nu_2^*}{a b} W_{xx} W_{yy} + \frac{a}{b^3} D_2^* W_{yy}^2 + \frac{4 D_k^*}{a b} W_{xy}^2 \right] dx dy \quad (9) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\rho \omega^2}{a b} \int_{A-A_h} h W^2 dx dy - \frac{1}{2} \frac{\rho_p \omega^2}{a b} \int_{A_p} h W^2 dx dy \end{aligned}$$

siendo para la placa:

$A-A_h$ : el dominio de integración, correspondiente a la placa, resultado de la diferencia entre el área total del rectángulo de la placa y el área del agujero o parche considerado,

$D_1, D_2$  y  $D_k$ : las rigideces flexionales y torsional de las direcciones principales elásticas,

$\nu_2$ , uno de los coeficientes de Poisson,

y  $\rho$  la densidad, todos correspondientes al material de la placa.

$h$  es el espesor tanto de la placa como del parche,

$\omega$  es la frecuencia natural circular de vibración transversal del sistema estructural.

Análogamente  $D_1^*, D_2^*, D_k^*, \nu_2^*$  y  $\rho_p$ , definen las propiedades del material ortótropo que conforma el parche.

Las  $W_{xx}, W_{yy}$  y  $W_{xy}$  denotan las derivadas parciales de la amplitud de desplazamiento respecto a las coordenadas adimensionales espaciales  $x$  e  $y$ .

Finalmente, derivando la expresión (9) respecto a cada uno de los coeficientes indeterminados  $A_{mn}$  se obtiene el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\frac{\partial J[W]}{\partial A_{mn}} = 0 \quad (10)$$

cuyo determinante permite calcular los coeficientes de frecuencia natural de la estructura, que se expresan adimensionalmente como:  $\Omega_i(\omega_i) = \sqrt{\rho h/D_1} a^2 \omega_i$ .

### 3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Siguiendo el proceso reseñado previamente, se analizó el modelo estructural de la figura 1. Las propiedades de los materiales para los casos analizados se resumen en la tabla 1.

Tabla 1: Relaciones de las propiedades mecánicas de los materiales correspondientes a los casos analizados

|                                     |                                           |                                                                                                            |
|-------------------------------------|-------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Placa isótropa con agujero          | $D_2 = D_1 = D, D_k = 0.35 D; \nu = 0.30$ |                                                                                                            |
| Placa isótropa con parche ortótropo | Placa                                     | $D_2 = D_1 = D, D_k = 0.35 D; \nu = 0.30$                                                                  |
|                                     | Parche                                    | $\frac{D_2^*}{D} = \frac{D_1^*}{D} = \frac{D_k^*}{D} = 0.50;$<br>$\nu_2^* = 0.30; \frac{\rho_p}{\rho} = 1$ |
| Placa ortótropa maciza              | $D_1 = D_2 = D_k = 0.50 D; \nu_2 = 0.30$  |                                                                                                            |

La ubicación y el tamaño del agujero o del parche rectangular queda definido por las coordenadas de los vértices del mismo. En los casos estudiados se adoptó:  $x_1=0.1, x_2=0.3, y_1=0.1$  e  $y_2=0.3$ .

Con el fin de contrastar los resultados obtenidos se empleó un algoritmo de elementos finitos <sup>8</sup> para obtener valores de referencia y se utilizó una malla de 400 elementos en el caso de placas cuadradas, y de 600 elementos para las placas rectangulares. Se presentan en todos los casos los primeros cuatro coeficientes adimensionales de frecuencia natural.

Si bien el planteo analítico-numérico desarrollado permite implementar un número arbitrario de términos en la serie que aproxima la amplitud de desplazamiento transversal, se estimó conveniente utilizar 400 términos ( $M \times N$ ), de acuerdo a los datos obtenidos de un análisis previo de convergencia. En tal sentido se ha observado, como era esperable, una convergencia más lenta cuando la placa posee uno de sus bordes libre. Los resultados calculados, tanto con el método analítico como con el de elementos finitos, se presentan en las tablas 2, 3, 4 y 5, y en todos los casos se observa un excelente acuerdo entre los valores obtenidos por ambas metodologías.

En la tabla 2, para el caso de placas isótropas macizas, se muestra una tercera fila con valores correspondientes a los presentados por Leissa <sup>9</sup>. Según se observa el acuerdo en todos los casos es muy bueno.

Los valores calculados al analizar los modelos de la figura 2 se presentan en la tabla 2, clasificados según las características del material y la relación de lados  $\lambda$  de la placa. En los casos presentados en dicha tabla, que corresponde a la placa E-E-SA-SA, no se observa en general variaciones importantes de los coeficientes de frecuencia al comparar los resultados calculados para la placa isótropa con aquellos correspondientes a la placa del material ortótropo elegido. No obstante se presentan dos excepciones: Para la placa maciza cuadrada el segundo coeficiente de frecuencia natural  $\Omega_2$  resulta ser significativamente mayor (16,4%) en la placa isótropa que en la placa de material ortótropo. En tanto que en la placa rectangular con relación de lados  $\lambda=1,5$ , el tercer coeficiente de frecuencia natural  $\Omega_3$  es un 27,2 % mayor para el caso isótropo que el correspondiente de material ortótropo.

Los valores obtenidos para los modelos de la figura 3, placas isótropas y ortótropas E-E-SA-SA se presentan en la tabla 3.

En los casos siguientes, tablas 4 y 5, se analizaron placas en las que se reemplazó uno de los bordes simplemente apoyado por uno libre, para estudiar cómo esta modificación afecta la respuesta dinámica de la placa.

La tabla 4 contiene los cuatro primeros coeficientes de frecuencia natural de placas macizas E-E-SA-L, indicadas en la figura 4. En esta tabla se presenta una situación similar a la que se observa en la tabla 2, los coeficientes de frecuencia natural para el material ortótropo elegido resultan ser un poco más altos que para el material isótropo, con algunas excepciones de las que se destacan dos casos: el coeficiente  $\Omega_4$  de la placa cuadrada es un 11,3 % más alto en la placa de material isótropo que en la ortótropa y el coeficiente  $\Omega_3$  para las placas rectangulares resulta 11,9 % superior para el material isótropo comparado con el ortótropo.

Los valores calculados al analizar los modelos de la figura 5 se presentan en la tabla 5, clasificados según las características del material y la relación de lados  $\lambda$  de la placa.

Asimismo se observa que el comportamiento dinámico de las placas no se ve afectado sensiblemente si se compara los modelos de placas que tienen un agujero, con los correspondientes a placas similares en las que se ha considerado un parche de material ortótropo de iguales dimensiones (tablas 3 y 5).

Sí se observa en cambio, una marcada diferencia al alterar la condición de borde, y comparar los valores calculados en las placas E-E-SA-SA (tabla3), con los determinados en placas similares E-E-SA-L (tabla 5).

#### 4 CONCLUSIONES

La observación de los resultados obtenidos permite concluir que para el modelo estructural planteado, la modificación de las condiciones de borde, consistente en este caso, en cambiar un apoyo simple por un borde libre, modifican de manera muy significativa las frecuencias naturales de vibración transversal del sistema como es obvio.

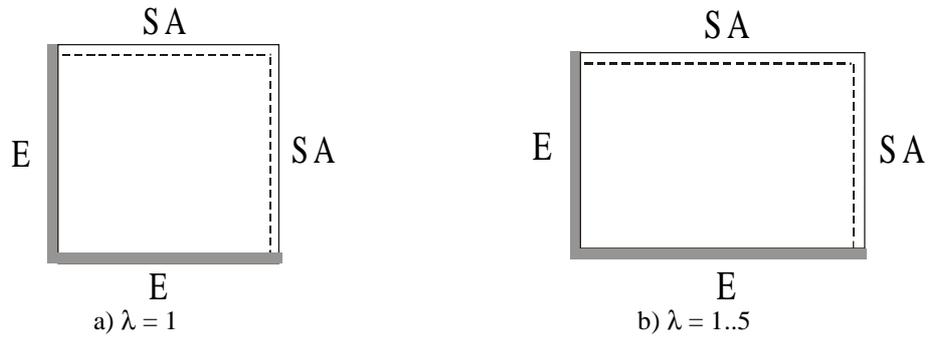


Figura 2: Placa rectangular E-E-SA-SA maciza sometida a vibraciones transversales libres, analizada para dos relaciones de lado: a)  $\lambda = a/b = 1$ , b)  $\lambda = a/b = 1.5$ .

Tabla 2: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural  $\Omega_i = \sqrt{\rho h/D} a^2 \omega_i$  para la placa E-E-SA-SA.

|                 |                        | <b>Placa isótropa</b> |            |            |            |            |
|-----------------|------------------------|-----------------------|------------|------------|------------|------------|
|                 |                        | $\Omega_1$            | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |            |
| $\lambda = 1$   | MA                     | 27.0543               | 60.5385    | 60.7860    | 92.8350    |            |
|                 | EF                     | 27.0541               | 60.5391    | 60.7867    | 92.8373    |            |
|                 | Ref <sup>9</sup>       | 27.056                | 60.544     | 60.791     | 92.865     |            |
|                 | <b>Placa ortótropa</b> |                       |            |            |            |            |
|                 |                        |                       | $\Omega_1$ | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
|                 | MA                     | 26.1425               | 51.9958    | 61.7599    | 91.0640    |            |
| EF              | 26.1421                | 51.9962               | 61.7606    | 91.0666    |            |            |
| $\lambda = 1.5$ | <b>Placa isótropa</b>  |                       |            |            |            |            |
|                 |                        |                       | $\Omega_1$ | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
|                 | MA                     | 44.8905               | 76.5447    | 122.318    | 129.393    |            |
|                 | EF                     | 44.8904               | 76.5450    | 122.319    | 129.394    |            |
|                 | Ref <sup>9</sup>       | 44.893                | 76.554     | 122.330    | 129.410    |            |
|                 | <b>Placa ortótropa</b> |                       |            |            |            |            |
|                 |                        | $\Omega_1$            | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |            |
| MA              | 39.6767                | 76.4478               | 96.1603    | 131.876    |            |            |
| EF              | 39.6763                | 76.4480               | 96.1607    | 131.876    |            |            |

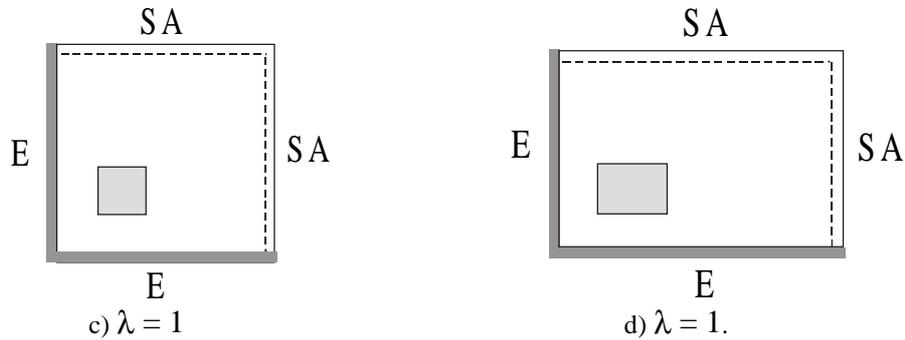


Figura 3: Placa rectangular E-E-SA-SA con una inclusión, sometida a vibraciones transversales libres, analizada para dos relaciones de lado: a)  $\lambda = a/b = 1$ , b)  $\lambda = a/b = 1.5$ .

Tabla 3: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia naturales  $\Omega_i = \sqrt{\rho h/D} a^2 \omega_i$  para la placa E-E-SA-SA.

|                 |         | <b>Placa isótropa con agujero</b> |                                            |            |            |            |
|-----------------|---------|-----------------------------------|--------------------------------------------|------------|------------|------------|
|                 |         | $\Omega_1$                        | $\Omega_2$                                 | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |            |
| $\lambda = 1$   | M A     | 26.7176                           | 60.1271                                    | 60.3857    | 92.7264    |            |
|                 | E F     | 26.6912                           | 59.8712                                    | 60.3807    | 92.3401    |            |
|                 |         |                                   | <b>Placa isótropa con parche ortótropo</b> |            |            |            |
|                 |         |                                   | $\Omega_1$                                 | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
|                 | M A     | 27.1254                           | 60.4983                                    | 60.8860    | 92.6722    |            |
|                 | E F     | 27.1243                           | 60.4970                                    | 60.8806    | 92.6625    |            |
| $\lambda = 1.5$ |         |                                   | <b>Placa isótropa con agujero</b>          |            |            |            |
|                 |         |                                   | $\Omega_1$                                 | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
|                 | M A     | 44.3640                           | 75.7870                                    | 121.714    | 128.802    |            |
|                 | E F     | 44.2571                           | 75.3502                                    | 120.968    | 128.197    |            |
|                 |         |                                   | <b>Placa isótropa con parche ortótropo</b> |            |            |            |
|                 |         |                                   | $\Omega_1$                                 | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
| M A             | 44.9598 | 76.6224                           | 122.066                                    | 129.483    |            |            |
| E F             | 44.9564 | 76.6157                           | 122.045                                    | 129.478    |            |            |

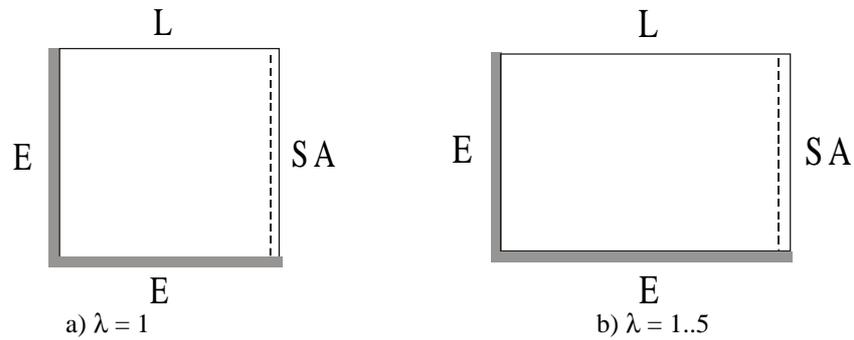


Figura 4: Placa rectangular E-E-SA-L maciza sometida a vibraciones transversales libres, analizada para dos relaciones de lado: a)  $\lambda = a/b = 1$ , b)  $\lambda = a/b = 1.5$ .

Tabla 4: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia naturales  $\Omega_i = \sqrt{\rho h/D} a^2 \omega_i$  en la placa E-E-SA-L.

|                 |                        | <b>Placa isótropa</b> |            |            |            |            |
|-----------------|------------------------|-----------------------|------------|------------|------------|------------|
|                 |                        | $\Omega_1$            | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |            |
| $\lambda = 1$   | MA                     | 17.5716               | 36.0373    | 51.9248    | 71.1459    |            |
|                 | EF                     | 17.5375               | 36.0234    | 51.8130    | 71.0775    |            |
|                 | Ref <sup>9</sup>       | 17.615                | 36.046     | 52.065     | 71.194     |            |
|                 | <b>Placa ortótropa</b> |                       |            |            |            |            |
|                 |                        |                       | $\Omega_1$ | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
|                 | MA                     | 17.9243               | 35.0055    | 52.4832    | 63.9326    |            |
| EF              | 17.8703                | 34.9828               | 52.3051    | 63.9241    |            |            |
| $\lambda = 1.5$ | <b>Placa isótropa</b>  |                       |            |            |            |            |
|                 |                        |                       | $\Omega_1$ | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
|                 | MA                     | 20.9940               | 55.0287    | 63.1629    | 98.9499    |            |
|                 | EF                     | 20.9638               | 54.9135    | 63.1544    | 98.8961    |            |
|                 | Ref <sup>9</sup>       | 21.035                | 55.184     | 63.178     | 99.007     |            |
|                 | <b>Placa ortótropa</b> |                       |            |            |            |            |
|                 |                        | $\Omega_1$            | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |            |
| MA              | 21.3726                | 55.9949               | 56.4167    | 99.6764    |            |            |
| EF              | 21.3219                | 55.8344               | 56.3765    | 99.5913    |            |            |

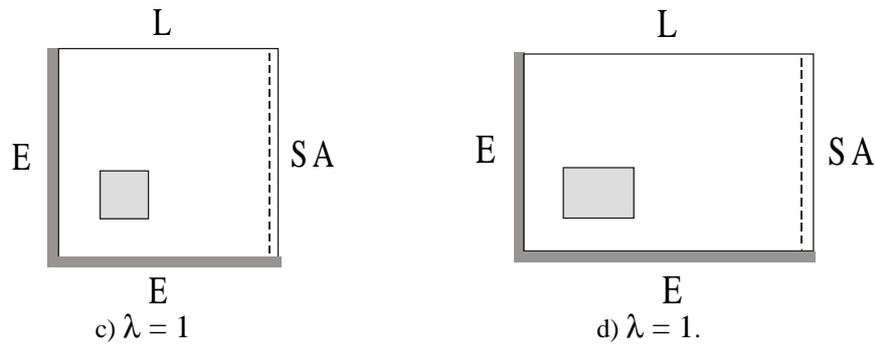


Figura 5: Placa rectangular E-E-SA-L con una inclusión, sometida a vibraciones transversales libres, analizada para dos relaciones de lado: a)  $\lambda = a/b = 1$ , b)  $\lambda = a/b = 1.5$ .

Tabla 5: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia naturales  $\Omega_i = \sqrt{\rho h/D} a^2 \omega_i$  en una placa E-E-SA-L.

|                 |         | <b>Placa isótropa con agujero</b> |                                            |            |            |            |
|-----------------|---------|-----------------------------------|--------------------------------------------|------------|------------|------------|
|                 |         | $\Omega_1$                        | $\Omega_2$                                 | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |            |
| $\lambda = 1$   | M A     | 17.4710                           | 35.6545                                    | 51.8039    | 70.7223    |            |
|                 | E F     | 17.4334                           | 35.5869                                    | 51.6673    | 70.4193    |            |
|                 |         |                                   | <b>Placa isótropa con parche ortótropo</b> |            |            |            |
|                 |         |                                   | $\Omega_1$                                 | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
|                 | M A     | 17.5888                           | 36.1155                                    | 51.9468    | 71.2171    |            |
|                 | E F     | 17.5545                           | 36.0998                                    | 51.8345    | 71.1457    |            |
| $\lambda = 1.5$ |         |                                   | <b>Placa isótropa con agujero</b>          |            |            |            |
|                 |         |                                   | $\Omega_1$                                 | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
|                 | M A     | 20.7942                           | 54.7610                                    | 62.4609    | 97.7081    |            |
|                 | E F     | 20.7569                           | 54.6109                                    | 62.3165    | 97.1993    |            |
|                 |         |                                   | <b>Placa isótropa con parche ortótropo</b> |            |            |            |
|                 |         |                                   | $\Omega_1$                                 | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
| M A             | 21.0057 | 55.0414                           | 63.2331                                    | 98.9754    |            |            |
| E F             | 20.9734 | 54.9248                           | 63.2178                                    | 98.9051    |            |            |

En lo referente a la metodología planteada, puede decirse que la convergencia del algoritmo es muy satisfactoria, aún en el caso en que la placa posee un borde libre, y se destaca el hecho de que en muchos de los casos puede incrementarse la precisión aumentando el número de términos utilizados en la función que aproxima la amplitud de desplazamiento transversal. En este sentido un procedimiento simplificado y sistemático que facilita el empleo de la metodología clásica se halla parcialmente implementado y en proceso de desarrollo por

los autores.

## 5 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el auspicio de este trabajo al Departamento de Ingeniería y a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, y al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, y en particular hacen presente un especial agradecimiento al Ingeniero Raúl E. Rossi por su colaboración y asesoramiento en los cálculos realizados con elementos finitos.

## 6 REFERENCIAS

- [1] D. Young, "Vibration of rectangular plates by the Ritz Method", *Journal of Applied Mechanics*, **17**, p.p. 448-453, (1950).
- [2] S. G. Lekhnitskii, *Anisotropic plates*, Gordon and Breach Sciens Publishers, N Y(1968).
- [3] W. Weaver Jr., S. P. Timoshenko and D.H. Young, *Vibration problems in engineering*, John Wiley & Sons, New York, (1990).
- [4] W. Leissa, *Vibration of plates*. NASA S.P. 160, (1969).
- [5] P. A. A. Laura, *Vibrations of orthotropic plates*. Instituto de Mecánica Aplicada. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (1998).
- [6] D.H. Felix, D.V. Bambill, C.A. Rossit, R.E. Rossi y P.A.A. Laura, "Natural frequencies of a vibrating repaired panel in an ocean structure", *Ocean Engineering* **30**, pp. 955-963, (2003).
- [7] R. D. Blevins, *Formulas for natural frequency and mode shape*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, (1979).
- [8] R. E. Rossi, "A note of a finite element for vibrating thin orthotropic rectangular plates" , *Journal of Sound and Vibration*, **208**(5), p.p. 864-868, (1997).
- [9] A. W. Leissa, "The free vibration of rectangular plates" , *Journal of Sound and Vibration*, **31**, pp. 257-293, (1973).